Thèse de Master

Parcours : Analyse, Modélisation, Simulation

Étude de l'Énergie Renormalisée de Ginzburg-Landau

Étudiant : Paúl Alejandro Ubillús Garrido

Encadrant : Rémy Rodiac

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Orsay, septembre 2020

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier profondément à mon encadrant Rémy Rodiac pour me guider dans mes premiers pas dans le monde de la recherche. Je souhaite lui exprimer ma gratitude pour m'avoir initié à l'étude de l'énergie renormalisée de Ginzburg–Landau ainsi que sa gentillesse, sa clarté et sa disponibilité.

Je suis également très reconnaissant envers les enseignants Jean Van Schaftingen pour ses suggestions et pour être maintenant mon directeur de thèse, et Laurent Moonens pour sa grande aide et pour avoir partagé avec moi de précieux conseils et expériences.

Un grand merci a tous mes amis pour m'avoir si bien entoure. En particulier Carlos et mon groupe de camarades du collège pour les conversations et pour le bonheur dans les moments difficiles.

Finalement un immense merci à ma famille, pour avoir toujours veillé sur moi et pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. C'est grâce à leur soutien inconditionnel que j'en suis là aujourd'hui.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar las gracias a mi supervisor Rémy Rodiac por guiarme en mis primeros pasos en el mundo de la investigación. Deseo expresarle mi gratitud por haberme iniciado en el estudio de la energía renormalizada de Ginzburg–Landau, así como su amabilidad, claridad y disponibilidad.

También estoy muy agradecido con los profesores Jean Van Schaftingen por sus sugerencias y por ser ahora mi director de tesis, y Laurent Moonens por su gran ayuda y por compartir conmigo valiosos consejos y experiencias.

Un gran agradecimiento a todos mis amigos por haberme acompañado tan bien. Especialmente a Carlos y a mi grupo de amigos del colegio por las charlas y por la felicidad en los momentos difíciles.

Finalmente un gran agradecimiento a mi familia, por siempre cuidarme y por todo lo que han hecho por mí. Es gracias a su apoyo incondicional que estoy hoy aquí.

“Rien ne vaut la recherche lorsqu’on veut trouver quelque chose.”

- J.R.R Tolkien, Bilbo le Hobbit

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objective de cette mémoire est d'étudier le problème variationnel lié à l'énergie de Ginzburg-Landau pour obtenir une fonction appelée "énergie renormalisée", en considérant des domaines simplement connexes et puis chercher une généralisation au cas des domaines multiplement connexes.

Dans leur ouvrage intitulé "Ginzburg-Landau Vortices" (voir [1]), F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein ont étudié en profondeur le problème de minimisation associé à l'énergie de Ginzburg-Landau : soient G un ouvert, borné, régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (également identifié comme $\mathbb{C}$) et ε un nombre réel strictement positif. Cette énergie est la fonctionnelle

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G (|u|^2 - 1)^2$$

définie pour des applications $u \in H^1(G, \mathbb{R}^2)$. Ils ont considéré le problème de minimisation

$$\min_{u \in H^1_g} E_\varepsilon(u)$$

avec

$$H^1_g = \left\{u \in H^1(G, \mathbb{R}^2);\ u = g \text{ sur } \partial G\right\}$$

où $g : \partial G \to \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$) est une application régulière.

L'importance de l'énergie de Ginzburg-Landau provient de son utilisation, à la fois théorique et expérimentale, dans la théorie de la matière condensée. Les fonctionnelles de la forme $E_\varepsilon(u)$ ont été introduites par V. Ginzburg et L. Landau dans l'étude des problèmes de transitions de

phases qui se produisent en supraconductivité ; des modèles similaires sont également utilisés dans l'étude des superfluides. La fonction inconnue u représente un paramètre d'ordre complexe qui, dans la littérature physique, est connu sous le nom de fonction d'onde de condensation ou "champ de Higgs" ; le paramètre ε, qui a la dimension d'une longueur, dépend du matériau et de sa température et est appelé longueur de cohérence (de Ginzburg-Landau). Certains résultats liés à ces domaines peuvent être observés par exemple dans [7], [11] et [18]. Les cristaux liquides manifestent plusieurs représentations visuelles des contraintes géométriques et des défauts topologiques. L'interaction entre l'orientation locale des molécules et la topologie de la surface (et éventuellement des conditions au bord) peut induire la formation de défauts topologiques, cela signifie de régions de changements rapides dans le champ directeur (voir e.g., [5] et [15]). En particulier, la courbure de la surface se manifeste dans l'expression de l'énergie renormalisée et joue le rôle d'un principe géométrique supplémentaire dans la localisation des défauts.
Par ailleurs, dans le cas d'un domaine multiplement connexe (c'est-à-dire connexe mais pas simplement connexe), la théorie de Hodge est très utile au moment d'étudier l'énergie renormalisée grâce à l'utilisation d'une technique appelée "décomposition de Hodge" (voir e.g., [12]).

Bethuel-Brezis-Hélein ont également effectué l'étude de l'existence des minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau dans le but d'étudier leur comportement lorsque le paramètre ε tends vers 0. Pour cela, ils ont utilisé le degré de Brouwer, défini comme

$$d = \deg(g, \partial G) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}$$

qui est responsable de la manifestation des effets de vortex comparables à ceux observés dans les supraconducteurs et qui, dans ce cas, joue un rôle important dans l'analyse asymptotique des u_ε. Dans le cas où le degré est nul on a que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$. Cela figure dans le lemme suivant (les démonstrations des deux lemmes suivants se trouvent dans la Première annexe 6.1).

Lemme 1 *On a* $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\deg(g, \partial G) = 0$.

Ce mémoire comprendra également des résultats pour le cas où G est multiplement connexe. On va considérer Γ_0 la composante extérieure de ∂G et Γ_l, $l = 1, \ldots, n$, les composantes intérieures de ∂G. Alors, en conformité avec le lemme précédent, on a le résultat suivant.

Lemme 2 *On a* $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $\deg(u, \Gamma_0) = \sum_{l=1}^{n} \deg(u, \Gamma_l)$.

Pour G simplement connexe, Bethuel-Brezis-Hélein ont démontré, dans le cas où le degré d est nul, que les minimiseurs u_ε de l'énergie de Ginzburg-Landau convergent vers l'application harmonique u_0 de G dans $\mathbb{S}^1$ qui est égale à g sur $\partial\Omega$. Cette convergence a lieu dans les espaces de Hölder $C^{1,\alpha}(\bar{G})$ pour tout $\alpha < 1$ et dans les espaces $C^k_{\text{loc}}(G)$ pour $k \geq 0$.

Dans le cas où le degré d est non nul on a que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) = \emptyset$. Pour traiter ce problème, on considère une pénalisation naturelle qui consiste à réaliser des petits trous ou "tourbillons" (aussi appelés vortex) $B_\rho(a_i)$ dans G ($B_\rho(a_i)$ est la boule ouvert avec centre a_i et rayon ρ positif) et considérer le domaine $G_\rho = G \setminus \bigcup_i \bar{B}_\rho(a_i)$. Ainsi, on obtient $H^1_g(G_\rho, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ de sorte qu'on peut considérer le problème

$$\min_{u \in H^1_g(G_\rho, \mathbb{S}^1)} \int_{G_\rho} |\nabla u|^2$$

et analyser ce qui se passe quand $\rho \to 0$.

L'objectif principal de ce travail est lié à l'extension de certains résultats obtenus dans [1], [7], [14], [17] et [18] au cas où le domaine n'est pas simplement connexe, afin de voir comment une topologie non triviale du domaine modifie l'expression des énergies renormalisées. Pour définir correctement l'énergie renormalisée, nous introduisons, pour une configuration donnée $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ de points différents dans G, la fonction

$$W_g(a_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log |a_i - a_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \phi \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^{d} d_i R(a_i)$$

où ϕ est la solution du problème linéaire de Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi = 2\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{d} d_i \delta_{a_i} & \text{dans } G \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

(ν est la normale extérieure à ∂G et τ est un vecteur tangent unitaire à ∂G tel que (ν, τ) est direct) et

$$R(x) = \phi(x) - \sum_{i=1}^{d} \log |x - a_i|.$$

Notons que $R \in C(\bar{G})$, de sorte que $R(a_i)$ a du sens (R est la partie régulière de la fonction ϕ). La fonction W est appelée énergie renormalisée (avec condition de Dirichlet). On verra dans les prochains chapitres que W est une fonction obtenue à partir de l'énergie de Ginzburg-Landau une fois retirée une quantité qui diverge (cette quantité est appelé "énergie du noyau").

Pour finir cette introduction, il est important de remarquer que les principaux objectifs de Bethuel-Brezis-Hélein obtenus en [1] sont de développer une théorie qui permette d'étudier l'existence des singularités qui apparaissent à cause des restrictions topologiques et de prédire leur positionnement sur un matériau, cette information peut être obtenue à travers de l'énergie renormalisée.

Chapitre 2

Énergie renormalisée de Dirichlet dans un domaine simplement connexe

Dans dans ce chapitre, on va obtenir l'énergie renormalisée associé au problème de Dirichlet dans un domaine simplement connexe. La technique qu'on va utiliser est basée sur les résultats présentées dans [1]. Tout d'abord, il est important d'inclure des résultats fondamentaux et très utiles pour l'étude et l'obtention de l'énergie renormalisée.

2.1 Résultats fondamentaux

Le résultat qu'on va présenter ci-dessous nous donne le lien entre les 1-formes exactes (utiles en pratique) et les 1-formes fermées (propriété facile à vérifier par un simple calcul de dérivée).

Lemme 3 (Lemme de Poincaré) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert simplement connexe. Alors toute 1-forme différentielle fermée de classe C^1 sur Ω est exacte.*

Preuve. Soit α un chemin fermé dans Ω. On a que α est homotopique (et grâce au théorème d'approximation de Whitney [1] α est régulière homotopique) à un chemin constant $\beta : [0,1] \to \Omega$ tel que $\beta(t) = x_0$. Après, si ω est une 1-forme fermée,

$$\int_{\operatorname{tr}\alpha} \omega = \int_{\operatorname{tr}\beta} = 0 \tag{2.1}$$

1. Pour une explication plus détaillée de ce résultat voir e.g., [19].

car $\operatorname{tr}\beta$ est de mesure nulle. On définit, pour $x \in \Omega$

$$f(x) = \int_{\gamma_{[a,x]}} \omega$$

avec $\gamma_{[a,x]}$ une chemin rectifiable qui commence en $a \in \Omega$ et se termine en Ω (nous supposons que Ω est connexe par arcs, sinon on applique ce résultat dans chaque composante connexe par arcs). Notons que, grâce à (2.1), $f(x)$ ne dépend pas du chemin $\gamma_{[a,x]}$. Maintenant, soient $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, et $t \in \mathbb{R}$, tels que

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\gamma_{[x,x+tv]}} \omega.$$

On identifie la 1-forme avec un champ vectoriel $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, ainsi

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\gamma_{[x,x+tv]}} F(u) \cdot du.$$

Si $|t| < \delta$ avec $\delta > 0$ assez petit, et comme Ω est ouvert, on peut supposer que $[x, x+tv] \subseteq \Omega$, de sorte qu'on considérant, pour $0 < s < t$, $u(s) = x + sv$ telle que $u'(s) = v$ et ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t F(u(s)) \cdot u'(s)\ ds \\
&= \left(\frac{d}{dt} \int_0^t F(x+sv) \cdot v\ ds \right) \Bigg|_{t=0} \\
&= F(x) \cdot v.
\end{aligned}$$

En prenant $v = e_i$, pour $i = 1, 2$, les vecteurs de la base canonique, on a $\nabla f = F$ et par conséquent ω est exacte car $\omega = df$. ∎

Avant de donner un résultat plus général basé sur le lemme précédent, il est important de noter que le lemme de Poincaré nous dit que, dans $\mathbb{R}^2$, si le rotationnel d'un champ de vecteurs est nul alors le champ est un gradient, et si la divergence d'un champ de vecteurs est nul alors c'est un gradient orthogonal, que l'on notera par $\nabla^\perp$ tout au long de ce document.

Lemme 4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et régulier (pas nécessairement simplement connexe) et D un champ vectoriel dans Ω tel que*

$$\operatorname{div} D = 0 \quad \textit{et} \quad \int_{\Gamma_i} D \cdot \nu = 0$$

pour chaque composante connexe Γ_i de $\partial\Omega$, $i = 1, \ldots, k$. Alors il existe une fonction H de Ω telle que

$$D = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right) = -\nabla^{\perp} H.$$

Preuve. Si Ω est simplement connexe, ce résultat est connu sous le nom de lemme de Poincaré qui a été énoncé et démontré dans le Lemme 3. Dans le cas d'un domaine général Ω on résout dans chaque domaine ω_i délimité par Γ_i, $i = 1, \ldots, k$, le problème

$$\begin{cases} \Delta w_i = 0 & \text{dans } \omega_i \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \nu} = D \cdot \nu & \text{sur } \partial\omega_i. \end{cases} \tag{2.2}$$

On définit le champ vectoriel

$$\tilde{D} = \begin{cases} D & \text{dans } \Omega \\ \nabla w_i & \text{dans } \omega_i, \ i = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{2.3}$$

Notons que le problème (2.2) a une solution unique à une constante additive près grâce à l'hypothèse $\displaystyle\int_{\Gamma_i} D \cdot \nu = 0$ (voir e.g., [8, Théorème 3.40]). Ainsi, dans Ω, $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$ directement par hypothèse. Dans ω_i pour $i = 1, \ldots, k$ on a que $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$, car $\operatorname{div}(\nabla w_i) = 0$; et sur chaque Γ_i on considère les conditions données dans (2.2), (2.3) et une fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} \int_G \tilde{D} \cdot \nabla\varphi &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\omega_i} \nabla w_i \cdot \nabla\varphi + \int_{\Omega} D \cdot \nabla\varphi = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial\omega_i} \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\varphi - \int_{\partial\Omega} D \cdot \nu\varphi \\ &= \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \nu} - D \cdot \nu \right) \varphi = 0. \end{aligned}$$

Donc, par le théorème de la divergence, $\operatorname{div} \tilde{D} = 0$ dans $G = \Omega \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \bar{\omega}_i \right)$ qui est simplement connexe. Après, par le Lemme 3, il existe $\tilde{H}$ telle que

$$\tilde{D} = \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_1} \right).$$

Pour conclure la preuve, il suffit de définir H comme la restriction de $\tilde{H}$ à Ω. ∎

Enfin, on a une application directe du Lemme 4 lorsque on veut obtenir le conjugué harmonique d'une fonction harmonique.

Corollaire 5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et régulier (pas nécessairement simplement connexe) et soit H une fonction harmonique dans Ω. H admet un conjugué harmonique si et seulement si $\displaystyle\int_{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0$ pour chaque composante connexe Γ_i de $\partial\Omega$, $i = 1, \ldots, k$.*

Preuve. La condition nécessaire est directe puisque, si H admet un conjugué harmonique dans Ω, on obtient

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial \nu} = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial H^\perp}{\partial \tau} = 0$$

(car l'intégrale sur une courbe fermé de la dérivée tangentielle d'une fonction est nulle) pour chaque composante connexe Γ_i de $\partial\Omega$, $i = 1, \ldots, k$.

Pour la condition suffisante, on va utiliser le Lemme 4 en considèrent $D = \nabla H$, ainsi on a $\mathrm{div}(\nabla H) = 0$ car H est une fonction harmonique, et par hypothèse

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0.$$

Donc H admet un conjugué harmonique dans Ω. ■

2.2 Étude de l'énergie renormalisée

Comme dans l'introduction, on considère $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, borné, régulière et simplement connexe. Soient $(a_1, \ldots, a_k) \in G$, $(d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{Z}$. On suppose $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Soit $\bar{\rho} = \sup\{\rho; B_\rho(a_i) \cap B_\rho(a_j) = \emptyset \text{ pour } i \neq j\}$. Pour $\rho < \bar{\rho}$ on définit

$$W_D^\rho = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)} |\nabla u|^2; u \in H^1(G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i), \mathbb{S}^1), \right.$$
$$\left. \mathrm{tr}_{|\partial G} u = g,\ \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i,\ i = 1, \ldots, k \right\}. \quad (2.4)$$

Notre objectif sera d'obtenir l'énergie renormalisée associée à W_D^ρ. Pour améliorer la notation, considérons les ensembles

$$\Omega_\rho = G \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\rho(a_i) \quad \text{et} \quad \Omega = G \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

On commencera par présenter un théorème très utile.

Théorème 6 *L'infimum est atteint en (2.4) par une solution unique à une phase près, i.e., si u_1 et u_2 sont deux minimiseurs, alors $u_1 = \alpha u_2$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| = 1$. De plus, on a*

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2$$

avec ϕ_ρ solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \Delta \phi_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \phi_\rho = cst. = C_i(\rho) & \text{sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \ldots, k \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i & i = 1, \ldots, k \\ \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial G} \phi_\rho = 0. & \end{cases} \tag{2.5}$$

Preuve. Soit $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ telle que $\mathrm{tr}_{|\partial G} u = g$ et $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Tout d'abord, on va montrer que

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Comme u prend des valeurs dans $\mathbb{S}^1$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0.$$

On considère le champ vectoriel

$$D = \left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}, u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}\right).$$

Comme ϕ_ρ est harmonique dans Ω_ρ,

$$\operatorname{div} D = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_2^2} = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$D \cdot \nu = -\left(u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}$$

où τ est le vecteur unitaire tangent à $\partial B_\rho(a_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ tel que (ν, τ) est direct. Ainsi, par la formule du degré

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} = 2\pi \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = 2\pi d_i$$

et par les conditions au bord de (2.5)

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i.$$

Donc, pour $i = 1, \ldots, k$,

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} D \cdot \nu = 0$$

et aussi, par les conditions au bord de (2.5), on obtient

$$\int_{\partial G} D \cdot \nu = 0.$$

Alors, par le Lemme 4, il existe H dans Ω_ρ telle que

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}, \end{cases} \tag{2.6}$$

de sorte que

$$|\nabla u|^2 = \left|u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 = |\nabla H|^2 + |\nabla \phi_\rho|^2 + 2\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right)$$

mais

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right) &= \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div}\left(H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, -H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}\right) = \int_{\partial G} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} - \int_{\partial B_\rho(a_i)} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} \\ &= -\int_{\partial G} \phi_\rho \frac{\partial H}{\partial \tau} - \int_{\partial B_\rho(a_i)} H\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} = 0 \end{aligned}$$

puisque, par (2.5), les ϕ_ρ sont constantes sur $\partial B_\rho(a_i)$ pour $i = 1, \dots, k$, et

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 0$$

sur ∂G. Donc

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla H|^2 + \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 \geq \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Maintenant, on va montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ telle que $\mathrm{tr}_{|\partial G} u = g$, $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ pour $i = 1, \dots, k$ et

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Pour cela on va trouver une fonction u qui satisfait

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{2.7}$$

D'une façon générale, on peut considérer le système

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & F_1 \quad \text{dans } \Omega_\rho \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & F_2 \quad \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases} \tag{2.8}$$

Ce problème a une solution $u : \Omega_\rho \to \mathbb{S}^1$ si et seulement si

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \tag{2.9}$$

et

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau \in 2\pi\mathbb{Z}$$

pour chaque composante connexe Γ_i de $\partial \Omega_\rho$. Puisque si on dérive partiellement par rapport à x_2 la première équation et par rapport à x_1 la deuxième équation de (2.7), on obtient

$$-\frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_2^2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \times \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$$

et

$$-\frac{\partial^2 \phi_\rho}{\partial x_1^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + u \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1},$$

comme ϕ_ρ est une fonction harmonique dans Ω_ρ et en utilisant (2.8), on obtient (2.9). En plus, par le problème (2.5)

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} F\cdot\tau = \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i$$

avec $d_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 1, \ldots, k$. Par ailleurs, on peut considérer localement $u = e^{i\psi}$ avec ψ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & = & F_1 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} & = & F_2 \end{cases}$$

qui a une solution locale par (2.9). Pour l'unicité, si on considère deux solutions locales de (2.8) u_1 et u_2, alors $u_1 = \alpha u_2$ où α est une constante complexe avec $|\alpha| = 1$. Ensuite, la solution locale ψ est continuée globalement car on peut intégrer sur des chemins. Ces intégrales peuvent varier, mais cette variation est $2\pi\mathbb{Z}$, et ainsi $u = e^{i\psi}$ est bien défini à une constante près.

Après, par (2.7) on peut trouver $v \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ telle que $\mathrm{tr}_{|\partial G} v = g$, $\deg(v, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, k$ et

$$\begin{cases} v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} \\ v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}. \end{cases}$$

Alors pour cette fonction v on a

$$v \times \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad \text{dans } \partial G$$

d'où il résulte que $v = \alpha g$ sur ∂G, où α est une constante complexe avec $|\alpha| = 1$. Donc la fonction $u = \alpha^{-1} v$ satisfait toutes les conditions. ■

Maintenant, on va présenter le résultat de convergence nécessaire pour montrer le théorème de l'énergie renormalisée associe au problème de Dirichlet simplement connexe. Le lemme suivant est fondamental pour montrer la convergence de ϕ_ρ vers une fonction ϕ_0, quand $\rho \to 0$, avec ϕ_0 solution d'un problème qui sera présenté ci-dessous.

Lemme 7 *Soit v une fonction qui satisfait le problème*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{dans } \Omega_\rho \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \textit{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \textit{pour } i = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{2.10}$$

Alors

$$\sup_{\Omega_\rho} v - \inf_{\Omega_\rho} v \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right). \tag{2.11}$$

Preuve. Considérons l'intervalle $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ avec $\alpha_i = \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v$ et $\beta_i = \sup_{\partial B_\rho(a_i)} v$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Prouvons d'abord que $\bigcup_{i=1}^{k} I_i$ est connexe. On suppose, par contradiction, que ce n'est pas vrai. Alors, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $1 \leq n < k$ tels que (après avoir réétiqueté les intervalles)

$$\beta_i \leq t_0 - \delta \quad \text{si } i = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq t_0 + \delta \quad \text{si } i = n+1, \ldots, k$$

pour un certain $\delta > 0$. Sans perte de généralité, on suppose que $t_0 \neq 0$, i.e. on prend $t_0 > 0$. Ainsi, on peut supposer que $t_0 - \delta \geq 0$. Considérons une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 - \delta \\ 1 & \text{si } t \geq t_0 + \delta \end{cases}$$

et $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Multiplions $\Delta v = 0$ par $\theta(v)$ et après intégrons sur Ω_ρ,

$$0 = -\int_{\Omega_\rho} (\Delta v)\theta(v) = \int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 - \int_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v) + \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v),$$

mais $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sur ∂G, $\theta(v)$ est constante (0 ou 1) sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$ et

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, k.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 = 0$$

et donc $\nabla v = 0$ dans l'ensemble $B = \{x \in \Omega_\rho : t_0 - \delta < v(x) < t_0 + \delta\}$ ce qui est une contradiction, car on a que v est localement constante dans B et alors v peut prendre au plus une quantité dénombrable de valeurs entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$. Par ailleurs, Ω_ρ est connexe et v est une fonction continue, donc v peut prendre tous les valeurs entre $\inf_{\Omega_\rho} v$ et $\sup_{\Omega_\rho} v$ (l'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe). En particulier, v prend toutes les valeurs entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$. Donc nous concluons que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} I_i$ est connexe.

Maintenant on va prouver l'inégalité (2.11). Comme $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} I_i$ est connexe, son maximum et son minimum sont atteints, ainsi par le principe du maximum

$$\max_{1\le i\le k} \beta_i - \min_{1\le i\le k} \alpha_i \le \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i)$$

après, en ajoutant une constante à v on peut toujours supposer que $\displaystyle\min_{1\le i\le k} \alpha_i = 0$. On prend $A = \displaystyle\max_{1\le i\le k} \beta_i$. En multipliant l'équation $\Delta v = 0$ par $(v - A)^+$ et en intégrant sur Ω_ρ on a (en considérant que $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sur ∂G)

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla (v - A)^+|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} (v - A)^+ = 0$$

mais $(v - A)^+ = 0$ sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$ et donc $(v - A)^+ = 0$ dans Ω_ρ, c'est à dire, $v \le A$ dans Ω_ρ. De la même manière $v^- = 0$ sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$ et donc $v \ge 0$ dans Ω_ρ. Ainsi on a

$$\inf_{\Omega_\rho} v = 0$$

et

$$\sup_{\Omega_\rho} v \le A = \max_{1\le i\le k} \beta_i \le \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right).$$

Ce qui conclut la preuve. ■

Lemme 8 *On a que $\phi_\rho \to \phi_0$ uniformément quand $\rho \to 0$, avec ϕ_0 solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta\phi_0 = \sum_{i=1}^{k} 2\pi d_i \delta_{a_i} & \textit{dans } G \\ \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g \times \dfrac{\partial g}{\partial \tau} & \textit{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial G} \phi_0 = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où δ est la fonction delta de Dirac. Plus précisément, on a

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 7 avec $v = \phi_\rho - \phi_0$ dans Ω_ρ et comme ϕ_ρ est constante sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$, pour $i = 1, \ldots, k$, on obtient grâce au principe du maximum

$$\sup_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) - \inf_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0 - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0 \right) \leq C\rho.$$

Par ailleurs, grâce aux conditions au bord de (2.5) et (2.12) on obtient

$$\int_{\partial G} (\phi_\rho - \phi_0) = 0$$

ainsi, il y a un point dans ∂G tel que $\phi_\rho - \phi_0 = 0$. Donc

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

■

A travers du théorème ci-dessous, on va présenter l'obtention de l'énergie renormalisée associé au problème de Dirichlet simplement connexe.

Théorème 9 *Soit*

$$R_0(x) = \phi_0(x) - \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x - a_j| \tag{2.13}$$

telle que R_0 est une fonction harmonique régulière dans G (R_0 est la partie régulière de la fonction

ϕ_0) où ϕ_0 est la solution du problème (2.12). Alors, quand ρ tend vers 0, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + W_D(a_i, d_i) + O(\rho)$$

avec u_ρ l'application harmonique à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ associée à ϕ_ρ (ϕ_ρ est la solution de (2.5)) et

$$W_D(a_i, d_i) = -\pi \sum_{i\neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i R_0(a_i).$$

C'est important de remarquer que W_D est indépendant de ρ et ne dépend que de G, a_i, d_i et g. De plus, $O(\rho)$ représente une quantité X telle que $|X| \leq C\rho$ où C ne dépend que de G, a_i, d_i et g.

Preuve. En considérant les arguments de la preuve du Théorème 6 on sait que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Grâce aux conditions au bord de (2.5), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_\rho \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_\rho(\partial B_\rho(a_i)).\end{aligned}$$

Par le Lemme 8, pour $C > 0$, $\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho$, donc

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_0(x_i) + O(\rho)$$

où x_i est un point de $\partial B_\rho(a_i)$. Maintenant, à l'aide de (2.13) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(R_0(x_i) + \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x_i - a_j|\right) + O(\rho) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(R_0(a_i) + \sum_{j\neq i} d_j \log|a_i - a_j| - d_i \log\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \\ &\quad + O(\rho)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \phi_0 \left(g \times \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i R_0(a_i) - \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log |a_i - a_j|$$

$$+ \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2 \right) \log \left(\frac{1}{\rho} \right) + O(\rho).$$

Après, en considérant la définition de $W_D(a_i, d_i)$, on peut conclure la preuve. ■

2.3 Un résultat de convergence

On va montrer un résultat de convergence du minimiseur u_ρ pour le problème de minimisation W_D^ρ.

Théorème 10 *Soit u_ρ un minimiseur pour le problème de minimisation W_D^ρ. Quand ρ tend vers 0, u_ρ converge vers u_0 uniformément dans tout ensemble compact de $\Omega \cup \partial G$.*

Preuve. Par le lemme 8 et des estimations elliptiques (voir e.g., [6], Chapitre 6) on a

$$\phi_\rho \longrightarrow \phi_0 \quad \text{dans } C^\infty_{\text{loc}}(\Omega).$$

De plus, pour chaque $k \geq 0$

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{C^k(K)} \leq C\rho$$

pour tout compact K dans $\Omega \cup \partial G$. Rappelons que, par les arguments du théorème 6, on a

$$\begin{cases} u_\rho \times \dfrac{\partial u_\rho}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega_\rho \\ u_\rho \times \dfrac{\partial u_\rho}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega_\rho \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \phi_0}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega \\ u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \phi_0}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Donc

$$\|u_\rho - u_0\|_{C^k(K)} \leq C\rho.$$

Maintenant, si on travaille localement dans $\Omega_\rho \cup \partial G$, on peut écrire $u_\rho = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [0, 2\pi]$. Alors, en considérant les arguments de la preuve du Théorème 6, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega_\rho \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases}$$

Donc, quitte à considérer une suite extraite, φ converge dans $C^k_{\text{loc}}(\Omega \cup \partial G)$. Ainsi, quitte à considérer une suite extraite, u_ρ converge vers u_0 dans $C^k_{\text{loc}}(\Omega \cup \partial G)$. Si on considère $g_\rho = u_{\rho|_{\partial G}}$, on a que g_ρ converge vers g_0 et u_0 satisfait

$$\begin{cases} u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \phi_0}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega \\ u_0 \times \dfrac{\partial u_0}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \phi_0}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega \\ u_0 = g_0 & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

ce qui signifie que u_0 est une application harmonique canonique. Maintenant considérons deux suites u_{ρ_1} et u_{ρ_2} telles que $u_{\rho_1} \to u_1$ et $u_{\rho_2} \to u_2$, avec u_1 et u_2 deux applications harmoniques canoniques. Alors, localement

$$\varphi_{\rho_1} \to \varphi_1 \quad \text{et} \quad \varphi_{\rho_2} \to \varphi_2.$$

Ainsi $\nabla \varphi_1 = \nabla \varphi_2$, donc φ_1 et φ_2 localement sont égaux à une constante positive près, et donc u_1 et u_2 localement sont égaux à une constante multiplicative près avec module 1. Après, par la connexité de Ω, cette constante est globale. ■

Chapitre 3

Énergie renormalisée de Neumann dans un domaine simplement connexe

Dans ce chapitre on utilisera les idées exposées dans [14], [17] et [18] et comme dans la partie précédente on considère $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, borné, régulière et simplement connexe. Soient $(a_1, \ldots, a_k) \in G$ et $(d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{Z}$. On suppose $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$ et rappelons que, pour $\bar{\rho} = \sup\{\rho; B_\rho(a_i) \cap B_\rho(a_j) = \emptyset \text{ pour } i \neq j\}$, on considère $\rho < \bar{\rho}$. Avec la notation $\Omega_\rho = G \backslash \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$, on définit

$$W_N^\rho = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2; u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1),\ \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i,\ i = 1, \ldots, k \right\}. \tag{3.1}$$

Considérons $\hat{\phi}_\rho$ solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi}_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \hat{\phi}_\rho = \text{cst.} = C_i(\rho) & \text{sur chaque } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \ldots, k \\ \hat{\phi}_\rho = 0 & \text{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i & \text{pour } i = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{3.2}$$

On va démontrer maintenant un résultat analogue au Théorème 6.

Théorème 11 *L'infimum est atteint en (3.1) par une solution unique à une phase près. De plus,* *on a*

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2$$

avec $\hat{\phi}_\rho$ solution du problème linéaire (3.2).

Preuve. Soit $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$. En première instance on va montrer que

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 \geq \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2.$$

Pour cette partie on suivra un raisonnement analogue que dans le Théorème 6, on considère le champ vectoriel

$$D = \left(-u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1}, u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} \right)$$

tel qu'on obtient

$$D \cdot \nu = -\left(u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu}$$

où τ est le vecteur unitaire tangent à $\partial B_\rho(a_i)$ pour $i = 1, \dots, k$ tel que (ν, τ) est direct. Ainsi, par (3.2), on a, pour $i = 1, \dots, k$,

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} D \cdot \nu = 0.$$

Alors, par le Lemme 4, il existe H dans Ω_ρ telle que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1}, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

telle que

$$|\nabla u|^2 = \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 = |\nabla H|^2 + |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2 + 2 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1} \right)$$

mais en utilisant le même raisonnement que pour la preuve du Théorème 6

$$\int_{\Omega_\rho} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1} \right) = \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div} \left(H \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2}, -H \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1} \right) = 0$$

puisque, par (3.2), les $\hat{\phi}_\rho$ sont constantes sur $\partial B_\rho(a_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $\hat{\phi}_\rho = 0$ sur ∂G. Donc

$$\int_{\tilde{\Omega}_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\tilde{\Omega}_\rho} |\nabla H|^2 + \int_{\tilde{\Omega}_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2 \geq \int_{\tilde{\Omega}_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2.$$

Maintenant on va montrer qu'il existe $u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1)$ telle que $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, k$ et

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2.$$

On va trouver une fonction u qui satisfait

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{3.4}$$

D'une façon générale, on peut considérer le système

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & F_1 \quad \text{dans } \Omega_\rho \\[2ex] u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & F_2 \quad \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases} \tag{3.5}$$

Comme dans la preuve du Théorème 6, ce problème a une solution $u : \Omega_\rho \to \mathbb{S}^1$ si et seulement si

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \tag{3.6}$$

et

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau \in 2\pi\mathbb{Z}$$

pour $i = 1, \ldots, k$. En plus, par le problème (3.2) on a

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} F \cdot \tau = \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i$$

et $d_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 1, \ldots, k$. Par ailleurs, on peut considérer localement $u = e^{i\psi}$ avec ψ solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & = & F_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} & = & F_2 \end{cases}$$

qui a une solution locale par (3.6). Pour l'unicité, si nous considérons deux solutions locales de (3.5) u_1 et u_2, alors $u_1 = \alpha u_2$ où α est une constante complexe avec $|\alpha| = 1$. Ensuite, la solution locale ψ est continuée globalement car on peut intégrer sur des chemins. Ces intégrales peuvent varier, mais cette variation est $2\pi\mathbb{Z}$, et ainsi $u = e^{i\psi}$ est bien définie à une constante près. Finalement, par (3.4) on a

$$\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = \int_{\partial B_\rho(a_i)} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} = \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu} = d_i$$

pour $i = 1, \ldots, k$. ■

Maintenant, on va montrer deux lemmes nécessaires pour traiter l'obtention de l'énergie renormalisée associée à W_N^ρ. Ces lemmes sont analogues aux Lemmes 7 et 8 et leurs démonstrations se trouvent dans la Deuxième annexe 6.2. Il est également important de noter qu'une version plus faible et aussi utile du lemme suivant se trouve dans la Deuxième annexe 6.2.

Lemme 12 *Soit v solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ v = 0 & \text{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Alors, en notant $\Omega_\rho = G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$, on obtient

$$\sup_{\Omega_\rho} v - \inf_{\Omega_\rho} v \leq \sum_{i=1}^k \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right).$$

Lemme 13 *$\hat{\phi}_\rho$ converge vers $\hat{\phi}_0$ quand $\rho \to 0$, avec $\hat{\phi}_0$ solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi}_0 = 2\pi \displaystyle\sum_{i=1}^k d_i \delta_{a_i} & \text{dans } G \\ \hat{\phi}_0 = 0 & \text{sur } \partial G \end{cases} \tag{3.7}$$

où δ est la fonction delta de Dirac. Plus précisément, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

On démontre directement le corollaire suivant en utilisant le Lemme 13 et des estimations elliptiques.

Corollaire 14 *$\hat{\phi}_\rho$ converge vers $\hat{\phi}_0$ dans $C^k_{loc}(\Omega \cup \partial G)$ quand $\rho \to 0$, pour chaque $k \geq 0$.*

Enfin à travers du théorème ci-dessous, on va présenter l'obtention de l'énergie renormalisée pour le problème de Neumann simplement connexe.

Théorème 15 *Soit*

$$\hat{R}_0(x) = \hat{\phi}_0(x) - \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x - a_j| \tag{3.8}$$

telle que $\hat{R}_0$ est une fonction harmonique régulière dans G (ϕ_0 est solution du problème (3.7)). Alors, quand $\rho \to 0$,

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + W_N(a_i, d_i) + O(\rho)$$

avec $\hat{u}_\rho$ l'application harmonique à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ associé à $\hat{\phi}_\rho$ ($\hat{\phi}_\rho$ est solution de (3.2)), et

$$W_N(a_i, d_i) = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i \hat{R}_0(a_i).$$

C'est important de remarquer que W_N est indépendant de ρ et ne dépend que de a_i et d_i. De plus, $O(\rho)$ représente une quantité X telle que $|X| \leq C\rho$ où C ne dépend que de a_i et d_i.

Preuve. En considérant les arguments de la preuve du Théorème 11 on sait que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2.$$

Grâce aux conditions au bord de (3.2),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{\phi}_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\partial G} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu}\hat{\phi}_\rho - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial \nu}\hat{\phi}_\rho \\ &= -\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \hat{\phi}_\rho(\partial B_\rho(a_i)).\end{aligned}$$

Par le Lemme 13, pour $C > 0$, $\|\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho$, donc

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 = -\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \hat{\phi}_0(x_i) + O(\rho)$$

où x_i est un point de $\partial B_\rho(a_i)$. Maintenant, en utilisant (3.8), on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \hat{u}_\rho|^2 &= -\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(\hat{R}_0(x_i) + \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x_i - a_j| \right) + O(\rho) \\
&= -\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left(\hat{R}_0(a_i) + \sum_{j \neq i} d_j \log|a_i - a_j| - d_i \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) + O(\rho) \\
&= -\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \hat{R}_0(a_i) - \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2 \right) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + O(\rho).
\end{aligned}$$

Finalement en considérant la définition de $W_N(a_i, d_i)$ on peut conclure la preuve. ■

3.1 Un résultat de convergence

On va montrer un résultat de convergence du minimiseur $\hat{u}_\rho$ pour le problème de minimisation W_N^ρ.

Théorème 16 *Soit $\hat{u}_\rho$ un minimiseur du problème de minimisation W_N^ρ. Alors, pour chaque $k \geq 0$, $\hat{u}_\rho$ converge vers $\hat{u}_0$ dans $C^k_{loc}(\Omega \cup \partial G)$ quand $\rho \to 0$, avec $\hat{u}_0$ une application harmonique. De plus, il y a unicité des limites de deux suites à une constante multiplicative de module 1 près.*

Preuve. En considérant le cas local dans $\Omega_\rho \cup \partial G$, on peut écrire $\hat{u}_\rho = e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [0, 2\pi]$. Alors, grâce aux arguments de la preuve du Théorème 6, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega_\rho \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \hat{\phi}_\rho}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases}$$

Donc, quitte à considérer une suite extraite, φ converge dans $C^k_{\text{loc}}(\Omega \cup \partial G)$. Ainsi, quitte à considérer une suite extraite, $\hat{u}_\rho$ converge vers $\hat{u}_0$ dans $C^k_{\text{loc}}(\Omega \cup \partial G)$.

Maintenant considérons deux suites $\hat{u}_{\rho_1}$ et $\hat{u}_{\rho_2}$ telles que $\hat{u}_{\rho_1} \to \hat{u}_1$ et $\hat{u}_{\rho_2} \to \hat{u}_2$, avec $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$

deux applications harmoniques. Alors, localement

$$\varphi_{\rho_1} \to \varphi_1 \qquad \text{et} \quad \varphi_{\rho_2} \to \varphi_2.$$

Ainsi $\nabla\varphi_1 = \nabla\varphi_2$, donc φ_1 et φ_2 localement sont égaux à une constante positive près, et donc $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ localement sont égaux à une constante multiplicative de module 1 près. Après, par la connexité de Ω, cette constante est globale.

$\blacksquare$

Chapitre 4

Énergie renormalisée de Neumann dans un domaine multiplement connexe

Pour cette partie on suppose G multiplement connexe dans $\mathbb{R}^2$. On veut trouver une formule pour l'énergie renormalisée avec des conditions de type Neumann. Ce cas, contrairement au précédent, présente un problème auxiliaire associé à la fonction ϕ_ρ avec des conditions au bord qui ne sont pas nulles, de sorte qu'on rencontre des difficultés au moment où on veut prouver un résultat analogue au Lemme 13. On utilisera alors une nouvelle technique.

Soient Γ_0 la composante extérieure de ∂G et Γ_l, $l = 1, \ldots, n$ ses composantes intérieures. On considère le problème de minimisation

$$W_N^\rho = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2; \quad u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1), \quad \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i, \quad i = 1, \ldots, k \right\}$$

avec $\Omega_\rho = G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$. Il est important de noter qu'on n'a imposé les degrés que sur les bords des boules. On considère aussi ϕ_l la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \phi_l = 0 & \text{dans } G \\ \phi_l = \delta_{jl} & \text{sur } \Gamma_j, \; j = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \tag{4.1}$$

avec δ_{jl} le symbole de Kronecker. $G_0(x, a)$ la fonction de Green pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta G_0 = 2\pi \delta_a & \text{dans } G \\ G_0 = 0 & \text{sur } \partial G, \end{cases} \tag{4.2}$$

et H_0 la partie régulière de G_0, i.e.

$$H_0(x,a) := \log \frac{1}{|x-a|} - G_0(x,a). \tag{4.3}$$

Soit u_ρ un minimiseur pour le problème W_N^ρ, alors en considérant les arguments de la preuve du Théorème 11, on a

$$W_N^\rho = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2$$

où ϕ_ρ est la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \phi_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \phi_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \phi_\rho = cst. = C_i(\rho) & \text{sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1,\dots,k \\ \phi_\rho = cst. = \tilde{C}_l(\rho) & \text{sur } \Gamma_l,\ l = 1,\dots,n \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i & i = 1,\dots,k. \end{cases} \tag{4.4}$$

On considère l'ensemble

$$V = \big\{\varphi \in H^1(\Omega_\rho,\mathbb{R});\ \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0,\ \varphi = \text{cst. sur } \partial B_\rho(a_i),\ i=1,\dots,k, \text{ et } \varphi = \text{cst. sur } \Gamma_l,\ l = 1,\dots,n\big\}.$$

Lemme 17 *La solution ϕ_ρ du problème (4.4) est obtenue comme le minimiseur de*

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \varphi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \varphi_{|\partial B_\rho(a_i)}$$

dans l'ensemble V.

Preuve. En effet, commençons par multiplier l'équation (4.4) par $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\rho)$, on intègre sur Ω_ρ et après on utilise la formule de Green,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega_\rho} \varphi \Delta \phi_\rho &= -\int_{\Omega_\rho} \nabla\varphi \nabla\phi_\rho + \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} - \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \varphi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} - \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \varphi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} \\ &= -\int_{\Omega_\rho} \nabla\varphi\nabla\phi_\rho - 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \varphi_{|\partial B_\rho(a_i)}, \end{aligned}$$

d'où, on définit la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega_\rho) \times H^1(\Omega_\rho) \to \mathbb{R}$ telle que $a(\varphi, \phi_\rho) = \int_{\Omega_\rho} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi_\rho$ et la forme linéaire $L : H^1(\Omega_\rho) \to \mathbb{R}$ telle que $L(\varphi) = -2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \varphi_{|\partial B_\rho(a_i)}$. Maintenant on utilise la dérivée de Fréchet. On note que

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla\varphi|^2 + 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \varphi_{|\partial B_\rho(a_i)} = \frac{1}{2}a(\varphi, \varphi) + L(\varphi).$$

Après, pour $\theta \in V$

$$DF(\varphi)(\theta) = a(\varphi, \theta) + L(\theta),$$

notons que $DF(\varphi)(\theta) = 0$ si et seulement si $a(\varphi, \theta) + L(\theta) = 0$, pour $\theta \in V$. C'est-à-dire, φ est l'unique solution de

$$a(\varphi, \theta) + L(\theta) = 0, \quad \text{pour } \theta \in V$$

qui est précisément la formulation variationnelle du problème (4.4). Ainsi, φ est l'unique solution du problème (4.4). Maintenant F est convexe car est une fonctionnelle quadratique. Alors ϕ_ρ est un minimum global de F, c'est-à-dire, $DF(\phi_\rho) = 0$ et ainsi ϕ_ρ est l'unique solution de (4.4).

$\blacksquare$

Le résultat précèdent nous permet d'obtenir la solution ϕ_ρ comme une minimiseur de F. Avec la méthode directe on va montrer l'existence du minimiseur. Pour cela, prouvons d'abord que la fonctionnelle F est minorée. On va utiliser l'inégalité suivante qui découle du théorème de trace, pour $\varphi \in H^1(\Omega_\rho)$:

$$|\varphi_{|\partial\Omega_\rho}| \leq C\|\varphi\|_{H^1(\Omega_\rho)}. \tag{4.5}$$

On remarque aussi que tout $\phi \in V$ peut être prolongé en $\tilde{\varphi} \in H_0^1(G)$ en posant $\tilde{\varphi}_{|\partial B_\rho(a_i)} = cst. = \tilde{\varphi}_{|\Gamma_l}$ pour $l = 1, \dots, n$. On a alors

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega_\rho)} \leq \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(G)} < \infty \quad \text{et} \quad \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\rho)} = \|\nabla\tilde{\varphi}\|_{L^2(G)}.$$

Maintenant on peut appliquer l'inégalité de Poincaré pour $\tilde{\varphi}$, ainsi

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega_\rho)} \leq C\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega_\rho)},$$

en utilisant l'inégalité (4.5), on a

$$F(\varphi) \geq \frac{1}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} - C\|\varphi\|_{H^1(\Omega_\rho)}$$

et enfin (en renommant la constante C)

$$F(\varphi) \geq \frac{1}{2C^2}\|\varphi\|^2_{H^1(\Omega_\rho)} - C\|\varphi\|_{H^1(\Omega_\rho)}$$

donc F est minorée. On considère maintenant une suite minimisante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F, c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = \inf_{\varphi\in V} F(\varphi)$. Comme pour a assez grand on a $F(\varphi_n) \leq a$, on déduit à partir de l'inégalité précédente que la suite (φ_n) est borné en norme H^1. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite minimisante, on peut supposer que (φ_n) converge faiblement vers φ dans H^1. Comme F est convexe et continue, F est faiblement s.c.i. et,

$$F(\varphi) \leq \liminf_{n\to\infty} F(\varphi_n).$$

Donc φ est bien un minimum de F.
Par ailleurs, pour l'unicité on va utiliser la convexité stricte de F. En effet $x \mapsto |x|^2$ est strictement convexe et donc le premier terme de F l'est aussi. Le deuxième terme est linéaire. On considère maintenant φ et ψ deux fonctions distincts de V telles que réalisent le minimum F sur V, alors $\frac{\varphi+\psi}{2} \in V$ et $F(\frac{\varphi+\psi}{2}) < \inf_{v\in V} F(v)$, ce qui est absurde. Donc on conclut la preuve.

Maintenant on va considérer $\varphi_{i,\rho}$ pour $i = 1, \ldots, k$ la solution du problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{i,\rho} = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \dfrac{\partial\varphi_{i,\rho}}{\partial\nu} = -\dfrac{(x-a_i)^\perp\cdot\nu}{|x-a_i|^2} & \text{sur } \Gamma_l,\ l = 0, 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial\varphi_{i,\rho}}{\partial\nu} = -\dfrac{(x-a_i)^\perp\cdot\nu}{|x-a_i|^2} & \text{sur } B_\rho(a_j),\ j = 1, \ldots, k \\ \displaystyle\int_{\Omega_\rho} \varphi_{i,\rho} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $x^\perp = (-x_2, x_1)$.

Lemme 18 *La solution $\varphi_{i,\rho}$ de (4.6) admet un conjugué harmonique $\varphi_{i,\rho}^{\perp}$ dans Ω_ρ vérifiant*

$$\begin{cases} \Delta\varphi_{i,\rho}^{\perp} = 0 & \textit{dans } \Omega_\rho \\ \varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = cst. & \textit{sur } \partial B_\rho(a_j),\ j = 1, \dots, k \\ \varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = C_{l,\rho}(a_i) & \textit{sur } \Gamma_l,\ l = 1, \dots, n \\ \varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = 0 & \textit{sur } \Gamma_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Preuve. On peut voir que $\displaystyle\int_{\Gamma_l} \frac{\partial \varphi_{i,\rho}}{\partial \nu} = 0$, pour $l = 1, \dots, n$ car l'intégrale sur une courbe fermée de la dérivée tangentielle d'une fonction est nulle. Donc, par le Corollaire 5 on a que $\varphi_{i,\rho}^{\perp}$ est bien définie dans Ω_ρ. Maintenant on a que $\varphi_{i,\rho}^{\perp}$ satisfait les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_{i,\rho}^{\perp}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \varphi_{i,\rho}}{\partial x_1} & \text{dans } \Omega_\rho \\ \dfrac{\partial \varphi_{i,\rho}^{\perp}}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial \varphi_{i,\rho}}{\partial x_2} & \text{dans } \Omega_\rho \end{cases} \tag{4.8}$$

de sorte que, sur chaque Γ_l, on a

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\log \frac{1}{|x - a_i|}\right) = -\frac{(x - a_i) \cdot \tau}{|x - a_i|^2} = \frac{(x - a_i)^{\perp} \cdot \nu}{|x - a_i|^2} = -\frac{\partial \varphi_{i,\rho}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi_{i,\rho}^{\perp}}{\partial \tau},$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varphi_{i,\rho}^{\perp} + \log \frac{1}{|x - a_i|}\right) = 0.$$

Alors, il existe un nombre $C_{l,\rho}(a_i)$ de manière que sur chaque Γ_l on obtient

$$\varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = C_{l,\rho}(a_i). \tag{4.9}$$

Comme le conjugué harmonique est unique à une constante additive près, on peut imposer la condition $C_{0,\rho}(a_i) = 0$ et ainsi, sur Γ_0, on obtient

$$\varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = 0.$$

De manière analogue, sur chaque $\partial B_\rho(a_j)$, on obtient

$$\varphi_{i,\rho}^{\perp} - \log|x - a_i| = \text{cst}.$$

Donc $\varphi_{i,\rho}^{\perp}$ vérifie (4.7) pour $l = 1, \ldots, n$. ■

Ensuite, on a que ϕ_ρ s'écrit comme

$$\phi_\rho = \sum_{i=1}^{k} d_i \log \frac{1}{|x - a_i|} + \sum_{i=1}^{k} d_i \varphi_{i,\rho}^{\perp} \tag{4.10}$$

puisque, en utilisant les conditions aux bords des problèmes (4.4) et (4.7), dans Ω_ρ on obtient $\Delta\phi_\rho = 0$, sur Γ_0 on a $\phi_\rho = 0$, sur $\partial B_\rho(a_i)$ et sur Γ_l on a $\phi_\rho = \text{cst.}$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $l = 1, \ldots, n$. Maintenant, on va obtenir un résultat de convergence qui va remplacer le Lemme 13 pour le cas de Neumann simplement connexe en utilisant des nouvelles idées présentées dans [15]. On va montrer que $\varphi_{i,\rho}^{\perp} \to \varphi_i^{\perp}$ localement uniformément dans G quand $\rho \to 0$. Pour cela, considérons l'ensemble

$$W_{N'}^{\rho} = \inf\Bigg\{ \frac{1}{2} \int_{G \setminus \cup_{i=1}^{k} B_\rho(a_i)} |\nabla u|^2 ; u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1), \\ u = \left(\frac{x - a_i}{|x - a_i|} \right)^{d_i} \text{ sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \ldots, k \Bigg\}$$

de sorte que $W_N^\rho < W_{N'}^\rho$. Regardons maintenant des propriétés de monotonie à travers du lemme suivant.

Lemme 19 *On considère $k \in \mathbb{N}$. Soient $(a_i, \ldots, a_k) \in G$, $(d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{Z}$ et $\bar{\rho} = \sup\{\rho;\ B_\rho(a_i) \cap B_\rho(a_j) = \emptyset,\ \text{pour tout } i \neq j\}$ telle que $\rho < \bar{\rho}$. Alors, en considérant la définition de $W_{N'}^\rho$:*

(i) la fonction

$$\rho \in (0, \bar{\rho}) \longmapsto W_{N'}^{\rho} - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

est croissante, et

(ii) la fonction

$$\rho \in (0, \bar{\rho}) \longmapsto W_{N}^{\rho} - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

est décroissante.

Preuve. Pour le premier point on va considérer $0 < \rho < \sigma$, pour $u \in H^1\left(G \setminus \cup_{i=1}^k B_\sigma(a_i), \mathbb{S}^1\right)$ telle que $u = \left(\frac{x-a_i}{|x-a_i|}\right)^{d_i}$, pour $i = 1, \ldots, k$, on définit la fonction $v : G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i) \to \mathbb{S}^1$ telle que, pour $x \in G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$, on a

$$v(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-a_i}{|x-a_i|}\right)^{d_i} & \text{si } x \in B_\sigma(a_i) \setminus B_\rho(a_i),\ i = 1, \ldots, k \\ u(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors en utilisant les coordonnées polaires centrées sur a_i pour $i = 1, \ldots, k$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{B_\sigma(a_i)\setminus \bar{B}_\rho(a_i)} |\nabla v|^2 &\geq \sum_{i=1}^k \int_\rho^\sigma \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_i} \left|\frac{\partial v}{\partial \theta_i}\right|^2 d\theta_i\, dr_i \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^k \int_\rho^\sigma \frac{1}{r_i} \left|\int_0^{2\pi} \left(v \times \frac{\partial v}{\partial \theta_i}\right)\right|^2 d\theta_i\, dr_i \\ &\geq \sum_{i=1}^k \int_\rho^\sigma (2\pi d_i^2) \frac{1}{r}\, dr = 2\pi \sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{\sigma}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, considérant σ assez petit tel que les boules $\bar{B}_\sigma(a_i)$ sont disjointes et sont dans G et par l'additivité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k \bar{B}_\rho(a_i)} |\nabla v|^2 &= \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k \bar{B}_\sigma(a_i)} |\nabla v|^2 - \frac{1}{2} \int_{\cup_{i=1}^k (B_\sigma(a_i)\setminus \bar{B}_\rho(a_i))} |\nabla v|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k \bar{B}_\sigma(a_i)} |\nabla u|^2 - \pi \sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{\sigma}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Ce qui conclut le premier résultat. Pour le deuxième point on considère aussi $0 < \rho < \sigma$ et $u \in H^1\left(G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i), \mathbb{S}^1\right)$ telle que $\deg(u) = d_i$, pour $i = 1, \ldots, k$. On utilise d'abord l'additivité de l'intégrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)} |\nabla u|^2 &= \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k B_\sigma(a_i)} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_{B_\sigma(a_i)\setminus B_\rho(a_i)} |\nabla u|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{G\setminus \cup_{i=1}^k B_\sigma(a_i)} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_\rho^\sigma \left(\int_{S^1} |\nabla u|^2\right) \frac{1}{r} dr \end{aligned} \tag{4.11}$$

après en utilisant la formule du degré, l'inégalité de Cauchy-Schawrz et le fait que $|u| = 1$, on a

$$2\pi d_i = \left|\int_{\mathbb{S}^1} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau}\right| \leq \left(\int_{\mathbb{S}^1} |u|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \left(\int_{\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2\right)^{1/2}$$

ainsi

$$2\pi d_i^2 \leq \int_{\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{S}^1} |\nabla u|^2 = \int_{\mathbb{S}^1} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\right) \geq \int_{\mathbb{S}^1} \left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|^2 \geq 2\pi d_i^2.$$

Remplaçant donc cette inégalité dans (4.11) on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)} |\nabla u|^2 \geq \frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^k B_\sigma(a_i)} |\nabla u|^2 + \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{\sigma}{\rho}\right).$$

Ce qui conclut le deuxième résultat. ■

Ainsi, grâce à ce résultat, on a que

$$W_N^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq W_{N'}^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

où les deux côtés sont bornés. Alors, on obtient

$$W_{N'} = \lim_{\rho\to 0} W_{N'}^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) = \inf_\rho W_{N'}^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

et

$$W_N = \lim_{\rho\to 0} W_N^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) = \sup_\rho W_N^\rho - \pi\sum_{i=1}^k d_i^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

de sorte que

$$W_N \leq W_{N'}.$$

Lemme 20 *Soient $i = 1, \ldots, k$ et $\varphi_{i,\rho}^\perp$ le conjugué harmonique de $\varphi_{i,\rho}$ qui vérifie (4.7). Alors $\varphi_{i,\rho}^\perp$ converge vers $\varphi_i^\perp$ quand ρ tends vers 0 dans $H^1(G, \mathbb{S}^1)$.*

Preuve. Par la définition de W_N^ρ, pour $0 < \rho < \bar{\rho}$, il existe $u_\rho \in H^1(G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i), \mathbb{S}^1)$ telle que $\deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Par le Théorème 11,

$$W_N^\rho = \frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)} |\nabla \phi_\rho|^2$$

en utilisant le point (ii) du Lemme 19, pour $0 < \rho < \sigma$, on a

$$\frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i)}|\nabla\phi_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i)}|\nabla u_\rho|^2 \leq W_N^\rho - \pi\sum_{i=1}^{k}d_i^2\log\left(\frac{\sigma}{\rho}\right),$$

de plus, par (4.11) on obtient

$$\limsup_{\rho\to 0}\frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i)}|\nabla\phi_\rho|^2 - \pi\sum_{i=1}^{k}d_i^2\log\left(\frac{1}{\sigma}\right) \leq W_N. \tag{4.12}$$

Ainsi par l'inégalité (4.12) et un argument d'extraction diagonale, pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'existence d'une suite extraite $\rho_n \to 0$ et des fonctions $u, \phi : G \setminus (a_1, \dots, a_k) \to \mathbb{S}^1$ telles que, restreint à $\Omega \setminus \cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i)$, pour $\sigma > 0$, on a

$$u_{\rho_n} \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(\Omega\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i),\mathbb{S}^1) \quad \text{et} \quad \phi_{\rho_n} \rightharpoonup \phi \text{ dans } H^1(\Omega\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i),\mathbb{S}^1).$$

Ainsi par (4.10) et (4.12) on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{G\setminus\cup_{i=1}^{k}B_\sigma(a_i)}\sum_{i=1}^{k}d_i|\nabla\varphi_i^\perp|^2 < +\infty.$$

Donc, quand $\rho \to 0$, on obtient $\varphi_{i,\rho}^\perp \to \varphi_i^\perp$ dans $H^1(G, \mathbb{S}^1)$. ■

Grâce au lemme 20, le fait que $\varphi_i^\perp$ est une fonction harmonique et l'utilisation des estimations elliptiques on a directement le corollaire suivant.

Corollaire 21 *Pour $i = 1, \dots, k$, $\varphi_{i,\rho}^\perp$ converge vers $\varphi_i^\perp$ dans $C^k_{\mathrm{loc}}(G)$ quand ρ tends vers 0, pour chaque $k \geq 0$. Plus précisément,*

$$\|\varphi_{i,\rho}^\perp - \varphi_i^\perp\|_{C^k(K)} \leq C\rho$$

pour tout compact K dans G et C une constante positive.

Après par (4.10) et le Corollaire 21 on obtient donc $\phi_\rho \to \phi_0$ quand $\rho \to 0$ avec

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{k}d_i\log\frac{1}{|x-a_i|} + \sum_{i=1}^{k}d_i\varphi_i^\perp. \tag{4.13}$$

Maintenant, en utilisant les idées exposées dans [7], comme $\varphi_{i,\rho}^\perp \to \varphi_i^\perp$ et en utilisant (4.9), on obtient

$$\varphi_j^\perp(x) + \log\frac{1}{|x-a_j|} = C_l(a_j) \quad \text{sur } \Gamma_l,\ l = 1,\dots,n.$$

Après, par les conditions aux bords de (4.1) et (4.2) on a

$$\varphi_j^\perp(x) + \log\frac{1}{|x-a_j|} = \sum_{l=1}^{n} C_l(a_j)\phi_l(x) + G_0(x,a_j) \quad \text{dans } G. \tag{4.14}$$

Par l'existence du conjugué harmonique $\varphi_j^\perp$ on sait que la valeur moyenne de sa dérivée normale sur chaque Γ_l, $l = 1,\dots,n$ est nulle, de sorte que

$$\int_{\Gamma_l}\frac{\partial\varphi_j^\perp}{\partial\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_l}\frac{\partial}{\partial\nu}\log\frac{1}{|x-a_j|} = \int_{\Gamma_l}\frac{(x-a_j)^\perp\cdot\nu}{|x-a_j|^2} = -\int_{\Gamma_l}\frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu} = 0.$$

Ainsi, en remplaçant dans (4.14) et en utilisant une fois plus les conditions au bord de (4.1) on obtient

$$C_l(a_j)\int_{\Gamma_l}\frac{\partial\phi_l}{\partial\nu}(x) + \int_{\Gamma_l}\frac{\partial G_0}{\partial\nu}(x,a_j) = 0. \tag{4.15}$$

Par ailleurs, on a l'égalité suivante

$$2\pi\phi_l(a_j) = -\int_{\Gamma_l}\frac{\partial G_0}{\partial\nu}(x,a_j) \tag{4.16}$$

puisque ϕ_l est une fonction régulière, donc si on multiplie (4.2) par ϕ_l, on intègre sur G et on utilise la formule de Green, avec les conditions au bord de (4.1) on obtient

$$\begin{aligned} 2\pi\phi_l(a_j) &= \int_G 2\pi\delta_{a_j}\phi_l(x) = \int_G (G_0(x,a_j)\Delta\phi_l(x) - \phi_l(x)\Delta G_0(x,a_j)) \\ &= -\int_{\partial G}\phi_l(x)\frac{\partial G_0}{\partial\nu}(x,a_j) = -\int_{\Gamma_l}\frac{\partial G_0}{\partial\nu}(x,a_j). \end{aligned}$$

Alors, si on pose

$$\gamma_l \equiv 2\pi\left(\int_{\Gamma_l}\frac{\partial\phi_l}{\partial\nu}\right)^{-1}$$

et si on utilise (4.15), on obtient $C_l(a_j) = \gamma_l\phi_l(a_j)$. De cette manière, avec l'aide de (4.13) et (4.14) on obtient

$$\phi_0(x) = \sum_{j=1}^{k} d_j\log\frac{1}{|x-a_j|} + \sum_{j=1}^{k} d_j\varphi_j^\perp(x) = \sum_{j=1}^{k} d_j\left(\sum_{l=1}^{n} C_l(a_j)\phi_l(x) + G_0(x,a_j)\right). \tag{4.17}$$

On conclut ce chapitre avec l'obtention de la formule de l'énergie renormalisée associé à W_N^ρ. On présentera ce résultat à travers du théorème suivant.

Théorème 22 *Soit $\phi_0(x)$ définie dans (4.17) une fonction dans Ω_ρ. Alors, quand $\rho \to 0$,*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \log(\rho) + \pi \sum_{j=1}^{k} d_i d_j \log(\rho) + W_N(a_i, d_i) + O(\rho)$$

avec

$$W_N(a_i, d_i) = \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j H(a_i, a_j) + \pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 H(a_j, a_j)$$

où la fonction H est définie comme

$$H(x,a) := -\sum_{l=1}^{n} \gamma_l \phi_l(a) \phi_l(x) + H_0(x,a)$$

et u_ρ est l'application harmonique à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ associé à ϕ_ρ (ϕ_ρ es solution de (4.4)).

Preuve. En considérant les arguments de la preuve du Théorème 11 on sait que

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2.$$

Comme ϕ_ρ est harmonique dans Ω_ρ, $\phi_\rho = 0$ sur Γ_0 et $\phi_\rho = \tilde{C}_l$ sur chaque Γ_l, $l = 1, \ldots, n$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho \\ &= -\sum_{l=1}^{n} \tilde{C}_l \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} - 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_\rho(\partial B_\rho(a_i)).\end{aligned}$$

Par (4.10) et le Corollaire 21, $\phi_\rho \to \phi_0$ et $\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} \to \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu}$ quand $\rho \to 0$, alors

$$\int_{\tilde{\Omega}_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \underbrace{-\sum_{l=1}^{n} \tilde{C}_l \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}}_{(I)} - \underbrace{2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \phi_0(x_i)}_{(II)} + O(\rho)$$

où x_i est un point de $\partial B_\rho(a_i)$. Pour le premier terme on peut voir que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu}(x) &= \int_{\Gamma_l} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} C_l(a_j)\phi_l(x) + G_0(x, a_j) \right) \right] \\
&= \int_{\Gamma_l} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l \phi_l(a_j)\phi_l(x) + G_0(x, a_j) \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} 2\pi \left(\int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial \nu}(x) \right)^{-1} \phi_l(a_j) \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_l}{\partial \nu}(x) + \int_{\Gamma_l} \frac{\partial G_0}{\partial \nu}(x, a_j) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} (2\pi\phi_l(a_j) - 2\pi\phi_l(a_j)) \right) = 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de ϕ_0, l'égalité $C_l(a_j) = \gamma_l\phi_l(a_j)$, la définition de γ_l et l'équation (4.16). Ainsi le terme $(I) = 0$. Maintenant, on va traiter le deuxième terme

$$\begin{aligned}
(II) &= 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left[\sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} C_l(a_j)\phi_l(x_i) + G_0(x_i, a_j) \right) \right] \\
&= 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \left[\sum_{j=1}^{k} d_j \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l\phi_l(a_j)\phi_l(x_i) + G_0(x_i, a_j) \right) \right] \\
&= 2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l\phi_l(a_j)\phi_l(x_i) + G_0(x_i, a_j) \right) + 2\pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l\phi_l(a_j)\phi_l(x_j) \right. \\
&\quad \left. + G_0(x_j, a_j) \right) \\
&= 2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l\phi_l(a_j)\phi_l(a_i) - H_0(a_i, a_j) - \log|a_i - a_j| + \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \\
&\quad + 2\pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l\phi_l(a_j)\phi_l(a_j) + \log\left(\frac{1}{\rho}\right) - H_0(a_j, a_j) \right) + O(\rho) \\
&= -2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j H(a_i, a_j) - 2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + 2\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \\
&\quad + 2\pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) - 2\pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 H(a_j, a_j) + O(\rho)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de ϕ_0, l'égalité $C_l(a_j) = \gamma_l\phi_l(a_j)$, la partie régulière de G_0 définie dans (4.3) et la définition de H. De cette façon, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = -\pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) - \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + \pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j|$$

$$
\begin{aligned}
&+\pi \sum_{j=1}^{k} d_i d_j H(a_i, a_j) + \pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 H(a_j, a_j) + O(\rho) \\
&= \pi \sum_{j=1}^{k} d_j^2 \log(\rho) + \pi \sum_{j=1}^{k} d_i d_j \log(\rho) + W_N(a_i, d_i) + O(\rho).
\end{aligned}
$$

Ce qui conclut la preuve. ∎

Chapitre 5

Énergie renormalisée de Dirichlet dans un domaine multiplement connexe

Supposons, comme dans le chapitre précédente, que G est multiplement connexe avec Γ_0 la composante extérieure de ∂G et Γ_l, $l = 1, \dots, n$ ses composantes intérieures, et comme dans la Section 2 du présent mémoire on considérera

$$W_D^\rho = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2; u \in H^1(\Omega_\rho, \mathbb{S}^1),\ \deg(u, \partial B_\rho(a_i)) = d_i,\right.$$
$$\left.\mathrm{tr}_{|\Gamma_l}\, u = g_l,\ l = 1, \dots, n\right\} \quad (5.1)$$

avec $\Omega_\rho = G \setminus \cup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$. Ici aussi nous n'imposons les degrés que sur les bords des boules. Soient u_ρ un minimiseur pour le problème (5.1) et ϕ_ρ solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\phi_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \phi_\rho = C_i(\rho) & \text{sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \dots, k \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 2\pi d_i & i = 1, \dots, k \\ \displaystyle\frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = g_l \times \frac{\partial g_l}{\partial \tau} & \text{sur } \Gamma_l,\ l = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (5.2)$$

Théorème 23 *L'infimum est atteint en (5.1) par une solution unique à une phase près. De plus, on a*

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu}$$

avec des coefficients $\alpha_l \in [0, 2\pi]$ *et* ψ_l *solution du problème linéaire*

$$\begin{cases} \Delta\psi_l = 0 & \textit{dans } \Omega_\rho \\ \psi_l = 1 & \textit{sur } \Gamma_l,\ l = 0, 1, \dots, n \\ \psi_l = 0 & \textit{sur } \Gamma_m,\ l \neq m \\ \psi_l = 0 & \textit{sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \dots, k \end{cases} \tag{5.3}$$

et ϕ_ρ *est solution du problème linéaire* (5.2).

Preuve. On va trouver une fonction $v : \Omega_\rho \to \mathbb{S}^1$ qui satisfait

$$\begin{cases} v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_1} &= -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} \\ v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_2} &= \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1}. \end{cases} \tag{5.4}$$

D'une façon générale, on peut considérer le système

$$\begin{cases} v \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} &= F_1 \quad \text{dans } \Omega_\rho \\ v \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} &= F_2 \quad \text{dans } \Omega_\rho. \end{cases} \tag{5.5}$$

Comme dans la preuve du Théorème 6, ce problème a une solution $u : \Omega_\rho \to \mathbb{S}^1$ si et seulement si

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \tag{5.6}$$

et

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot \tau \in 2\pi\mathbb{Z}$$

pour chaque composante connexe Γ_i de $\partial\Omega_\rho$. Par ailleurs, grâce au problème (5.2), on a

$$v \times \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = g_l \times \frac{\partial g_l}{\partial \tau} \quad \text{sur } \Gamma_l,\ l = 0, 1, \dots, n.$$

Notons qu'on peut prendre une phase approprié telle que $v = g_0$ sur Γ_0, et donc $v = e^{i\alpha_l} g_l$ sur Γ_l pour certain $\alpha_l \in [0, 2\pi]$ pour $l = 1, \ldots, n$. Soit ψ solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \psi = \alpha_l & \text{sur } \Gamma_l,\ l = 1, \ldots, n \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial B_\rho(a_i),\ i = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{5.7}$$

Prenons $u = e^{-i\psi} v$ telle qu'en utilisant (5.1) et les conditions au bord de (5.2) on peut écrire

$$\begin{cases} u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} & = & -\dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ u \times \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = v \times \dfrac{\partial v}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{cases}$$

d'où

$$|\nabla u|^2 = \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| u \times \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 = |\nabla\psi|^2 + |\nabla\phi_\rho|^2 + 2 \operatorname{div}\left(\psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, -\psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} \right)$$

mais

$$\int_{\Omega_\rho} \operatorname{div}\left(\psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_2}, -\psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial x_1} \right) = \int_{\Gamma_0} \psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} - \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \psi \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \tau} = 0$$

grâce aux conditions au bord de (5.7) et puisque sur Γ_l, $l = 0, 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\left(g_l \times \frac{\partial g_l}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu} = 0.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla\psi|^2 + \int_{\Omega_\rho} |\nabla\phi_\rho|^2.$$

Maintenant, par l'unicité du problème de Dirichlet (5.7), on a

$$\psi = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \psi_l$$

et on peut calculer

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla \psi|^2 = \sum_{l=1}^{n} \int_{\Omega_\rho} \alpha_l^2 |\nabla \psi_l|^2 = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu}$$

où on a utilisé la formule de Green et les conditions au bord de (5.3). Donc

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2 = \int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 + \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu}.$$

■

Maintenant, on va présenter le résultat de convergence nécessaire pour montrer le théorème de l'énergie renormalisée associé au problème de Dirichlet multiplement connexe. La preuve du lemme suivant est similaire au cas de Dirichlet simplement connexe (voir Lemme 8).

Lemme 24 *On a que $\phi_\rho \to \phi_0$ uniformément quand $\rho \to 0$, avec ϕ_0 solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta \phi_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2\pi d_i \delta_{a_i} & \text{dans } G \\ \dfrac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g_l \times \dfrac{\partial g_l}{\partial \tau} & \text{sur } \Gamma_l,\ l = 0, 1, \ldots, n \end{cases} \tag{5.8}$$

où δ est la fonction delta de Dirac. Plus précisément, on a

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 7 avec $v = \phi_\rho - \phi_0$ dans Ω_ρ et comme ϕ_ρ est constante sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$, pour $i = 1, \ldots, k$, on obtient grâce au principe du maximum

$$\sup_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) - \inf_{\Omega_\rho}(\phi_\rho - \phi_0) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0 - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} \phi_0 \right) \leq C\rho.$$

Par ailleurs, on suppose dans cette partie qu'on a

$$\int_{\partial G} (\phi_\rho - \phi_0) = 0$$

ainsi, il y a un point dans ∂G tel que $\phi_\rho - \phi_0 = 0$. Donc

$$\|\phi_\rho - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

$\blacksquare$

Le corollaire suivant est obtenu directement en utilisant le Lemme 24 et d'estimations elliptiques, voir e.g., [9, Théorème 5.21].

Corollaire 25 *On a que ϕ_ρ converge vers ϕ_0 dans $C^k_{loc}(\Omega_\rho)$ quand $\rho \to 0$, pour chaque $k \geq 0$.*

Finalement, à travers du théorème ci-dessous, on va présenter l'obtention de l'énergie renormalisée pour le problème de Dirichlet multiplement connexe.

Théorème 26 *Soit*

$$R_0(x) = \phi_0(x) - \sum_{j=1}^{k} d_j \log|x - a_j| \tag{5.9}$$

telle que R_0 est une fonction harmonique régulière dans G (R_0 est la partie régulière de la fonction ϕ_0) où ϕ_0 est la solution du problème (5.8). Alors, quand ρ tend vers 0, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \pi \left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right) \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + W_D(a_i, d_i) + O(\rho)$$

avec u_ρ l'application harmonique à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ associée à ϕ_ρ (ϕ_ρ est la solution de (5.2)) et

$$\begin{aligned} W_D(a_i, d_i) = {} & -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \phi_0 \left(g_0 \times \frac{\partial g_0}{\partial \tau}\right) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \phi_0 \left(g_l \times \frac{\partial g_l}{\partial \tau}\right) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu} - \pi \sum_{i=1}^{k} d_i R_0(a_i), \end{aligned}$$

avec des coefficients $\alpha_l, \alpha_m \in [0, 2\pi]$ et ψ_l solution du problème linéaire (5.3).

Preuve. En considérant les arguments de la preuve du Théorème 23 on sait que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu}.$$

On prend maintenant en considération les conditions au bord de (5.2), ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho} |\nabla \phi_\rho|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial \phi_\rho}{\partial \nu}\phi_\rho \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l \alpha_m \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \psi_l}{\partial \nu} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\phi_\rho\left(g_0\times\frac{\partial g_0}{\partial\tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_i\phi_\rho(\partial B_\rho(a_i)) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_l}\phi_\rho\left(g_l\times\frac{\partial g_l}{\partial\tau}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l\alpha_m\int_{\Gamma_m}\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu}.$$

Par le Lemme 24, $\|\phi_\rho-\phi_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)}\le C\rho$, pour $C>0$, alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho}|\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\phi_0\left(g_0\times\frac{\partial g_0}{\partial\tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_i\phi_0(x_i) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_l}\phi_0\left(g_l\times\frac{\partial g_l}{\partial\tau}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l\alpha_m\int_{\Gamma_m}\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu}+O(\rho)$$

où x_i est un point de $\partial B_\rho(a_i)$. Maintenant, avec l'aide de (5.9) on a

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\rho}|\nabla u_\rho|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\phi_0\left(g_0\times\frac{\partial g_0}{\partial\tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_i\left(R_0(x_i)+\sum_{j=1}^{k} d_j\log|x_i-a_j|\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_l}\phi_0\left(g_l\times\frac{\partial g_l}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l\alpha_m\int_{\Gamma_m}\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu}+O(\rho)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\phi_0\left(g_0\times\frac{\partial g_0}{\partial\tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_i\left(R_0(a_i)+\sum_{j=1}^{k} d_j\log|a_i-a_j| - d_i\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_l}\phi_0\left(g_l\times\frac{\partial g_l}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l\alpha_m\int_{\Gamma_m}\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu}+O(\rho)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}\phi_0\left(g_0\times\frac{\partial g_0}{\partial\tau}\right) - \pi\sum_{i=1}^{k} d_iR_0(a_i) - \pi\sum_{i\neq j} d_id_j\log|a_i-a_j|$$
$$+\pi\left(\sum_{i=1}^{k} d_i^2\right)\log\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\int_{\Gamma_l}\phi_0\left(g_l\times\frac{\partial g_l}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\alpha_l\alpha_m\int_{\Gamma_m}\frac{\partial\psi_l}{\partial\nu}$$
$$+O(\rho).$$

Après, en considérant la définition de $W_D(a_i,d_i)$ on conclut la preuve.

$\blacksquare$

Chapitre 6

Annexes

6.1 Première annexe

Les preuves des lemmes suivants peuvent être trouvées dans [2], [3] et [4]. Dans cette partie on va présenter des nouvelles démonstrations avec d'autres techniques et idées (et personnellement, je pense plus intéressantes et élégantes).

Lemme 27 *Soit G un domaine simplement connexe et g une fonction régulière. On a $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ si et seulement si $\deg(g, \partial G) = 0$.*

Preuve. Premièrement, supposons que $\deg(g, \partial G) = 0$. Comme G est régulier, ∂G est une variété differentiable, en plus comme G est borné, ouvert et simplement connexe, ∂G est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$. Soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \partial G$ un homéomorphisme, alors $g \circ \varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ est continue. Maintenant, comme $\deg(g, \partial G) = 0$, alors $\deg(g \circ \varphi, \partial G) = 0$ et ainsi l'homomorphisme induit $(g \circ \varphi)_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ est trivial, i.e.

$$(g \circ \varphi)_* = 0.$$

Par [16, Lemme 55.3, p. 349], $g \circ \varphi$ a une extension à une application continue $h : B^2 \to \mathbb{S}^1$ (B^2 est la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$). De plus, on peut considérer φ comme la restriction d'une homéomorphisme $\Phi : B^2 \to \bar{G}$, car G est ouvert, simplement connexe et régulier. On a aussi que $\bar{G}$ est homéomorphe à B^2 et est restreint à un homéomorphisme sur le bord de B^2 (le bord de B^2 est $\mathbb{S}^1$). Donc $T := h \circ \Phi^{-1} : \bar{G} \to \mathbb{S}^1$ est continue, et comme h est une extension continue de

$g \circ \varphi$,

$$T\big|_{\partial G} = h \circ \Phi^{-1}\big|_{\partial G} = h \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = g.$$

Par conséquent g a une extension continue à $\bar{G}$. Par [13, Corollaire 6.27, p. 141], g a une extension régulière à $\bar{G}$, et ainsi $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$.

Réciproquement, on suppose que $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$, c'est-à-dire g a une extension à $\bar{G}$ qu'on l'appellera T. Alors $g \circ \varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a une extension $T \circ \Phi : B^2 \to \mathbb{S}^1$, et par [16, Lemme 55.3, p. 349], $(g \circ \varphi)_* = 0$. Comme φ_* est un isomorphisme, et $(g \circ \varphi)_* = g_* \circ \varphi_*$, on a que $g_* = 0$ en homotopie, d'où, par le théorème d'Hurewicz (voir e.g., [10]), on obtient que $g_* = 0$ en homologie et donc $\deg(g, \partial G) = 0$. ■

Lemme 28 *Soit G un domaine multiplement connexe avec Γ_0 la composante extérieure de ∂G et Γ_l, $l = 1, \ldots, n$, les composantes intérieures de ∂G. On a $H^1_g(G, \mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ si et seulement si* $\deg(u, \Gamma_0) = \sum_{l=1}^{n} \deg(u, \Gamma_l)$.

Preuve. Supposons tout d'abord que $u \in H^1_g(G, \mathbb{S}^1)$. Comme u prend des valeurs dans $\mathbb{S}^1$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \times \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{p.p. dans } G$$

alors, au sens des distributions dans G

$$\operatorname{div}\left(u \times \frac{\partial u}{\partial x_2}, -u \times \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Maintenant, on intègre sur G et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\Gamma_0} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} - \sum_{l=1}^{n} \int_{\Gamma_l} u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

Finalement, on utilise la formule du degré de sorte que

$$\deg(u, \Gamma_0) = \sum_{l=1}^{n} \deg(u, \Gamma_l).$$

Réciproquement, supposons que $\deg(u, \Gamma_0) = \sum_{l=1}^{n} \deg(u, \Gamma_l)$. Comme G est multiplement connexe, pour $l = 1, \ldots, n$, on va considérer des sous-domaines simplement connexes ω_l dont le bord de chacun est Γ_l et dans chaque sous-domaine on considère un point a_l. Maintenant, sur chaque bord Γ_l on a une fonction u de degré $d_l = \deg(u, \Gamma_l)$. On veut que, pour chaque $l = 1, \ldots, n$, ce degré d_l devienne 0. Pour cela, on considère la fonction, pour $l = 1, \ldots, n$,

$$v_l := \left(\frac{\overline{(x - a_l)}}{|x - a_l|} \right)^{d_l}$$

de sorte que $\deg(v_l, \Gamma_l) = -d_l$. Ainsi, $\deg(uv_l, \Gamma_l) = 0$ (car $\deg(uv_l, \Gamma_l) = \deg(u, \Gamma_l) + \deg(v_l, \Gamma_l)$). De plus

$$\sum_{l=1}^{n} \deg(uv_l, \Gamma_l) = 0.$$

Après comme ω_l est simplement connexe, par le lemme précédent, la fonction uv_l a une extension T_l à $\overline{\omega_l}$ pour chaque $l = 1, \ldots, n$.

Pour le bord extérieur, on prend $u' = u|_{\Gamma_0}$ et on considère la fonction

$$v' := \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{\overline{(x - a_l)}}{|x - a_l|} \right)^{d_l}$$

telle que $\deg(u'v', \Gamma_0) = 0$ par hypothèse. En utilisant une fois plus le lemme précèdent, la fonction $u'v'$ a une extension T_0 à Ω, avec $\Omega = G \cup \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i$. Après, pour recoller toutes les extensions on utilise une partition de l'unité $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ des fonctions positives telles que

$$\sum_{l=0}^{n} \varphi_l = 1,$$

et on considère

$$T = \left(\sum_{l=1}^{n} \varphi_l T_l + \varphi_0 T_0 \right) \Bigg|_{\overline{G}}$$

de manière que, si $x \in \partial G$, alors $x \in \Gamma_l$ pour un $l = 0, 1, \ldots, n$. D'où si $x \in \Gamma_0$, alors $\varphi_l(x) = 0$ pour $l = 1, \ldots, n$ et ainsi $\varphi_0(x) = 1$, donc

$$T(x) = \varphi_0(x) T_0(x) = u'(x) v'(x).$$

Si $x \in \Gamma_{l_0}$, pour $l_0 = 1, \ldots, n$, alors $\varphi_l(x) = 0$ pour tout $l \neq l_0$ et $\varphi_0(x) = 0$, ainsi

$$T(x) = \varphi_{l_0}(x) T_{l_0}(x) = u(x) v_{l_0}(x).$$

Pour conclure, on a l'extension de u donnée par l'expression

$$T_u = Tv' = T \prod_{l=1}^{n} \left(\frac{\overline{(x-a_l)}}{|x-a_l|} \right)^{d_l}.$$

■

6.2 Deuxième annexe

Lemme 29 *Soit G un domaine borné et régulière de $\mathbb{R}^2$, et soient $B_\rho(a_i)$, $i = 1 \ldots, k$ des boules ouvertes disjointes avec rayon ρ positif, tels que $\Omega_\rho = G \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_\rho(a_i)$ est connexe. Soit v solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega_\rho \\ v = 0 & \text{sur } \partial G \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Alors

$$\sup_{\Omega_\rho} v - \inf_{\Omega_\rho} v \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right). \tag{6.1}$$

Preuve. En utilisant la même technique que celle utilisée pour le Lemme 7 on a que $\bigcup_{i=1}^{k} I_i$ est connexe. Maintenant prouvons l'inégalité (6.1). On peut distinguer deux cas :

- Cas 1 : Si $\inf_{\Omega_\rho} v < 0$ et $\sup_{\Omega_\rho} v > 0$. Dans ce cas, par la connexité de $\bigcup_{i=1}^{k} I_i$, la condition $v = 0$ sur ∂G et le principe du maximum, on a l'inégalité directement.
- Cas 2 : Si $\inf_{\Omega_\rho} v = 0$ ou $\sup_{\Omega_\rho} v = 0$. On peut traiter seulement le cas $\inf_{\Omega_\rho} v = 0$ (le cas $\sup_{\Omega_\rho} v = 0$ est très similaire). Supposons $v \neq 0$ dans Ω_ρ (sinon nous aurions le résultat directement). Par le principe du maximum de Hopf, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ sur ∂G ce qui contredit $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$.

Donc on peut conclure la démonstration.

■

Lemme 30 *Soit G un domaine borné et régulière de $\mathbb{R}^2$, et soient $B_\rho(a_i)$, $i = 1\dots,k$ des boules ouvertes disjointes avec rayon ρ positif, tels que $\Omega_\rho = G \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\rho(a_i)$ est connexe. Soit v une fonction qui satisfait le problème*

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \textit{dans } \Omega_\rho \\ \displaystyle\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \textit{pour } i = 1,\dots,k. \end{cases}$$

Alors

$$\sup_{\Omega_\rho} v - \inf_{\Omega_\rho} v \leq \sum_{i=1}^k \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right) + \sup_{\partial G} v - \inf_{\partial G} v. \tag{6.2}$$

En particulier si $v = 0$ sur ∂G alors

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq \sum_{i=1}^k \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right).$$

Preuve. Considérons les intervalles $I_i = [\alpha_i, \beta_i]$ avec $\alpha_i = \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v$ et $\beta_i = \sup_{\partial B_\rho(a_i)} v$, pour $i = 1,\dots,k$, et $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ avec $\alpha_0 = \inf_{\partial G} v$ et $\beta_0 = \sup_{\partial G} v$. On va utiliser un technique très similaire à la preuve du Lemme 7 pour montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=0}^k I_i$ est connexe.
On suppose, par contradiction, que ce n'est pas vrai. Alors, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ et $0 \leq n < k$ tels que (après avoir réétiqueté les intervalles)

$$\beta_i \leq t_0 - \delta \quad \text{si } i = 0,1,\dots,n \quad \text{et} \quad \alpha_i \geq t_0 + \delta \quad \text{si } i = n+1,\dots,k$$

pour un certain $\delta > 0$. Sans perte de généralité, on suppose que $t_0 \neq 0$, i.e. on prend $t_0 > 0$. Ainsi, on peut supposer que $t_0 - \delta \geq 0$. Considérons une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 - \delta \\ 1 & \text{si } t \geq t_0 + \delta \end{cases}$$

et $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$. Multiplions $\Delta v = 0$ par $\theta(v)$ et après intégrons sur Ω_ρ,

$$0 = -\int_{\Omega_\rho} (\Delta v)\theta(v) = \int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 - \int_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v) + \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu}\theta(v),$$

mais $v = 0$ sur ∂G, $\theta(v)$ est constante (0 ou 1) sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$ et

$$\int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k.$$

Ainsi, on a

$$\int_{\Omega_\rho} \theta'(v)|\nabla v|^2 = 0.$$

Après, en utilisant la même procédure que dans le Lemme 7 on obtient que $\bigcup_{i=0}^{k} I_i$ est connexe.

Maintenant on va montrer l'inégalité (6.2). Comme $\bigcup_{i=0}^{k} I_i$ est connexe, leur maximum et minimum sont atteints, ainsi par le principe du maximum

$$\max_{0\le i\le k} \beta_i - \min_{0\le i\le k} \alpha_i \le \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) + \beta_0 - \alpha_0.$$

En ajoutant une constante à v on peut toujours supposer que $\min\limits_{0\le i\le k} \alpha_i = 0$. On prend $A = \max\limits_{0\le i\le k} \beta_i$. En multipliant l'équation $\Delta v = 0$ par $(v - A)^+$ et en intégrant sur Ω_ρ on obtient

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla (v-A)^+|^2 - \int_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial \nu}(v-A)^+ + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial B_\rho(a_i)} \frac{\partial v}{\partial \nu}(v-A)^+ = 0$$

mais $(v - A)^+ = 0$ sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$, pour $i = 1, \dots, k$, et sur ∂G, donc $(v - A)^+ = 0$ dans Ω_ρ, c'est à dire, $v \le A$ dans Ω_ρ. De la même manière on obtient que $v \le \tilde{A}$ dans Ω_ρ. De plus $v^- = 0$ sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$, pour $i = 1, \dots, k$, et sur ∂G, donc $v \ge 0$ dans Ω_ρ. Ainsi on a

$$\inf_{\Omega_\rho} v = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega_\rho} v \le A = \max_{1\le i\le k} \beta_i &\le \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \alpha_i) + \beta_0 - \alpha_0 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} v - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} v \right) + \sup_{\partial G} v - \inf_{\partial G} v.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve.

■

On doit noter qu'on n'a pas supposé dans le lemme précèdent (en comparaison avec le Lemme 29) la condition $v = 0$ sur ∂G mais, en revanche, la conclusion est plus faible et implique également l'oscillation de v sur ∂G.

Lemme 31 *Soient G un domaine borné et régulière de $\mathbb{R}^2$ et $\hat{\phi}_\rho$ solution du problème linéaire (3.2). Alors $\hat{\phi}_\rho$ converge vers $\hat{\phi}_0$ quand ρ tend vers 0, avec $\hat{\phi}_0$ solution du problème*

$$\begin{cases} \Delta\hat{\phi}_0 = 2\pi \sum_{i=1}^{k} d_i \delta_{a_i} & \textit{dans } G \\ \hat{\phi}_0 = 0 & \textit{sur } \partial G, \end{cases}$$

et δ est la fonction delta de Dirac. Plus précisément, il existe $C > 0$ telle que

$$\|\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

Preuve. On applique le lemme 29 à la fonction $v = \hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0$. Comme $\hat{\phi}_\rho$ est constante sur chaque $\partial B_\rho(a_i)$, on obtient grâce au principe du maximum

$$\sup_{\Omega_\rho}(\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0) - \inf_{\Omega_\rho}(\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\partial B_\rho(a_i)} \hat{\phi}_0 - \inf_{\partial B_\rho(a_i)} \hat{\phi}_0 \right) \leq C\rho.$$

D'autre part , on a $\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0 = 0$ sur ∂G. Donc nous obtenons

$$\|\hat{\phi}_\rho - \hat{\phi}_0\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} \leq C\rho.$$

■

Bibliographie

[1] H. Bethuel, F. Brezis and F. Hélein. *Ginzburg-Landau Vortices.* Birkhäuser, 1994.

[2] H. Brezis. Lectures on the Ginzburg-Landau vortices. *Scuola Normale Superiore, Pisa*, 1996.

[3] H. Brezis. *Degree theory : old and new.* Springer, 1997.

[4] H. Brezis. New questions related to the topological degree. In *The unity of mathematics*, pages 137–154. Springer, 2006.

[5] Giacomo Canevari and Antonio Segatti. Defects in Nematic Shells : a Γ-convergence discrete-to-continuum approach. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 229 :125–186, 2018.

[6] Neil S. Trudinger David Gilbarg. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Classics in Mathematics 224. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 2001.

[7] M. del Pino, M. Kowalczyk and M. Musso. Variational reduction for Ginzburg–Landau vortices. *Elsevier, Journal of Functional Analysis*, 239 :497–541, 2006.

[8] Gerald B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, second edition, 1995.

[9] Mariano Giaquinta and Luca Martinazzi. An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs, vol. 11 of appunti. *Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie)[Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)], Edizioni della Normale, Pisa,*, 2012.

[10] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, first edition, 2001.

[11] Radu Ignat and Robert L. Jerrard. Renormalized energy between vortices in some Ginzburg-Landau models on 2-dimensional Riemannian manifolds. *arXiv e-prints*, page arXiv :1910.02921, October 2019.

[12] Tadeusz Iwaniec and Gaven Martin. *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis.* Oxford University Press, USA, first edition, 2002.

[13] M Lee John. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York, second edition, 2003.

[14] C. Lefter and V. Rădulescu. Minimization problems and corresponding renormalized energies. *Differential and Integral Equations*, 9 :903–917, 1996.

[15] Antonin Monteil, Rémy Rodiac, and Jean Van Schaftingen. Renormalised energies and renormalisable singular harmonic maps into a compact manifold on planar domains. *arXiv e-prints*, page arXiv :2006.14823, June 2020.

[16] James Munkres. *Topology*. Pearson Education Limited, second edition, 2014.

[17] Sylvia Serfaty. Stability in 2D Ginzburg-Landau passes to the limit. *Indiana University Mathematics Journal*, 54 :199–222, 01 2005.

[18] Daniel Spirn. Vortex motion law for the Schrödinger–Ginzburg–Landau equations. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 34 :1435–1476, 01 2003.

[19] Hassler Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36(1) :63–89, 1934.