Mémoire de fin d'études de Master 2

Université d'Evry Val d'Essonne

Présenté par Oscar JARRIN

Modélisation de l'opérateur Laplacien Fractionnaire à travers d'un problème d'extension au demi-espace

Encadré par Diego CHAMORRO

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry

IBGBI, Université d'Evry, 23 boulevard de France, 91037 Evry Cedex

07 Octobre 2014

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce mémoire est de montrer comment l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ avec $0 < s < 1$ est relié à des problèmes d'extension au demi-espace via des équations aux dérivées partielles. Ce mémoire est basé principalement sur la lecture de l'article de Caffarelli et Silvestre *An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian* [4]. Le travail développé est divisé en quatre sections. Dans cette introduction on étudie l'opérateur Laplacien Fractionaire $(-\Delta)^s$ en utilisant des outils d'analyse harmonique, principalement la transformation de Fourier et les opérateurs d'intégrale singulière.

Dans la deuxième section nous montrerons la relation qui existe entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et un problème d'extension au demi-espace et cela permettra de donner une définition équivalente de cet opérateur via les équations elliptiques et de traiter cet opérateur, qui a un caractère non local, à travers des méthodes locales des équations aux dérivées partielles.

La troisième section est destinée à l'étude des applications de la relation entre l'opérateur $(-\Delta)^s$ et le problème d'extension. Ici nous travaillerons avec des fonctions harmoniques fractionnaires en utilisant des techniques locales des équations différentielles elliptiques. Le résultat le plus important de cette section repose sur la généralisation de l'inégalité de Harnack à des fonctions harmoniques fractionnaires.

Dans la quatrième section nous exposerons une généralisation et une application directe de l'article [4] données par les articles [14] et [1] respectivement. En effet dans l'article *Extension Problem and Harnack's Inequality for some Fractional Operators* [14] les auteurs étudient le même type de relation entre les puissances fractionnaires du Laplacien et un problème d'extension au demi-espace, mais au lieu de travailler avec l'opérateur Laplacien, ils utilisent un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre L. Ici l'ingrédient principal repose sur une utilisation intensive de la théorie spectrale et de cette façon, le résultat le plus important de Caffarelli et Silvestre est généralisé à des opérateurs différentiels linéaires de deuxième ordre.

D'autre part, basés sur la lecture de l'article *Some Constructions for the Fractional Laplacian on Noncompact Manifolds* [1] nous exposerons rapidement comment cette relation entre le Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension permet de définir l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur des variétés non compactes en commençant par l'exemple le plus simple donné par l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$.

Notations et Définitions

Dans ce mémoire nous travaillons sur l'espace $\mathbb{R}^n$ doté de la norme euclidienne $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ et de la mesure de Lebesgue dx. On notera le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ par $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On note Γ la fonction Gamma définie pour $z \in \mathbb{C}$ par la formule :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{lorsque } Re(z) > 0.$$

Par contre, lorsque $Re(z) \leq 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $Re(z) > -N-1$, alors pour $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ on a

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{j=0}^{N} \frac{(-t)^j}{j!} \right) dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt + \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!(z+j)}.$$

(Voir [9], Appendices A.2 et A.5).

Pour $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, R)$ une sphère dans $\mathbb{R}^n$ de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et rayon $R > 0$ et $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on notera par $\dfrac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(x)$ la dérivée normale de u par rapport au vecteur normal extérieur $\overrightarrow{n}$ à $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, R)$ dans un point $x \in \mathbb{S}^{n-1}(x_0, R)$. De même, on notera par $\dfrac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(x)$ la dérivée tangente de u par rapport au vecteur tangent $\overrightarrow{\tau}$ à $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, R)$ dans un point $x \in \mathbb{S}^{n-1}(x_0, R)$.

On notera les multi-indices par α, c'est à dire, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. Pour une fonction f régulière on définit $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_n}} f$. D'autre part, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on définit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Espaces Fonctionnels

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on dénote par $\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k-fois différentiables et qui sont définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. De même on note par $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables. $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dénote l'espace des fonctions test, c'est à dire, les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et qui sont à support compact.

- Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit les espaces de Lebesgue usuels par

  $$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : ||f||_{L^p} < +\infty\}$$

  où

  $$||f||_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \\ \displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |f(x)| & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

- Espaces de Hölder. Pour $0 < s < 1$ on définit

  $$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{ il existe } C > 0 \text{ telle que pour tout } \ x, y \in \mathbb{R}^n, \ |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^s\}.$$

  Ces espaces sont normés par la fonctionnelle

  $$||f||_{\mathcal{C}^s} = ||f||_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}.$$

  De plus, pour $k \in \mathbb{N}^*$ on définit l'espace $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ dont les dérivées d'ordre k sont höldériénnes d'exposant s.

- La classe de Schwartz.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n):\ \text{pour tout } \alpha,\beta \text{ multi-indices} \lim_{|x|\to+\infty}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|=0\right\}.$$

  La propriété $\lim_{|x|\to+\infty}|x^\alpha\partial^\beta\varphi(x)|=0$ nous indique que φ et toutes ses dérivées partielles décroissent plus rapidement que n'importe quel polynôme. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est doté de la topologie suivante : une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si pour tout $P(x)$ polynôme et α multi-indice on a

$$\lim_{n\to+\infty}P(x)\partial^\alpha\varphi_n(x)=0,\quad \text{uniformément sur}\,\mathbb{R}^n.$$

  Avec cette topologie on définit l'espace dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ comme suit.

- L'espace des distributions tempérées, noté par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, est l'espace des fonctionnelles linéaires et continues définies sur la classe de Schwartz.

La transformation de Fourier

Pour une fonction $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$) on définit sa transformation de Fourier par :

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i\,x\cdot\xi}\varphi(x)dx,\quad \text{pour tout}\quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Par contre, pour $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ on définit sa transformation de Fourier comme :

$$\left\langle\widehat{T},\varphi\right\rangle=\langle T,\widehat{\varphi}\rangle,\quad \text{pour tout}\quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Les propriétés principales de la transformation de Fourier et de sa transformation inverse, notée $(\cdot)^\vee$, se trouvent dans [9] Chapitre 2.

1.1 Laplacien Fractionnaire

Dans cette section nous donnerons quelques définitions équivalentes de cet opérateur qui seront utilisées tout au long de la Section 2. On commencera par la définition de l'opérateur Laplacien Fractionnaire au niveau de Fourier, l'idée de base étant d'utiliser la transformation de Fourier pour définir des puissances fractionnaires pour ensuite étudier quelques propriétés de cet opérateur.

Définition 1.1 (En utilisant la transformation de Fourier)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. L'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ est défini à l'aide de la transformation de Fourier par*

$$\widehat{(-\Delta)^s}\varphi(\xi) = (4\pi^2)^s|\xi|^{2s}\widehat{\varphi}(\xi), \quad \textit{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Cette définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$ est totalement classique, mais il convient avant de continuer de donner quelques propriétés simples de l'action de cet opérateur en comparant ces effets sur des objets connus.

Observons tout d'abord que, puisque la fonction φ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cette expression a bien un sens car l'on a

$$|\widehat{(-\Delta)^s\varphi}(\xi)| = C\,|\xi|^{2s}|\widehat{\varphi}(\xi)| < +\infty, \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donc cet opérateur est bien défini sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Remarquons maintenant que comme le poids $|\xi|^{2s}$ est croissant (car $0 < s < 1$) pour que la quantité $|\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi)$ ait un sens en norme L^2 pour $|\xi|$ assez grand il est nécessaire que la transformation de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction f ait une certaine décroissance à l'infini par rapport à ce poids et ceci suggère que la fonction f possède quelques propriétés de régularité. Voyons cela avec un exemple et considérons une fonction $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Par définition on a alors que

$$\|f\|^2_{H^1} = \|(1+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}\widehat{f}\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

et pour que cette quantité soit finie il faut que $\widehat{f}(\xi)$ décroisse suffisamment rapidement à l'infini. On remarquera donc que la décroissance à l'infini de la transformation de Fourier d'une fonction se traduit par des propriétés de régularité au sens d'un espace de Sobolev. Puisque l'on a que $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \approx |\xi|$ pour $|\xi|$ assez grand, on peut affirmer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\|f\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f\|_{L^2} < +\infty$$

possède des propriétés de régularité au sens de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$. On notera en particulier que dans le cadre L^2 il est très simple de voir que les quantités

$$\|f\|_{L^2} + \|\nabla f\|_{L^2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f\|_{L^2}$$

déterminent le même espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$ et en norme L^2 on peut constater que le comportement du Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ est équivalent à l'action du gradient ∇. Cette petite étude nous montre, par analogie, que l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ avec $0 < s < 1$ doit se comprendre comme une *dérivée fractionnaire*.

Indiquons au passage que l'opérateur $(-\Delta)^s$ permet définir (au moins formellement) les espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^{2s}(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1$ comme l'ensemble

$$\dot{H}^{2s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|(-\Delta)^s f\|_{L^2} < +\infty\}.$$

Ces espaces homogènes sont d'une grande utilité dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Mais si l'on a bien que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \approx |\xi|^s$ pour les grandes fréquences, équivalence qui nous a permis de parler de régularité fractionnaire, on se gardera bien de croire que la situation est la même pour les petites fréquences : le fait que $|\xi|^{2s} \to 0$, quand $|\xi| \to 0$ autorise un comportement très différent de $\widehat{f}(\xi)$ lorsqu'on étudie le produit $|\xi|^{2s}\widehat{f}(\xi)$ du point vue de la norme L^2. Cette particularité montre qu'il faut prendre quelques précautions lorsqu'on considère les espaces de Sobolev homogènes.

Étudions maintenant le degré de l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$. Nous dirons qu'un opérateur différentiel D est homogène de degré σ si

$$D(f(\lambda x)) = \lambda^{\sigma}(Df)(\lambda x), \quad \text{pour} \quad \lambda > 0 \text{ et pour } f \text{ dans le domaine de l'opérateur.}$$

Nous voyons sans problème que le Laplacien usuel $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ est un opérateur différentiel de degré $\sigma = 2$, degré qui s'explique par les dérivées ∂_i^2 qui définissent cet opérateur.

Dans le cas de l'opérateur Laplacien Fractionnaire un calcul simple montre que l'on a

$$(-\Delta)^s(f(\lambda x)) = \lambda^{2s}((-\Delta)^s f)(\lambda x)$$

et on obtient alors que cet opérateur est un opérateur homogène de degré $2s$.

Nous voyons donc que l'opérateur $(-\Delta)^s$ avec $0 < s < 1$ est un opérateur différentiel de degré $2s$ qui est (pour l'instant) bien défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Convolution

Nous avons définit l'opérateur $(-\Delta)^s$ pour $0 < s < 1$ en utilisant la transformation de Fourier et il est maintenant nécessaire de donner une définition de cet opérateur en terme de la variable réelle x. Nous savons que la transformation de Fourier inverse échange le produit de fonctions par un produit de convolution et si nous appliquons ce raisonnement à l'opérateur $(-\Delta)^s$ qui vient d'être défini en variable de Fourier nous nous attendons alors à obtenir une expression de la forme

$$(\Delta)^s f = C\,(|\cdot|^{2s}\widehat{f})^{\vee} = f * K_s,$$

où K_s est le noyau de convolution associé à l'opérateur $(-\Delta)^s$.

Ainsi, pour obtenir une caractérisation de cet opérateur en variable réelle, il suffira de calculer la transformation de Fourier inverse du poids $|\cdot|^{2s}$, mais comme nous allons le voir, il est nécessaire de prendre quelques précautions.

Pour cela nous aurons besoin de la notion de distribution homogène.

Définition 1.2 (Distribution Homogène [9], Chapitre 2)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $Re(z) > -n$, on définit la distribution Φ_z par l'expression*

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle = C(n,z)\int_{\mathbb{R}^n} |x|^z \varphi(x)dx, \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

où, $C(n,z) = \dfrac{\pi^{\frac{n+z}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n+z}{2}\right)}$.

Par contre, si $Re(z) \leq -n$, soit $N \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $Re(z) > -N - n - 1$, alors on définit la distribution Φ_z par :

$$\langle \Phi_z, \varphi \rangle = C(n,z)\int_{|x|>M} |x|^z \varphi(x)dx + C(n,z)\int_{|x|<M} |x|^z \left(\varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^{\alpha}\varphi(0)}{\alpha!}x^{\alpha}\right)dx + \sum_{|\alpha|\leq N} b(n,\alpha,z)\langle \partial^{\alpha}\delta_0, \varphi\rangle, \tag{2}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, où $b(n,\alpha,z) = \frac{C(n,z)}{|\alpha|+z+n}\frac{1}{\alpha!}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} x^{\alpha}d\sigma(x)$.

Remarque 1.1. *Si $Re(z) > -n$ alors la distribution Φ_z coïncide avec la fonction $C(n,z)|\cdot|^z$ qui appartient à l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Tandis que, lorsque $Re(z) \leq -n$ la fonction $|\cdot|^z$ n'est pas localement intégrable alors l'intégrale (1) n'est pas bien définie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc il est indispensable de passer par le cadre des distributions. En particulier par la formule (2) on voit que, lorsque $Re(z) \leq -n$, la distribution Φ_z coïncide avec la fonction $C(n,z)|\cdot|^z$ en dehors d'un voisinage de l'origine $B_M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < M\}$.*

Avec cette définition nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Transformation de Fourier des distributions homogènes [9], Chapitre 2)**.** *Pour $z \in \mathbb{C}$ nous avons au sens des distributions l'identité*

$$\widehat{\Phi_z} = \Phi_{-(n+z)}.$$

Voir une preuve dans l'appendice page 56. Une fois que nous avons cette proposition à notre disposition, nous pouvons donner la formule explicite du noyau K_s associé à l'opérateur $(-\Delta)^s$. En effet, si on prend la transformation de Fourier inverse dans la formule ci-dessus on obtient au sens des distributions

$$\Phi_z = (\Phi_{-(n+z)})^\vee,$$

maintenant, en prenant $-(n+z) = 2s$ on obtient que $z = -(n+2s)$ (avec $0 < s < 1$), de cette façon dans la formule précédente on a :

$$\Phi_{-(n+2s)} = (\Phi_{2s})^\vee.$$

Comme $2s > -n$, par la formule (1) on sait que la distribution Φ_{2s} coïncide avec la fonction localement intégrable $|\cdot|^{2s}$ multipliée par une constante, donc, dans la dernière expression on trouve :

$$\Phi_{-(n+2s)} = \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}+s}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)} |\cdot|^{2s} \right)^\vee,$$

d'où on obtient la transformation de Fourier inverse du poids $|\cdot|^{2s}$ au sens des distributions :

$$(|\cdot|^{2s})^\vee = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}+s}} \Phi_{-(n+2s)}.$$

Il est important de remarquer que comme $-(n+2s) < -n$ alors $(|\cdot|^{2s})^\vee \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est donnée par la formule (2) et la fonction $\frac{1}{|\cdot|^{n+2s}}$ définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ne doit pas être confondue avec la distribution tempérée $\Phi_{-(n+2s)}$ sur $\mathbb{R}^n$. Néanmoins, si nous regardons la formule (2), on peut voir que

$$(|\cdot|^{2s})^\vee = C \frac{1}{|\cdot|^{n+2s}} \quad \text{en dehors d'un voisinage de l'origine.}$$

Nous avons donc la définition suivante.

Définition 1.3 (Noyau de Convolution)**.** *Soit $0 < s < 1$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous avons que l'action de l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ est donnée par le produit de convolution entre la fonction φ et la distribution K_s :*

$$(-\Delta)^s \varphi = \varphi * K_s$$

où

$$K_s := (4\pi^2)^s C(n,s) \Phi_{-(n+2s)} = \left((4\pi^2)^s |\cdot|^{2s}\right)^\vee,$$

avec la constante $C(n,s) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}+s}}$.

Une fois que nous disposons de ces deux caractérisations (en variable réelle et en variable de Fourier) de l'opérateur $(-\Delta)^s$ nous pouvons obtenir quelques propriétés supplémentaires.

- Tout d'abord, le fait que l'opérateur $(-\Delta)^s$ en variable réelle soit donné par un produit de convolution entre $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $K_s \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ implique que $(-\Delta)^s\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, où on a :

$$(-\Delta)^s\varphi(x) = \langle K_s, \varphi(x - \cdot)\rangle \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(Voir [9], Théorème 2.3.20).

- Observons ensuite que le fait que l'opérateur $(-\Delta)^s$ se représente comme un opérateur de convolution indique clairement le caractère non local de celui-ci : pour définir $(-\Delta)^s\varphi(x_0)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en un seul point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, toutes les valeurs de φ interviennent.

1.3 Opérateur d'Intégrale Singulière

Nous avons vu dans la section précédente que les puissances fractionnaires du Laplacien $(-\Delta)^s$ peuvent se définir en variable réelle et en variable de Fourier. Dans cette section nous allons présenter une autre approche qui est donnée par la définition suivante.

Définition 1.4 (Comme opérateur d'intégrale singulière)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $0 < s < 1$. On a alors :*

$$(-\Delta)^s\varphi(x) = C_2(n,s)vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy = C_2(n,s)vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(x-y)}{|y|^{n+2s}}dy, \tag{3}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Où $C_2(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-\cos(y_1)}{|y|^{n+2s}}dy\right)^{-1}$.

Nous avons noté ici vp la valeur principale de ces intégrales, c'est à dire :

$$vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(x-y)}{|y|^{n+2s}}dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)-\varphi(x-y)}{|y|^{n+2s}}dy.$$

Avant de montrer l'équivalence de cette définition des puissances fractionnaires du Laplacien avec la définition donnée précédemment il convient de contextualiser un peu cet opérateur donné par une intégrale singulière. Observons tout d'abord que lorsque $0 < s < \frac{1}{2}$ et si la fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\|\nabla f\|_{L^\infty} < +\infty$, alors il n'est pas nécessaire d'utiliser une valeur principale ; en effet pour $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x)-f(x-y)}{|y|^{n+2s}}dy\right| &\leq \int_{\varepsilon<|y|<1}\frac{|f(x)-f(x-y)|}{|y|^{n+2s}}dy + \int_{|y|>1}\frac{|f(x)-f(x-y)|}{|y|^{n+2s}}dy\\ &\leq \|\nabla f\|_{L^\infty}\int_{\varepsilon<|y|<1}|y|^{1-n-2s}dy + 2\,\|f\|_{L^\infty} = \|\nabla f\|_{L^\infty}(1-\varepsilon^{1-2s}) + 2\,\|f\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

et comme $0 < s < \frac{1}{2}$, on a l'estimation uniforme en ε qui suit

$$\left|\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x)-f(x-y)}{|y|^{n+2s}}dy\right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} + 2\|f\|_{L^\infty}.$$

On remarquera que cet argument ne fonctionne plus si $\frac{1}{2} < s < 1$ et alors il est indispensable d'utiliser les valeurs principales dans ces intégrales.

Observons ensuite que si pour une fonction f et un point $x \in \mathbb{R}^n$ on a $|(-\Delta)^s f(x)| < +\infty$ alors on peut autoriser à la fonction f une certaine croissance à l'infini au sens suivant puisque l'on a

$$|(-\Delta)^s f(x)| = \left|C_2(n,s)vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy\right| < +\infty,$$

et lorsque $|y|$ est grand cela permet de considérer des fonctions qui vérifient la condition

$$\int_{|y|>M} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+2s}} dy < +\infty,$$

donc des fonctions qui peuvent potentiellement exploser. Donnons un exemple. Soit $f(x) = |x|^w$ où $0 < w < 2s$; c'est une fonction croissante et elle n'appartient à aucun espace L^p, mais on peut néanmoins calculer $(-\Delta)^s |x|^w = C\,|x|^{w-2s}$, pour le voir il suffit d'utiliser la Proposition 1.1 pour la transformation de Fourier des distributions homogènes.

Il est évident que dans cette caractérisation de l'opérateur $(-\Delta)^s$ comme opérateur d'intégrale singulière la partie cruciale est donnée lorsque y s'approche du point x et il faut que le rapport $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}$ ait un comportement adéquat pour que la valeur principale ait un sens.

Nous savons que les espaces de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $0 < s < 1$, qui mesurent une régularité fractionnaire en norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$, sont définis par la norme

$$\|f\|_{C^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

ce qui indique que le rapport $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n+2s}}$ permet de caractériser de la régularité. Donnons un autre exemple. On sait que si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, avec $0 < s < 1$, alors on a que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(x-y)|^2}{|y|^{n+2s}} dy dx < +\infty$$

(voir [6], Section 2). Ces exemples montrent bien que cette caractérisation de l'opérateur $(-\Delta)^s$ permet de mesurer de la régularité fractionnaire.

Pour finir nous relions avec la proposition suivante la caractérisation de l'opérateur $(-\Delta)^s$ donnée avec une intégrale singulière à celle donnée précédemment en utilisant la transformation de Fourier.

Proposition 1.2 ([6], Section 3). *Soit $(-\Delta)^s$ avec $0 < s < 1$ l'opérateur Laplacien Fractionnaire donné par la formule (3). Alors on a l'égalité, au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$:*

$$(-\Delta)^s \varphi = (|\cdot|^{2s} \widehat{\varphi})^\vee, \qquad \textit{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

La preuve de la Proposition 1.2 se trouve dans l'annexe de ce mémoire.

2 Relation entre le Laplacien Fractionnaire et un problème d'extension au demi-espace

Après cette introduction dans laquelle on a étudié rapidement quelques définitions équivalentes de l'opérateur $(-\Delta)^s$ pour $0 < s < 1$, nous nous concentrons maintenant dans le coeur de ce mémoire : il s'agit, tout en suivant l'article de Caffarelli et Silvestre [4] de montrer qu'il est possible de relier l'opérateur $(-\Delta)^s$ à un problème d'extension au demi-espace via une équation aux dérivées partielles.

Pour cela et pour plus de commodité nous écrivons la puissance fractionnaire s comme :

$$s = \frac{1-a}{2}, \quad \text{avec} \quad -1 < a < 1.$$

Nous commençons par définir le problème d'extension au demi-espace :

Définition 2.1 (Problème d'extension)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit le problème d'extension pour φ par :*

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \tag{4}$$

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{5}$$

Nous voyons bien que pour une donnée initiale φ définie sur l'espace $\mathbb{R}^n$, le problème d'extension consiste à poser une équation aux dérivées partielles au demi-espace : $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$: on a donc gagné une dimension supplémentaire et c'est dans ce sens que l'on parlera ici d'un *problème d'extension.*

Voici le théorème principal de cette section. Il permet de relier l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ avec les propriétés des solutions du problème d'extension définit ci-dessus. Plus précisément on a :

Théorème 2.1 (Relation entre le Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $-1 < a < 1$. Alors :*

(i) Il existe une fonction $P_a :]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution classique de l'équation (4) telle que la fonction

$$u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x), \quad \text{pour tout} \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n,$$

est bien une solution classique du problème d'extension (4)-(5) pour φ.

(ii) De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Comme annoncé, ce résultat nous donne l'action du Laplacien Fractionnaire sur la donnée initiale φ comme une limite particulière de la solution $u(t,x)$ du problème d'extension (4)-(5) et nous verrons qu'il existe plusieurs méthodes pour démontrer cette identité.

Avant de démontrer en toute généralité ce théorème, il est intéressant de traiter le cas $a = 0$ qui correspond à l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Ceci sera fait dans la Section 2.1 ci-après ; le cas général quant à lui sera étudié dans la Section 2.2.

2.1 Le cadre $a = 0$

Lorsque $a = 0$, le problème (4)-(5) devient

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x). & \end{cases} \tag{7}$$

Le traitement de ce type de problème est totalement classique (voir par exemple toute la théorie développée dans [12]), mais avant de nous y attaquer il est nécessaire d'introduire une notion qui sera de grande utilité par la suite.

Définition 2.2 (Noyau de Poisson). *Une fonction $P(x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est un noyau de Poisson si elle vérifie :*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dx = 1.$

(ii) La famille $(P_t)_{t>0}$ où $P_t(x) = t^{-n}P\left(\frac{x}{t}\right)$ avec $t > 0$, est une approximation de l'identité.

(iii) $P(t,x) := P_t(x)$ est une fonction harmonique dans les variables $(t, x_1, \ldots, x_n) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, c'est à dire, pour tout $(t, x_1, \ldots, x_n) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ on a $\Delta_{t,x}P(t,x) = \partial_t^2 P(t,x) + \Delta_x P(t,x) = 0$.

L'exemple de base lorsque $n \geq 2$ est donné par la fonction $P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ où $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$, de sorte que $P_t(x) = \frac{c_n t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ est bien un noyau de Poisson au sens de la définition précédente (voir [9], Chapitre 2).

Une fois que nous disposons de ce noyau de Poisson $P_t(x)$ il est facile d'obtenir des solutions classiques du problème (7) : la fonction $u(t,x) = \varphi * P_t(x)$ est harmonique dans les variables $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

Nous avons donc une solution $u(t,x)$ du problème (7) lorsque $a = 0$ et nous cherchons maintenant à relier l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ avec une limite lorsque $t \to 0^+$ de $\partial_t u(t,x)$. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution du problème d'extension (7) donnée par $u(t,x) = \varphi * P_t(x)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = -C\,\partial_t u(0,x), \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Par la définition de dérivée à droite par rapport au temps t et par la définition de la fonction $u(t,x)$ ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t u(0,x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{u(t,x) - u(0,x)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\varphi * P_t(x) - \varphi(x)) \\
&= c_n \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(y) - \varphi(x))\,t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy \quad \text{ici on a utilisé le fait que } \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y)dy = 1 \\
&= c_n \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy = c_n \lim_{t\to 0^+}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy. \qquad (8)
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0,$ on a par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}dy = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x-y|^{n+1}}dy.$$

En changeant les limites dans l'expression (8), lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient

$$\partial_t u(0,x) = -c_n \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+1}}dy = -c_n\, vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+1}}dy,$$

d'où, par la définition de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ comme opérateur d'intégrale singulière on conclut que

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = -C\,\partial_t u(0,x),$$

avec $C = \frac{C_2(n,\frac{1}{2})}{c_n} > 0$. ■

Nous voyons, grâce à cette démonstration, qu'il n'est pas très difficile d'obtenir la relation

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \lim_{t\to 0^+} \partial_t u(t,x)$$

dans le cadre du problème (7) une fois que l'on dispose des bons outils. Nous allons voir dans la section qui suit comment généraliser ce résultat et sa démonstration au cas $-1 < a < 1$.

2.2 Le cadre $-1 < a < 1$. Noyaux de type Poisson.

Nous nous intéressons maintenant au problème d'extension :

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \tag{9}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \text{où } -1 < a < 1. \tag{10}$$

Dans cette section nous allons étudier ce problème et nous allons démontrer la relation

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$$

énoncée dans le Théorème 2.1 ; pour cela nous suivons essentiellement les mêmes étapes données dans le cas $a = 0$ de la section précédente, à savoir :

1) Recherche d'une solution classique à l'aide des noyaux de type Poisson.
2) Étude de la limite $\lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$.

De façon totalement similaire au cas $a = 0$ nous avons la définition suivante :

Définition 2.3 (Noyau de type Poisson)**.** *Soit $-1 < a < 1$. Une fonction $P_a :]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est régulière dans les variables (t,x), est solution classique du problème (9)-(10) et telle que la famille de fonctions $P_a(t,\cdot)$ est une approximation de l'identité, sera nommée un noyau de type Poisson.*

Grâce à cette notion de noyau de type Poisson on peut alors trouver des solutions classiques du problème (9)-(10) en prenant $\varphi * P_a(t,\cdot)$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Noyau de type Poisson et solutions classiques

La recherche d'un noyau de type Poisson pour le problème (9)-(10) n'est pas une tâche simple, mais nous allons expliquer ici comment obtenir ce noyau à partir d'un problème d'extension harmonique connu.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ soit $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $\Delta_{y,x} = \Delta_y + \Delta_x$. On appelle $\widetilde{u} : \mathbb{R}^{1+k+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une extension harmonique de φ aux dimensions $1+k+n$ si $\widetilde{u}(t,x)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^{1+k} \\ \widetilde{u}(0,x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{11}$$

Il est bien connu que ce problème admet une solution fondamentale (voir [9] Chapitre 2 ou aussi [7] Partie I, Chapitre 2) donnée par la formule

$$Q(y,x) = C_{n,k}\frac{1}{(|y|^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+k}{2}}}, \quad \text{pour } (y,x) \neq 0.$$

Nous allons voir comment obtenir à partir de cette solution fondamentale un noyau de type Poisson adapté à nos besoins.

Supposons que l'extension harmonique $\widetilde{u}(y,x)$ associée à φ est symétrique radiale dans la variable $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ et faisons le changement de variable suivant $y \longmapsto |y| := t$. Ainsi, le Laplacien $\Delta_{y,x}$ appliqué à $\widetilde{u}(|y|,x)$ s'écrit :

$$\Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = \partial_t^2 u(t,x) + \frac{k}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x).$$

On remarquera la similitude de cette équation avec notre problème initial donné dans l'équation (9) : en effet il suffit de remplacer k par $a \in]-1,1[$ et cette identification nous donne une piste pour déterminer un noyau de type Poisson associé au problème (11). Ainsi, inspirés par cette similitude on pose

$$Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}}, \tag{12}$$

avec la constante $C_{n,a} = -(n-1+a)\frac{2\pi^{\frac{n+1+a}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1+a}{2})}$ et nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Pour tout $-1 < a < 1$ la fonction*

$$Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}},$$

est une solution classique de l'équation $\partial_t^2 Q_a(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t Q_a(t,x) + \Delta_x Q_a(t,x) = 0$, sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

Preuve. La fonction $Q_a(t,x)$ est régulière lorsque $(t,x) \neq 0$ et on a :

$$\Delta_x Q_a(t,x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{(n-1+a)(n+1+a)|x|^2}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+2}} - C_{n,a}\frac{n(n-1+a)}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}},$$

d'autre part,

$$\frac{a}{t}\partial_t Q_a(t,x) = -C_{n,a}\frac{a(n-1+a)}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}} \quad \text{et} \quad \partial_t^2 Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{(n-1+a)(n+1+a)t^2}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+2}} - C_{n,a}\frac{(n-1+a)(n+1+a)}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}},$$

d'où,

$$\partial_t^2 Q_a(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t Q_a(t,x) + \Delta_x Q_a(t,x) = C_{n,a}(t^2+|x|^2)\frac{(n-1+a)(n+1+a)}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+2}} - C_{n,a}\frac{(n-1+a)(n+1+a)}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}} = 0.$$

■

Nous avons trouvé une solution classique de l'équation (9) donnée par la formule (12). Néanmoins la famille de fonctions $(Q_a(t,\cdot))_{t>0}$ n'est pas une approximation de l'identité et c'est pourquoi elle ne définit pas de noyau de type Poisson dans le sens de la Définition 2.3. En effet, si $Q_a(t,\cdot)$ est une approximation de l'identité alors on a pour $M > 0$ que $\lim_{t\to 0^+}\int_{|x|>M}|Q_a(t,x)|dx = 0$, d'où par le théorème de convergence dominée on obtient $\int_{|x|>M}|Q_a(0,x)|dx = 0$, donc, presque pour tout $|x| > M$ on a $Q_a(0,x) = 0$. D'autre part, par la définition de la fonction $Q_a(t,x)$ on voit que $Q_a(0,x) = C_{n,a}\frac{1}{|x|^{n-1+a}}$ pour tout $|x| > M$ et on obtient une contradiction.

L'idée clef pour trouver le noyau de type Poisson est de considérer l'équation conjuguée de l'équation (9) définie par :

$$\partial_t^2 u(t,x) - \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x). \tag{13}$$

Il existe une relation très importante entre l'équation du problème d'extension (9) et son équation conjuguée (13) qui est annoncée dans le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Si u est une solution classique de l'equation (9), alors la fonction*

$$w(t,x) := t^a\partial_t u(t,x)$$

est une solution classique de l'équation conjuguée (13). Inversement, si w est une solution de l'équation (13), alors la fonction

$$u(t,x) = -t^{-a}\partial_t w(t,x)$$

est une solution classique de l'équation (9).

Preuve. Supposons que $u(t,x)$ est une solution classique de l'équation (9). Donc, en dérivant nous avons :

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 w(t,x) - \frac{a}{t}\partial_t w(t,x) + \Delta_x w(t,x) = \partial_t^2(t^a\partial_t u)(t,x) - \frac{a}{t}\partial_t(t^a\partial_t u)(t,x) + \Delta_x(t^a\partial_t u)(t,x)\\
&= t^a\left(\partial_t\Delta_x u(t,x) - \frac{a^2}{t^2}\partial_t u(t,x) - \frac{a}{t}\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a(a-1)}{t^2}\partial_t u(t,x) + \frac{2a}{t}\partial_t^2 u(t,x) + \partial_t^3 u(t,x)\right)\\
&= t^a\left(\partial_t\Delta_x u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t^2 u(t,x) - \frac{a}{t^2}\partial_t u(t,x) + \partial_t^3 u(t,x)\right)\\
&= t^a\left(\partial_t\left(\partial_t^2 u + \frac{a}{t}\partial_t u\right)(t,x) + \partial_t\Delta_x u(t,x)\right) = t^a\partial_t\left(\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $w(t,x)$ est une solution classique de l'équation (13). Alors :

$$\begin{aligned}
&\partial_t^2 u(t,x)+\frac{a}{t}\partial_t u(t,x)+\Delta_x u(t,x)=\partial_t^2(-t^{-a}\partial_t w)(t,x)+\frac{a}{t}\partial_t(-t^{-a}\partial_t w)(t,x)+\Delta_x(-t^{-a}\partial_t w)(t,x)\\
=\;& -t^{-a}\left(\partial_t\Delta_x w(t,x)-\frac{a^2}{t^2}\partial_t w(t,x)+\frac{a}{t}\partial_t^2 w(t,x)+\frac{a(a+1)}{t^2}\partial_t w(t,x)-\frac{a}{t}\partial_t^2 w(t,x)+\partial_t^3 w(t,x)\right)\\
=\;& -t^{-a}\left(\partial_t\Delta_x(t,x)+\frac{a}{t^2}\partial_t w(t,x)-\frac{a}{t}\partial_t^2 w(t,x)+\partial_t^3 w(t,x)\right)\\
=\;& -t^{-a}\left(\partial_t\left(\partial_t^2 w-\frac{a}{t}\partial_t w\right)(t,x)+\partial_t\Delta_x w(t,x)\right)=-t^{-a}\partial_t\left(\partial_t^2 w(t,x)-\frac{a}{t}\partial_t w(t,x)+\Delta_x w(t,x)\right)=0.
\end{aligned}$$

■

Maintenant nous avons les outils nécessaires pour trouver le noyau de type Poisson $P_a(t,x)$. Par la Proposition 2.1 on sait que

$$Q_{-a}(t,x)=C_{n,-a}\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1-a}{2}}}$$

est une solution classique de l'équation (13). De plus, par le Lemme 2.1 on sait que,

$$-t^{-a}\partial_t Q_{-a}(t,x)=-C_{n,-a}(n-1-a)\,\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

est une solution classique de l'équation (9). Définissons alors la fonction

$$P_a(t,x)=c_{n,a}\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}},\quad \text{pour tout}\quad (t,x)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \tag{14}$$

avec une constante $c_{n,a}$ qui sera définie après.

Notons que la différence principale entre la fonction $Q_a(t,x)$ et la fonction $P_a(t,x)$ est la puissance de l'expression $(t^2+|x|^2)$: $\frac{n-1-a}{2}$ dans la première fonction et $\frac{n+1-a}{2}$ dans la deuxième fonction.

On a vu que $P_a(t,x)$ est bien une solution classique de l'équation (9) car la fonction $-t^{-a}\partial_t Q_{-a}(t,x)=-C_{n,-a}(n-1-a)\,\dfrac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ ci-dessus est une solution classique de l'équation (9). Maintenant, on va montrer que $P_a(t,\cdot)$ est une famille d'approximation de l'identité. Tout d'abord remarquons qu'on peut écrire

$$P_a(t,x)=t^{-n}P_a\left(1,\frac{x}{t}\right),$$

c'est à dire, $P_a(t,\cdot)$ est la dilatation par rapport au temps $t>0$ de la fonction $P_a(1,\cdot)$. Ensuite on remarque que la fonction $P_a(1,x)=c_{n,a}\dfrac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}d\rho\quad &\leq\quad \int_0^1\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}d\rho+\int_1^{+\infty}\frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+1-a}}d\rho\\
&=\quad \int_0^1\frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}d\rho+\int_1^{+\infty}\rho^{a-2}d\rho<+\infty,
\end{aligned}$$

la première intégrale est toujours convergente. D'autre part, comme $-1<a<1$ alors $a-2<-1$, donc la deuxième intégrale ci-dessus converge, également on a bien que $P_a(1,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$.

En choisissant la constante $c_{n,a}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P_a(1,x)dx = 1$, alors on obtient que $\|P_a(t,\cdot)\|_{L^1} = 1$ pour tout $t > 0$. Remarquons que $c_{n,a} > 0$ car $P_a(1,x)$ est une fonction positive.

Ensuite, puisque $1 - a > 0$, alors pour $M > 0$ et pour tout $|x| > M$ on a, $\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} \to 0$, lorsque $t \to 0^+$ et de plus, pour $0 < t < 1$, on a la majoration

$$c_{n,a}\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} \leq c_{n,a}\frac{1}{|x|^{n+1-a}}.$$

Comme la fonction $\frac{1}{|x|^{n+1-a}}$ est intégrable sur $|x| > M$ par le théorème de convergence dominée on conclut que

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{|x|>M} P_a(t,x)dx = 0,$$

donc, $P_a(\cdot,t)$ est une famille d'approximation de l'identité. En conclusion, la fonction $P_a(t,x)$ est le noyau de type Poisson recherché.

2.2.2 Démonstration du Théorème 2.1

Le Théorème 2.1 a deux parties (i) et (ii).

On étudie tout d'abord le premier point. À l'aide de la fonction $P_a(t,x)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on trouve des solutions classiques du problème d'extension au demi-espace (9)-(10) de la forme :

$$u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\,P_a(t,x-y)dy = c_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)\,t^{1-a}}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}dy, \quad \text{pour} \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n.$$

En effet, comme $P_a(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral on obtient donc, pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) &= \partial_t^2(\varphi * P_a(t,\cdot))(x) + \frac{a}{t}\partial_t(\varphi * P_a(t,\cdot))(x) + \Delta_x(\varphi * P_a(t,\cdot))(x)\\ &= \varphi * \Big(\partial_t^2 P_a(t,\cdot) + \frac{a}{t}\partial_t P_a(t,\cdot) + \Delta_x P_a(t,\cdot)\Big)(x) = 0.\end{aligned}$$

De plus, comme φ est uniformément continue et bornée, la limite suivante a lieu uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(0,x) = \lim_{t\to 0^+} u(t,x) = \lim_{t\to 0^+}\varphi * P_a(t,\cdot)(x) = \varphi(x).$$

De cette façon on a montré la partie (i) du Théorème 2.1.

On étudie maintenant la partie (ii) du Théorème 2.1. Une fois qu'on a trouvé des solutions explicites du problème d'extension (9)-(10) on cherche maintenant à montrer l'égalité :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C\lim_{t\to 0^+} t^a\partial_t u(t,x).$$

Afin de simplifier les calculs on va considérer le changement de variable suivant :

$$z = \left(\frac{t}{1-a}\right)^{1-a}, \quad \text{ou de façon équivalente,} \quad t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}. \tag{15}$$

Ce changement de variable nous permettra d'obtenir plus directement la relation recherchée. Avec ce changement de variable notons $u(t,x) = u\left((1-a)z^{\frac{1}{1-a}}, x\right) := v(z,x)$, alors on a

$$\partial_z v(z,x) = \frac{1}{(1-a)^a}t^a\partial_t u(t,x), \tag{16}$$

et on obtient $\partial_t^2 u(t,x) + \dfrac{a}{t}\partial_t u(t,x) = z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x)$. La nouvelle équation dans les variables $(z,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ est alors

$$z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0. \tag{17}$$

De cette façon, on considère le problème d'extension pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{18}$$

En prenant le changement de variable (15) dans le noyau de type Poisson (14) on obtient

$$P_a(t,x) = P_a\left((1-a)z^{\frac{1}{1-a}}, x\right) = c_{n,a}\frac{(1-a)^{\frac{1}{1-a}}z}{\left((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x|^2\right)^{\frac{n+1-a}{2}}} := \widetilde{P}_a(z,x).$$

Comme $P_a(t,x)$ est une solution classique de l'équation (9) par le changement de variable (15) on a vu que $\widetilde{P}_a(z,x)$ est une solution classique de l'équation (17). D'autre part, $\widetilde{P}_a(z,\cdot)$ est une famille d'approximation de l'identité puisque le changement de variable, $t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}$, est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. Ainsi, la fonction $\widetilde{P}_a(z,x)$ définie ci-dessus vérifie $\widetilde{P}_a(z,x) > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{P}_a(z,x)dx = 1$ et est bien un noyau de type Poisson dans le sens de la Définition 2.3 pour le problème d'extension (18).

De cette façon, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtient des solutions classiques du problème (18) de la forme :

$$v(z,x) = \varphi * \widetilde{P}_a(z,\cdot)(x) = \widetilde{c}_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\widetilde{P}_a(z,x-y)dy = \widetilde{c}_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)\,z}{\left((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1-a}{2}}}dy,$$

pour $(z,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, où $\widetilde{c}_{n,a} := (1-a)^{\frac{1}{1-a}}c_{n,a} > 0$.

Avec cette nouvelle formulation, revenons à l'étude du point (ii). Par la relation (16) on sait que

$$\partial_z v(z,x) = \frac{1}{(1-a)^a}\,t^a\partial_t u(t,x),$$

alors pour montrer l'identité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C\lim\limits_{t\to 0^+} t^a\partial_t u(t,x)$ on va montrer que l'on a pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ la relation suivante :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C\,\partial_z v(0,x), \tag{19}$$

avec une constante $C > 0$.

Une fois que nous avons posé le problème en terme des variables z et x, l'obtention de la relation (19) suit le même schéma réalisé pour le cas $a = 0$. En effet, par la définition de dérivée et par les propriétés de $\widetilde{P}_a(z,t)$ ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \partial_z v(0,x) &= \lim_{z\to 0^+}\frac{v(z,x) - v(0,x)}{z} \\ &= \lim_{z\to 0^+}\frac{1}{z}\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi(y) - \varphi(x))\widetilde{P}_a(z,x-y)dy = \lim_{z\to 0^+}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{z}\int_{|x-y|>\varepsilon}(\varphi(y) - \varphi(x))\widetilde{P}_a(z,x-y)dy. \end{aligned} \tag{20}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0^+}\frac{1}{z}\int_{|x-y|>\varepsilon}(\varphi(y) - \varphi(x))\widetilde{P}_a(z,x-y)dy &= C\lim_{z\to 0^+}\frac{1}{z}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{z\,(\varphi(y) - \varphi(x))}{\left((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1-a}{2}}}dy \\ &= C\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x-y|^{n+1-a}}dy. \end{aligned}$$

Alors, en changeant les limites dans la dernière formule de l'expression (20) on obtient :

$$\partial_z v(0,z) = -C \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+1-a}} dy = -C\, vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+1-a}} dy = -C(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x),$$

avec la constante $C = \frac{C\left(n,\frac{1-a}{2}\right)}{\widetilde{c}_{n,a}} > 0$. ■

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ et le problème d'extension au demi-espace pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, exprimée à travers la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C\,\partial_z v(0,x)$ et par conséquent par la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim\limits_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$ nous montre comment la puissance fractionnaire $\frac{1-a}{2}$ avec $-1<a<1$ peut être récupérée via le problème d'extension au demi-espace (9)-(10).

2.3 Le cadre $-1<a<1$. Transformation de Fourier et EDO

Dans cette section on souhaite donner une autre démonstration du Théorème 2.1 sans passer par les noyaux de type Poisson. Plus précisément, on va résoudre le problème d'extension

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n \text{ et } z>0 \\ v(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

au niveau de Fourier par rapport à la variable x. De cette façon on obtient pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, le problème de Cauchy suivant avec une équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 \widehat{v}(z,\xi) - |\xi|^2\widehat{v}(z,\xi) = 0, \qquad z>0 \\ \widehat{v}(0,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{21}$$

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension exprimée dans l'égalité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C\,\partial_z v(0,x)$ s'écrit au niveau de Fourier par :

$$|\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi) = -C\,\partial_z\widehat{v}(0,\xi). \tag{22}$$

En utilisant la même stratégie que la section antérieure, tout d'abord nous chercherons des solutions classiques $\widehat{v}(z,\xi)$ du problème (21) et ensuite nous vérifierons l'égalité (22).

Étude de l'existence.

Pour résoudre le problème (21) considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\phi''(z) - \phi(z) = 0 \qquad z>0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim\limits_{z\to+\infty}\phi(z) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

En effet, si nous supposons qu'il existe $\phi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème (23) alors si on pose pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\widehat{v}(z,\xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z), \quad \text{pour tout} \quad z\in]0,+\infty[,$$

on obtient que $\widehat{v}(z,\xi)$ est bien une solution classique du problème (21) initial puisque l'on a $\partial_z \widehat{v}(z,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}\phi'(|\xi|^{1-a}z)$ et $\partial_z^2 \widehat{v}(z,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{2(1-a)}\phi''(|\xi|^{1-a}z)$, alors

$$z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 \widehat{v}(z,\xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(z,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^2 \left((|\xi|^{1-a}z)^{\frac{-2a}{1-a}}\phi''(|\xi|^{1-a}z) - \phi(|\xi|^{1-a}z) \right) = 0.$$

Une fois que nous avons vu comment obtenir un solution de problème (21) à partir du problème (23) nous nous concentrons maintenant dans la résolution de celui-ci. Pour cela nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Méthode de Perron)**.** *Soient $I =]a,b[$ un intervalle (fini ou non), $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ et $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Notons $\mathcal{D}^+$ l'ensemble des distributions positives sur I. Soient*

$$S^- = \left\{ A \in H^1_{loc}(I) : -(-A'' + wA) \in \mathcal{D}^+,\ \lim_{z\to a^+} A(z) = a_1,\ \lim_{z\to b^-} A(z) = b_1 \right\} \quad (sous-solutions)$$

et

$$S^+ = \left\{ B \in H^1_{loc}(I) : -B'' + wB \in \mathcal{D}^+,\ \lim_{z\to a^+} B(z) = a_1,\ \lim_{z\to b^-} B(z) = b_1 \right\} \quad (sur-solutions)$$

Si $A \in S^-$ et $B \in S^+$, alors, il existe ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $A(z) \le \phi(z) \le B(z)$ pour tout $z \in I$ et elle est une solution classique du problème

$$\begin{cases} -\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0 \qquad sur \quad I, \\ \lim_{z\to a^+} \phi(z) = a_1, \\ \lim_{z\to b^-} \phi(z) = b_1. \end{cases}$$

La démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans l'annexe Section 5.2.

Afin d'utiliser ce théorème nous remarquons que l'équation différentielle

$$z^{\frac{-2a}{1-a}}\phi''(z) - \phi(z) = 0,$$

est équivalente à l'équation différentielle

$$-\phi''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}\phi(z) = 0,$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Évidemment, si on multiplie la première équation par -1 et après on la divise par $z^{\frac{-2a}{1-a}}$ $(z > 0)$ on obtient la deuxième équation. De cette façon, on a écrit l'équation différentielle qu'on veut résoudre dans le problème (23) sous la forme qui permet d'utiliser le Théorème 2.3.

Prenons alors comme intervalle $I =]0,+\infty[$, les conditions au bord $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ et la fonction $w(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}$. La méthode de Perron est simple nous devons seulement trouver deux fonctions $A \in S^-$ et $B \in S^+$ et une application directe du Théorème 2.3 nous assure l'existence d'une solution classique ϕ du problème (23) telle que $A \le \phi \le B$ sur $]0,+\infty[$. On va commencer par trouver une fonction $A \in S^-$.

- Determination de la fonction A.

  On va diviser notre étude selon les valeurs du paramètre a :

  (i) Si $0 \le a < 1$. Dans ce cas $\frac{-2a}{1-a} \le 0$. Soit la fonction A définie par :

$$A(z) = \begin{cases} f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z}, & 0 \le z \le 1, \\ 0, & z > 1, \end{cases} \tag{24}$$

où la fonction $f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$ avec $c_1 = \dfrac{e^{-1}}{e^{-1}-e} < 0$ et $c_2 = \dfrac{-e}{e^{-1}-e} > 0$ est une solution classique de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} f''(z) = f(z), & 0 < z < 1, \\ f(0) = 1, \quad f(1) = 0. \end{cases}$$

Par la définition de $A(z)$, il est évident que $\lim\limits_{z\to 0^+} A(z) = \lim\limits_{z\to 0^+} f(z) = f(0) = 1$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} A(z) = 0$. Montrons maintenant les autres propriétés de la fonction A. D'abord, on va montrer que pour tout $z \in]0,+\infty[$ on a $A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) \geq 0$. Par la formule des sauts et la définition de $A(z)$ on a au sens des distributions

$$\begin{aligned} A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) &= A''(z)\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (A'(1^+) - A'(1^-))\delta_1 - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z)\mathbb{1}_{]0,1[}(z) \\ &= (f''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} f(z))\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (0 - f'(1^-))\delta_1 = f(z)(1 - z^{\frac{2a}{1-a}})\mathbb{1}_{]0,1[}(z) - f'(1^-)\delta_1. \end{aligned}$$

Pour $0 < z < 1$ on a : d'abord, $0 < z^{\frac{2a}{1-a}} < 1$ car $\frac{2a}{1-a} \geq 0$, donc $1 - z^{\frac{2a}{1-a}} > 0$. Ensuite, comme $\dfrac{c_2}{-c_1} = e^2 > e^{2z}$, alors $c_2 e^{-z} \geq -c_1 e^z$, c'est à dire, $f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z} \geq 0$. Finalement, comme $f'(z) = c_1 e^z - c_2 e^{-z} < 0$ alors $-f'(1^-) > 0$.

De cette façon, par la formule précédent on obtient $A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) \geq 0$. D'autre part, $A \in H^1_{loc}(]0,+\infty[)$ car : f et f' sont bornées sur $]0,+1[$ et $A = 0$ sur $]1,+\infty[$, alors A et A' sont intégrables sur tout compact de $]0,+\infty[$. Finalement, comme $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in L^1_{loc}(]0,+\infty[)$ est une fonction positive on a que $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in \mathcal{D}^+$ et alors on conclut que $A \in S^-$.

(ii) Si $-1 < a < 0$. Dans ce cas on a $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$. Maintenant, définissons une autre fonction A par :

$$A(z) = \begin{cases} 1 + \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)} z^{\frac{-2a}{1-a}}, & 0 \leq z < z_0 \\ \\ 0, & z \geq z_0, \text{ où } 0 < z_0 = \left(\frac{-2a(1+a)}{(1-a)^2}\right)^{-\frac{1-a}{2a}} < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Montrons que $A \in S^-$. Tout d'abord, on voit par la définition de A que : $\lim\limits_{z\to 0^+} A(z) = 1$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} A(z) = 0$. Ensuite, par la formule des sauts on a au sens des distributions que :

$$A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) = \left(z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} - \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)}\right) \mathbb{1}_{]0,z_0[}(z) - A'(z_0^-)\delta_{z_0}.$$

Comme $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ alors $\frac{-2a}{1-a} - 1 < 0$, donc pour $z \in]0,+\infty[$ on a :

$$0 < z < z_0 \Rightarrow z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} > 0,$$

d'où on obtient que $\left(z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} - \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)}\right)\mathbb{1}_{]0,z_0[}(z) > 0$. D'autre part $-A'(z_0^-) = \frac{1+a}{1-a} z_0^{\frac{a+1}{a-1}} > 0$ et comme $A \in L^1([0,+\infty[)$ alors on conclut que $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in \mathcal{D}^+$.
Finalement, $A \in H^1_{loc}(]0,+\infty[)$ car $A \in L^1(]0,+\infty[)$ et comme $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ on a en plus que

$$A'(z) = \begin{cases} -\frac{1+a}{1-a} z^{\frac{a+1}{a-1}} & , \quad 0 \leq z < 1 \\ 0 & , \quad z > 0 \end{cases}$$

appartient à $L^1(]0,+\infty[)$. Donc on a bien que $A \in S^-$.

- Détermination de la fonction B.

  Ici il n'est pas nécessaire de diviser notre étude en deux cas puisque la fonction donnée convient dans ces cas. En effet, définissons alors la fonction B par :

$$B(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq 1, \\ z^{-\varepsilon}, & z > 1, \end{cases} \tag{26}$$

  avec $\varepsilon > 0$. Montrons que $B \in S^+$. Tout d'abord par la formule des sauts on a au sens des distributions que

$$B''(z) = \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z) + (B'(1^+) - B'(1^-))\delta_1,$$

  comme $B'(1^+) - B'(1^-) = \varepsilon$ on a alors

$$-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z) + \varepsilon\delta_1,$$

  dans l'expression ci-dessus on voit que pour montrer $-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) \geq 0$ il suffit de montrer que

$$z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)} \geq 0.$$

  Dans l'expression ci-dessus on a alors que $z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)} \geq 0$ lorsque $z \geq ((\varepsilon+1)\varepsilon)^{\frac{1-a}{2}}$ et de cette façon, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $z \geq ((\varepsilon+1)\varepsilon)^{\frac{1-a}{2}}$ on obtient $-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) \geq 0$.

  Comme les fonctions B et B' sont bornées on a bien que $B \in H^1_{loc}(]0,+\infty[)$, alors pour montrer que $B \in S^+$ on doit vérifier que $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in \mathcal{D}^+$. Pour cela tout d'abord on va montrer que $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in L^1_{loc}(]0,+\infty[)$. On a vu que presque pour tout $z \in]0,+\infty[$, on a

$$-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z).$$

  Comme la fonction $(z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon+1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z)$ appartient à $L^1_{loc}(]0,+\infty[)$ il reste de montrer que la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z)$ est localement intégrable dans $]0,+\infty[$. Pour cela on va considérer deux cas : d'abord, si $\frac{-2a}{1-a} \leq 0$ alors $\frac{2a}{1-a} \geq 0$ et il est évidente que la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}$ est localement intégrable dans $]0,+\infty[$. D'autre part, si $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ alors $-1 < \frac{2a}{1-a} < 0$ et la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}$ est toujours intégrable près de l'origine et par conséquent localement intégrable dans $]0,+\infty[$. Finalement, comme $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in L^1_{loc}(]0,+\infty[)$ est une fonction positive sur $]0,+\infty[$, on a $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in \mathcal{D}^+$. De cette façon on conclut que $B \in S^+$.

Maintenant que nous disposons des hypothèses du théorème de Perron, nous pouvons l'appliquer pour obtenir l'existence d'une fonction ϕ solution du problème (23) et de cette façon nous avons terminé l'étude de l'existence des solutions du problème (21).

Étude de l'égalité.

On cherche maintenant à étudier l'identité

$$\partial_z\widehat{v}(0,\xi) = -C\,\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}.$$

Nous savons que $\partial_z\widehat{v}$ s'écrit comme $\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}\phi'(|\xi|^{1-a}z)$. Si on peut montrer que $\lim_{z\to 0^+}\phi'(z) = -C$ avec $C > 0$, alors on obtiendrait :

$$\lim_{z\to 0^+}\partial_z z\widehat{v}(z,\xi) = \lim_{z\to 0^+}\left(\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}\phi'(|\xi|^{1-a}z)\right) = -C\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}$$

qui est l'identité recherchée. Ainsi, la seule chose que l'on doit montrer est que l'on a

$$\lim_{z\to 0^+}\phi'(z) = -C \quad \text{avec} \quad C > 0.$$

Mais comme ϕ est solution du problème (23) on a $A(z) \leq \phi(z) \leq B(z)$ pour tout $z \in [0, +\infty[$ alors par la définition des fonctions A et B (formules (24), (25) et (26)) on a que $0 \leq \phi(z) \leq 1$ pour tout $z \in [0, \infty[$. Cela nous montre que $\phi'(z)$ est bornée près de l'origine, car si l'on a que $\lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(z) = +\infty$ $\left(\text{ou} \quad \lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(z) = -\infty\right)$ alors la fonction $\phi(z)$ a un comportement asymptotique par rapport à l'axe $z = 0$ ce qui contredit le fait que $0 \leq \phi \leq 1$.

D'autre part, on a $\phi''(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}\phi(z)$ alors $\phi''(z) \geq 0$, cela montre que $\phi'(z)$ est croissante et alors il existe $\lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(z) := l$. Montrons maintenant que $l < 0$. Comme $\phi(0) = 1$ et $\phi(z) \leq B(z) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1[$ on a deux possibilités : $\phi(z) = 1$ près de l'origine ou $\phi(z)$ est décroissante près de l'origine. Si $\phi(z) = 1$ pour tout $z \in [0, \delta[$ (avec $\delta > 0$ petit) on a une contradiction car $\phi(z)$ vérifie l'équation $-\phi''(z) + z^{\frac{-2a}{1-a}}\phi(z) = 0$. Alors nécessairement $\phi(z)$ est décroissante près de l'origine, ce qui montre que $\phi'(z) < 0$ près de l'origine. Finalement on conclut que $\lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(z) = l = -C$, avec $0 < C < +\infty$ et de cette façon on conclut la preuve de la relation (22) et la démonstration du Théorème 2.1 en utilisant la transformation de Fourier.

Remarque 2.1. *La relation* $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim\limits_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ *peut également être étudiée directement au niveau de Fourier :* $|\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi) = -C \lim\limits_{t\to 0^+} t^a \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$ *en utilisant l'équation* $\partial_t^2 u(t, x) + \dfrac{a}{t}\partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0$ *au lieu du problème (21) étudie ci-dessus.*

En effet, en prenant la transformation de Fourier par rapport à x on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\left\{\begin{array}{r} \partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) + \dfrac{a}{t}\partial_t \widehat{u}(t, \xi) - |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = 0, \qquad t > 0 \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{array}\right. \tag{27}$$

Comme dans le cas antérieur, pour trouver une solution classique $\widehat{u}(t, \xi)$ on résoud d'abord le problème

$$\left\{\begin{array}{r} \psi''(t) + \frac{a}{t}\psi'(t) - \psi(t) = 0, \qquad t > 0, \\ \psi(0) = 1, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0. \end{array}\right. \tag{28}$$

En utilisant le changement de variable $t = (1 - a)z^{\frac{1}{1-a}}$ notons $\psi(t) = \psi\left((1 - a)z^{\frac{1}{1-a}}\right) := \phi(z)$. Ensuite, on a que $t^a\,\psi'(t) = (1 - a)^a\phi'(z)$ et $\phi''(z) = \psi''(t)z^{\frac{2a}{1-a}} + \left(\dfrac{a}{1 - a}z^{\frac{2a-1}{1-a}}\right)\psi'(t)$, d'où :

$$\psi''(t) + \frac{a}{t}\psi'(t) = \phi''(z)z^{\frac{-2a}{1-a}}.$$

De cette façon on arrive au problème (23) avec la fonction inconnue $\phi(z)$. Par le Théorème 2.3 on a vu qu'il existe une solution classique $\phi(z)$, donc, en retournant à la variable t on obtient que $\psi(t) := \phi\left(\left(\frac{t}{1-a}\right)^{1-a}\right)$ est bien une solution classique du problème (28).
Soit maintenant

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\psi(|\xi|t).$$

Comme $\partial_t \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|\psi'(|\xi|t)$ et $\partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^2\psi''(|\xi|t)$ alors :

$$\partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) + \frac{a}{t}\partial_t \widehat{u}(t, \xi) - |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = |\xi|\widehat{\varphi}(\xi)\left(\psi''(|\xi|t) + \frac{a}{|\xi|t}\psi'(|\xi|t) - \psi(|\xi|t)\right) = 0,$$

de plus le fait $\psi(0) = \phi(0) = 1$ implique que $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$. Alors $\widehat{u}(t, \xi)$ est bien une solution classique du problème (27).

Montrons maintenant l'égalité $|\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t \widehat{u}(t,\xi)$. Par la définition de $\widehat{u}(t,\xi)$ on voit que

$$\lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t \widehat{u}(t,\xi) = \lim_{t\to 0^+} t^a\, \widehat{\varphi}(\xi)\psi'(|\xi|t)|\xi| = \lim_{t\to 0^+} (|\xi|t)^a \psi'(|\xi|t)\, |\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi) = -C\, |\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi),$$

avec $-C = \lim_{t\to 0^+} t^a\, \psi'(t)$. Par la relation $t^a\psi'(t) = (1-a)^a \phi'(z)$ on obtient donc qu'il existe $C > 0$ tel que $-C = \lim_{t\to 0^+} t^a\, \psi'(t)$.

3 Applications aux fonctions harmoniques fractionnaires

Dans cette section nous montrerons quelques applications de la relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension au demi-espace. Plus précisément, nous monterons trois conséquences de la relation $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$:

(i) Extension par réflexion de l'extension harmonique à l'espace tout entier,

(ii) L'inégalité de Harnack,

(iii) La formule de monotonie de Almgren.

Pour ces trois applications nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 3.1. *Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ l'opérateur Laplacien Fractionnaire, avec $-1 < a < 1$ et $R > 0$ un réel. On dit que φ est harmonique fractionnaire dans un voisinage de l'origine si :*

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad |x| < R.$$

Il est important de remarquer que la relation entre l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$, avec $-1 < a < 1$ et le problème d'extension exprimée par la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$ nous permet de traiter cet opérateur non local via des techniques locales des équation aux dérivées partielles comme nous allons le voir tout au long de cette section.

3.1 Extensions par réflexion à l'espace tout entier

Nous avons travaillé jusqu'à présent sur un demi-espace du type $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$. Dans cette section nous allons voir comment étendre les problèmes étudiés à l'espace tout entier du type $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Si $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution classique du problème d'extension au demi-espace (9)-(10) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction qui vérifie la relation $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$ nous allons montrer que lorsque $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$ pour tout $|x| < R$, la fonction u peut s'étendre à des valeurs de t négatives de sorte qu'elle vérifie l'équation (9) au sens faible.

Tout d'abord, remarquons que l'équation du problème d'extension $\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0$ est équivalente à l'équation $div_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u)(t,x) = 0$ dans le sens qu'une fonction régulière $u(t,x)$ vérifie l'équation du problème d'extension si et seulement si $u(t,x)$ vérifie l'équation ci-dessus, où $\nabla_{t,x} u(t,x) = (\partial_t u(t,x),\, \partial_1 u(t,x), \ldots, \partial_n u(t,x))$ est le vecteur gradient de u dans le point $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ et $div_{t,x} = (\partial_t, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ est l'opérateur de divergence. En effet, pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ on a :

$$div_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u)(t,x) = \partial_t(t^a \partial_t u(t,x)) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i(t^a \partial_i u(t,x)) = t^a(\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x)).$$

Cette remarque nous sera d'utilité dans l'énoncé et la démonstration du résultat suivant.

Théorème 3.1 (Extension par réflexion à l'espace tout entier)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ et $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème d'extension (9)-(10) :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \ \textit{et}\ t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), & \end{cases}$$

telle qu'elle vérifie la relation : $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$. Si φ est harmonique fractionnaire dans le sens *de la Définition 3.1 pour tout $|x| < R$ alors la fonction,*

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & t \geq 0 \quad et \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(-t,x), & t < 0 \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation

$$div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u})(t,x) = 0$$

sur la boule $B_R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 < R^2\}$.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R)$ une fonction test. On a alors

$$\int_{B_R} div_{t,x}\left(|t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}\right)(t,x)\phi(t,x)dtdx = \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx.$$

On considère les ensembles

$$B_{1,\varepsilon} = \{(t,x) \in B_R : |t| > \varepsilon\} \quad \text{et} \quad B_{2,\varepsilon} = \{(t,x) \in B_R : |t| \leq \varepsilon\} \quad \text{pour} \quad \varepsilon > 0$$

et par le théorème de la convergence dominée on a

$$\begin{aligned} I_R = \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx. \end{aligned}$$

Supposons pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 3.1.

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx = \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx.$$

Nous donnerons la preuve de ce lemme un peu plus tard. Alors, en acceptant ce lemme on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x}\phi(t,x)dtdx \\ &:= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{1,\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_{2,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} I_{2,\varepsilon} = 0$. Pour montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} I_{1,\varepsilon} = 0$ on commence par remarquer que

$$\int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x)dx = \int_{B_R^n} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x) \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x)dx,$$

où B_R^n dénote la boule dans $\mathbb{R}^n$ centrée dans l'origine et de rayon R. D'autre part, comme φ est harmonique fractionnaire dans la boule B_R^n on sait que :

$$\lim_{t \to 0^+} t^a \partial_t u(t,x) = (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = 0, \quad \text{pour tout} \quad x \in B_R^n. \tag{29}$$

Comme $\phi(t,x)$ est une fonction test, elle est toujours bornée et par l'égalité (29) en écrivant ε en place de t, on a que la fonction

$$\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x) \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x)$$

est aussi bornée sur B^n_R pour $\varepsilon > 0$ assez petite. Alors on a la majoration $|\phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x)| \leq C\, \mathbb{1}_{B^n_R}(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. De plus,

$$\phi(\varepsilon,x)\partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x)\varepsilon^a \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in B^n_R,$$

lorsque $\varepsilon \to 0^+$, donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x) dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B^n_R} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a \partial_t \widetilde{u}(\varepsilon,x) \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x) dx = 0.$$

Montrons maintenant que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I_{2,\varepsilon} = 0$. Tout d'abord remarquons que comme u est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ alors $||\nabla_{t,x} u||_{L^\infty} < +\infty$ sur l'ensemble compact $\overline{B_R \cap \{t \geq 0\}}$. Cela montre que la fonction $t^a|\nabla_{t,x} u(t,x)|$ appartient à $L^1(B_R \cap \{t \geq 0\})$. En effet, on a la majoration suivante :

$$\int_{B_R \cap \{t\geq 0\}} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)| dt dx \leq ||\nabla_{t,x} u||_{L^\infty} \int_{B_R \cap \{t\geq 0\}} t^a dt dx \leq ||\nabla_{t,x} u||_{L^\infty} \int_{|x|<R} \int_0^R t^a dt dx \leq C\, ||\nabla_{t,x} u||_{L^\infty} \int_0^R t^a dt < +\infty,$$

où la dernière intégrale converge car $-1 < a < 1$. Ensuite, par la définition de la fonction $\widetilde{u}(t,x)$ on obtient que

$$\int_{B_R} |t|^a |\nabla_{t,x} \widetilde{u}(t,x)| dt dx = 2 \int_{B_R \cap \{t\geq 0\}} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)| dt dx < +\infty.$$

De cette façon, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{2,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u}(t.x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t,x) dt dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u}(t.x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t,x) \mathbb{1}_{\{|t|\leq\varepsilon\}}(t) dt dx = 0.$$

Nous avons démontré que la fonction $\widetilde{u}(t,x)$ est solution faible de l'équation $div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) = 0$ sur la boule B_R. ■

Preuve du Lemme 3.1. Tout d'abord on va montrer que

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u}(t,x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t,x) dt dx = \int_{B_{1,\varepsilon}} div_{t,x}(\phi(t,x)|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx. \tag{30}$$

En effet, on sait que

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} div_{t,x}(\phi(t,x)|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx = \int_{B_{1,\varepsilon}} \nabla_{t,x} \phi(t,x) \cdot |t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u}(t,x) dt dx + \int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t,x) div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx,$$

alors pour montrer la formule (30) il suffit de montrer que $\int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t,x) div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx = 0$. Par la définition de $B_{1,\varepsilon}$ on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t,x) div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx \quad = \quad & \int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{t>\varepsilon\}} \phi(t,x) div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx \\ & + \int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{t<-\varepsilon\}} \phi(t,x) div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) dt dx. \end{aligned}$$

Comme $u(t,x)$ vérifie $div_{t,x}(t^a\nabla_{t,x}u(t,x)) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, il est évident que la première intégrale dans la dernière formule est égale a zero. De plus, lorsque $t < -\varepsilon$, par la définition de $\widetilde{u}(t,x)$ on sait que $\nabla_{t,x}\widetilde{u}(t,x) = \nabla_{t,x}u(-t,x)$, où $-t > \varepsilon > 0$, alors on a :

$$\int_{B_{1,\varepsilon}\cap\{t<-\varepsilon\}} \phi(t,x)div_{t,x}(|t|^a\nabla_{t,x}\widetilde{u})(t,x)dtdx = -\int_{B_{1,\varepsilon}\cap\{-t>\varepsilon\}} \phi(t,x)div_{t,x}((-t)^a\nabla_{t,x}u)(-t,x)d(-t)dx = 0,$$

d'où on vérifie la formule (30). Maintenant, comme $\phi(t,x) = 0$ sur le bord de la boule B_R et en utilisant la formule de Stokes, on a

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} div_{t,x}(\phi(t,x)|t|^a\nabla_{t,x}\widetilde{u})(t,x)dtdx = \int_{B_R\cap\{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a\nabla_{t,x}\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. ■

Remarque 3.1. *Le théorème antérieur reste vrai si la fonction φ est telle que $(-\Delta)^s\varphi = 0$ dans B_R^n au sens des distributions où nous remplaçons l'hypothèse (29) (où la limite est vérifié uniformément pour tout $|x| < R$) par la condition plus faible $\lim\limits_{t\to 0^+} t^a\partial_t u(t,\cdot) = 0$ au sens des distributions, c'est à dire :*

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{B_R^n} t^a\partial_t u(t,x)\psi(x)dx = 0, \quad \textit{pour tout} \quad \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R^n).$$

En effet, il suffit d'étudier l'intégrale $I_{1,\varepsilon}$ et on a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_R\cap\{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx\right| &= \left|\int_{B_R^n} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t\widetilde{u}(\varepsilon,x)\mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x)dx\right| \le \int_{B_R^n} |\phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t\widetilde{u}(\varepsilon,x)|dx \\ &\le \int_{B_R^n} \psi(x)\varepsilon^a\partial_t\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx,\end{aligned}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R^n)$ est telle que $|\phi(\varepsilon,x)| \le \psi(x)$ pour tout $x \in B_R^n$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ par la majoration antérieure on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_R\cap\{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t\widetilde{u}(\varepsilon,x)dx = 0.$$

3.2 L'inégalité de Harnack

Passons maintenant à notre deuxième exemple d'application du Théorème 2.1.
Dans le cadre des fonctions harmoniques classiques, c'est à dire des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta f(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega,$$

l'inégalité de Harncak affirme que si en plus, $f \ge 0$ sur Ω, alors les valeurs de cette fonction sont comparables sur tout sous-domaine $U \subset\subset \Omega$, plus précisément, pour tout sous-domaine $U \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n, Ω, U telle que

$$\sup_{x\in U} f(x) \le C \inf_{x\in U} f(x).$$

Rappelons que la notation $U \subset\subset \Omega$ signifie qu'il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $\overline{V}$ est compact et on a les inclusions $U \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$.

Dans cette section nous voulons montrer le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Inégalité de Harnack)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$, pour tout $|x| < R$, avec $-1 < a < 1$ et $R > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n telle que*

$$\sup_{x\in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{x\in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x).$$

Démonstration. Soit $v(z,x) = \varphi * \widetilde{P_a}(z,\cdot)(x)$ où $\widetilde{P}_a(z,x) = c_{n,a}\frac{(1-a)^{\frac{1}{1-a}} z}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}}+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ est le noyau de type Poisson solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème d'extension pour φ

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

D'autre part, soit $\widetilde{v}(z,x)$ l'extension par réflexion par rapport à l'hyperplan $z = 0$ de la fonction $v(z,x)$, c'est à dire, la fonction $\widetilde{v}(z,x)$ est définie par :

$$\widetilde{v}(z,x) = \begin{cases} v(z,x), & z \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^n \\ v(-z,x), & z < 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que la fonction $\widetilde{v}(z,x)$ vérifie l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x)$$

et alors comme $\widetilde{v}(0,x) = \varphi(x)$ on obtient l'inégalité de Harnack recherchée $\sup\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x)$.

Pour cela nous allons montrer que la fonction $\widetilde{v}$ est la limite d'une suite de fonctions $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans l'espace $\mathcal{C}(B_R)$ où w_ε vérifié l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x) \tag{31}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et de cette façon en faisant $\varepsilon \to 0^+$ on a que $\sup\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x) \leq C \inf\limits_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x)$.

Pour trouver une telle suite de fonctions pour $\varepsilon > 0$ nous considérons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} (|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x) + \Delta_x w_\varepsilon(z,x) = 0 \quad (z,x) \in B_R, \\ w_\varepsilon(z,x) = \widetilde{v}(z,x) \quad (z,x) \in \partial B_R \end{cases} \tag{32}$$

L'équation $(|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x)+\Delta_x w_\varepsilon(z,x) = 0$ est strictement elliptique (voir [8], Définition 6.2) et ses coefficients :

$$a_{i,j}(z,x) = \begin{cases} (|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} & \text{si} \quad i = j = 1 \\ 1 & \text{si} \quad i = j \quad \text{et} \quad 2 \leq i,j \leq n+1 \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$

sont fonctions höldériennes sur la boule B_R avec exposant de Hölder $0 < \sigma < \min\left(1, \frac{-2a}{1-a}\right)$. Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.2 ([8], Théorème 6.13)**.** *Soit $Lf(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\partial_{i,j}^2 f(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\partial_j f(x) + c(x)f(x)$ un opérateur strictement elliptique sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tel que $c(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et tel que tous ces coefficients $a_{i,j}$, b_i, c appartiennent à l'espace de Hölder $\mathcal{C}^\sigma(\Omega)$, avec $0 < \sigma < 1$. De plus, on suppose que pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe une boule B telle que $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{x\}$ (condition de la sphère extérieure). Alors, pour $h \in \mathcal{C}^\sigma(\Omega)$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\partial\Omega$ il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^{2,\sigma}(\Omega)$ solution du problème de Dirichlet suivant*

$$\begin{cases} L\,f(x) = h(x) \quad x \in \Omega, \\ f(x) = g(x) \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainsi, en prenant le domaine $\Omega = B_R$ (qui vérifie la condition de la sphère extérieure) et la condition au bord $g(z,x) = \widetilde{v}(z,x)$ (remarquons que $\widetilde{v}(z,x)$ est continue car est l'extension à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ $v(z,x)$) on obtient par le lemme précédent que pour tout ε il existe une fonction $w_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{B_R}) \cap \mathcal{C}^{2,\sigma}(B_R)$ solution unique du problème (32).

Montrons maintenant que telle fonction w_ε vérifié l'inégalité de Harnack (31). Pour cela nous allons utiliser le résultat suivant.

Pour $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière et strictement convexe, on note par $\text{coff}D^2\phi(z,x)$ la matrice de cofacteurs de la matrice hessienne de la fonction ϕ dans le point $(z,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ notée $D^2\phi(z,x)$. Alors pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ on définit l'équation de Monge-Ampère par

$$L_\phi f(z,x) = tr(\text{coff}D^2\phi(z,x)D^2 f(z,x)), \tag{33}$$

où tr dénote la trace de la matrice $\text{coff}D^2\phi(z,x)D^2 f(z,x)$. Dans ce cadre on a lemme suivant :

Lemme 3.3 ([3], Théorème 5). *Soit f une solution classique de l'équation de Monge-Ampère $L_\phi f = 0$ sur la boule $B((z_0,x_0),r)$. Alors il existe une constante $C > 1$ qui ne dépend pas de la fonction ϕ telle que, si f est de plus une fonction positive alors on a*

$$\sup_{B\left((z_0,x_0),\frac{r}{2}\right)} f(z,x) \leq C \sup_{B\left((z_0,x_0),\frac{r}{2}\right)} f(z,x). \tag{34}$$

Pour appliquer le résultat ci-dessus à notre cadre pour tout $\varepsilon > 0$ nous définissons la fonction $\phi_\varepsilon(z,x)$ par :

$$\phi_\varepsilon(z,x) = \frac{|x|^2}{2} + \frac{(|z|+\varepsilon)^{\frac{2}{1-a}}}{C(a)} - \frac{\varepsilon^{\frac{2}{1-a}}}{C(a)} \quad \text{pour tout } (z,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

avec la constante $C(a) = \frac{2(1+a)}{(1-a)^2} > 0$. On voit $\phi_\varepsilon(z,x)$ est bien une fonction strictement convexe et régulière car la puissance de l'expression $(|z|+\varepsilon)^{\frac{2}{1-a}}$ est telle que $\frac{2}{1-a} > 1$ $(-1 < a < 1)$.
Comme w_ε est une solution classique de l'équation $(|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x) + \Delta_x w_\varepsilon(z,x) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} L\phi_\varepsilon w_\varepsilon(z,x) &= tr(\text{coff}D^2\phi_\varepsilon(z,x)D^2 w_\varepsilon(z,x)) = tr\left(\det(D^2\phi_\varepsilon(z,x))(D^2\phi_\varepsilon(z,x))^{-1}D^2 w_\varepsilon(z,x)\right) \\ &= (|z|+\varepsilon)^{\frac{1}{1-a}}\left((|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x) + \Delta_x w_\varepsilon(z,x)\right) = 0 \end{aligned}$$

d'où on voit que la fonction w_ε est de plus une solution classique de l'équation de Monge-Ampère $L_{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon = 0$ sur la boule B_R

Comme la fonction v est positive sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, car $v(z,x) = \varphi * \widetilde{P_a}(z,\cdot)(x)$ où les fonctions φ et $\widetilde{P_a}$ sont positives, on a que $\widetilde{v}$ est aussi une fonction positive et par le principe du maximum faible (voir [8], Corollaire 3.2) on obtient que w_ε est bien une fonction positive, ainsi, par le Lemme 3.3 il existe une constante $C > 1$ qui ne dépend pas de la fonction ϕ_ε et par conséquent ne dépend pas de ε telle que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Étudions maintenant la convergence de la suite $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Pour cela nous allons accepter le lemme suivant

Lemme 3.4 ([4], Lemme 4.2). *Soit $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ la famille des solutions classiques du problème (32). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a que $\partial_z w_\varepsilon(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$ et de plus, il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(B_R)} \leq M \quad \textit{pour tout} \quad \varepsilon > 0.$$

Rappelons que $\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(B_R)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|\partial^\alpha w_\varepsilon\|_\infty + \sup_{|\alpha|=1} \sup_{(z,x)\neq(w,y)} \frac{|\partial^\alpha w_\varepsilon(z,x) - \partial^\alpha w_\varepsilon(w,y)|}{|(z,x)-(w,y)|^\sigma}$ et alors par la borne uniforme $M > 0$ donnée par le lemme précédent on a que les familles des fonctions $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\partial^\alpha w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$) sont équicontinues sur la boule B_R et ensuite par le théorème d'Ascoli on obtient qu'il existe une sous-suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que les suites des fonctions $(w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\partial^\alpha w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ (pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$) convergent dans l'espace $\mathcal{C}(B_R)$ et donc sont suites de Cauchy dans $\mathcal{C}(B_R)$. Ceci implique que $(w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $H^1(B_R)$, en effet on a la majoration

$$\begin{aligned} \|w_{\varepsilon_j} - w_{\varepsilon_k}\|^2_{H^1(B_R)} &= \int_{B_R} |w_{\varepsilon_j}(z,x) - w_{\varepsilon_k}(z,x)|^2 dzdx + \sum_{|\alpha|=1} \int_{B_R} |\partial^\alpha w_{\varepsilon_j}(z,x) - \partial^\alpha w_{\varepsilon_k}(z,x)|^2 dzdx \\ &\leq C(\|w_{\varepsilon_j} - w_{\varepsilon_k}\|^2_\infty + \|\partial^\alpha w_{\varepsilon_j} - \partial^\alpha w_{\varepsilon_k}\|^2_\infty) \end{aligned}$$

et donc il existe $w \in H^1(B_R)$ telle que $w_{\varepsilon_j} \longrightarrow w$ dans $H^1(B_R)$.

Étudions maintenant trois propriétés importantes de la fonction w.

(1) Tout d'abord remarquons que par la condition au bord $w_\varepsilon(z,x) = \widetilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$ on a que $w(z,x) = \widetilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$.

(2) D'autre part, pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$ la suite de fonctions $(\partial^\alpha w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}(B_R)$ et par conséquent elle converge dans $L^2(B_R)$ grace à la majoration ci-dessus, ainsi, comme $w_{\varepsilon_j} \longrightarrow w$ dans $H^1(B_R)$ alors nécessairement les fonctions $\partial^\alpha w$ sont continues sur $\mathcal{C}(B_R)$ et ceci montre que $w \in \mathcal{C}^1(B_R)$.
Soit $B \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$ une boule, comme w_{ε_j} vérifie l'équation $(|z| + \varepsilon_j)^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w_{\varepsilon_j}(z,x) + \Delta_x w_{\varepsilon_j}(z,x) = 0$ au sens classique sur la boule B alors pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ on a

$$\int_B \partial_z w_{\varepsilon_j}(z,x) \partial_z((|z| + \varepsilon_j)^{\frac{-2a}{1-a}} \psi)(z,x) dzdx + \int_B \nabla_x w_{\varepsilon_j}(z,x) \cdot \nabla_x \psi(z,x) dzdx = 0$$

et par le théorème de convergence dominée on obtient, lorsque $\varepsilon_j \to 0^+$, que

$$\int_B \partial_z w(z,x) \partial_z((|z|)^{\frac{-2a}{1-a}} \psi)(z,x) dzdx + \int_B \nabla_x w(z,x) \cdot \nabla_x \psi(z,x) dzdx = 0,$$

c'est à dire on a que $|\cdot|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w + \Delta_x w = 0$ au sens des distributions. Ensuite comme la fonction $|\cdot|^{\frac{-2a}{1-a}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$ on a bien que l'opérateur strictement elliptique $|\cdot|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 + \Delta_x$ a ces coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$ et comme $|\cdot|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w + \Delta_x w = 0$ alors on obtient que w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la boule $B \subset\subset B_R\{z \neq 0\}$ et par conséquent est de classe $\mathcal{C}^2$. Cela montre que la fonction w vérifie l'équation $|z|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w(z,x) + \Delta_x w(z,x) = 0$ au sens classique sour toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$.

(3) Finalement, par le Lemme 3.4 on a que $\partial_z w_\varepsilon(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$ et pour tout $\varepsilon > 0$ et alors on obtient que $\partial_z w(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$.

Avec ces propriétés qui caractérisent à la fonction w nous énonçons maintenant le lemme suivant

Lemme 3.5. *Il existe une unique fonction w telle que :*
(i) $w(z,x) = \widetilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$.
(ii) $w \in \mathcal{C}^1(B_R)$, elle est localement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B_R \cap \{z \neq 0\}$ et pour toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$ elle vérifie l'équation au sens classique

$$|z|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w(z,x) + \Delta_x w(z,x) = 0$$

(iii) $\partial_z w(0,x) = 0$.

Nous donnerons la preuve de ce lemme plus tard. En acceptant ce résultat nous allons montrer que la fonction $\widetilde{v}(z,x)$ vérifie l'inégalité de Harnack $\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x)$. Pour cela tout d'abord nous allons montrer que la fonction w vérifie l'inégalité de Harnack ci-dessus.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons montré l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z,x)$$

où la constante $C > 1$ ne dépend pas de ε et par conséquent comme $w_{\varepsilon_j} \to w$ dans $\mathcal{C}(B_R)$ on a bien que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w(z,x).$$

De cette façon pour montrer que la fonction $\widetilde{v}(z,x)$ vérifié l'inégalité de Harnack nous allons montrer que $\widetilde{v}(z,x)$ vérifie les propriétés du Lemme 3.5 et alors par l'unicité d'une telle fonction on obtient que $\widetilde{v} = w$ sur B_R.

Vérifions alors les propriétés du Lemme 3.5. La propriété (i) est évidente et donc nous passons à la vérification de l'autres propriétés.

(ii) Comme $\widetilde{v}(z,x)$ est la réflexion par l'hyperplan $z = 0$ de la fonction de classe $\mathcal{C}^2$ $v(z,x)$ pour montrer que $\widetilde{v} \in \mathcal{C}^1(B_R)$ il suffit de montrer que $\partial_z \widetilde{v}(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$. En effet, comme φ est harmonique fractionnaire, c'est à dire $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$ pour tout $|x| < R$ par la relation $\partial_z v(0,x) = (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$ on obtient que $\partial_z v(0,x) = 0$ et par conséquent on a bien que $\partial_z \widetilde{v}(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$.

D'autre part, comme la fonction $v(z,x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation $z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0$ au sens classique par la définition de la fonction $\widetilde{v}(z,x)$ on obtient que cette fonction est localement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B_R \cap \{z \neq 0\}$ et vérifie l'équation $|z|^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 \widetilde{v}(z,x) + \Delta_x \widetilde{v}(z,x) = 0$ au sens classique sur toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$.

(iii) Par la partie (ii) on a vu que $\partial_z \widetilde{v}(0,x) = 0$.

Maintenant que nous avons vérifié toutes les hypothèses du Lemme 3.5, nous pouvons invoquer ce résultat et de cette façon nous obtenons que $\widetilde{v} = w$ sur B_R et nous avons montré ce théorème. ■

Preuve du Lemme 3.5.
L'existence d'une telle fonction w est déjà prouvée dans le théorème ci-dessus de cette façon il suffit de montrer l'unicité. Supposons alors qu'ils existent deux fonctions w_1, w_2 qui vérifient les hypothèses (i), (ii) et (iii). Pour $\varepsilon > 0$ soit

$$u(z,x) = w_1(z,x) - w_2(z,x) + \varepsilon|z|,$$

l'objectif est de montrer que $u(z,x) \leq \varepsilon R$ pour tout $(z,x) \in B_R$ de sorte que si l'on fait $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ on trouve que $u(z,x) \leq 0$, c'est à dire, $w_1(z,x) \leq w_2(z,x)$. Après, par le même raisonnement en définissant maintenant $u(z,x) = w_2(z,x) - w_1(z,x) + \varepsilon|z|$ on trouvera que $w_2(z,x) \leq w_1(z,x)$, donc $w_1(z,x) = w_2(z,x)$ pour tout $(z,x) \in B_R$.

Comme $w_1(z,x) = w_2(z,x) = \widetilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$, alors, $u(z,x) = \varepsilon|z| < \varepsilon R$ sur ∂B_R. Supposons qu'il existe un point dans B_R tel que $u > \varepsilon R$, alors u atteint au moins un maximum dans la boule B_R dans un point $(z_0, x_0) \in B_R$, car u est continue et $u < \varepsilon R$ sur ∂B_R.

On va étudier les cas suivants :
Si $z_0 = 0$, en notant $\partial_z^+ u(0,x_0) = \lim_{z\to 0^+} \partial_z u(z,x_0)$ et $\partial_z^- u(0,x_0) = \lim_{z\to 0^-} \partial_z u(z,x_0)$, on a, $\partial_z^+ u(0,x_0) = \varepsilon$ et $\partial_z^- u(0,x_0) = -\varepsilon$, alors $\partial_z^+ u(0,x_0) > \partial_z^- u(0,x_0)$, mais comme $(0,x_0)$ c'est un maximum et on a que $\partial_z^- u(0,x_0) \geq 0$ et $\partial_z^+ u(0,x_0) \leq 0$, c'est à dire, on a que $\partial_z^+ u(0,x_0) \leq \partial_z^- u(0,x_0)$, alors on obtient une contradiction.

Par contre, si $z_0 \neq 0$ prenons $r > 0$ assez petit tel que la boule $B := B((z_0, x_0), r) \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$. Par l'hypothèse (ii) on sait que w_1 et w_2 sont solutions de l'équation elliptique $|z|^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w(z,x) + \Delta_x w(z,x) = 0$ sur la boule B, ensuite, par la définition de $u(z,x)$ on sait que cette fonction est aussi une solution de cette même équation sur B. Comme u atteint un maximum dans le point (z_0, x_0) dans $B_R \cap \{z \neq 0\}$ évidement (z_0, x_0) est un point où u atteint un maximum dans B, mais par le principle du maximum faible (voir [8], Corollaire 3.2) on a que la fonction u ne peut pas atteindre des maximums dans l'intérieur de la boule B mais seulement au bord ∂B. De cette façon, on conclut que $u(z,x) \leq \varepsilon R$ sur $\overline{B_R}$. ■

3.3 Formule de monotonie d'Almgren

Nous passons maintenant à la troisième application du Théorème 2.1. Les formules de monotonie sont des outils très utiles dans l'étude des propriétés de régularité des équations différentielles elliptiques. En particulier, la formule de monotonie d'Almgren a été utilisée dans de nombreux problèmes reliés à la recherche des propriétés locales de régularité des équations différentielles elliptiques. Dans ce cadre pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur B_1 la boule de centre l'origine et de rayon 1, on a le résultat

Théorème 3.3 (Formule de monotonie d'Algrem, [10] Théorème 1)**.** *Si u est harmonique sur la boule B_1, c'est à dire, $\Delta u(x) = 0$ pour tout $|x| < 1$ alors la fonction $\Phi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi(R) = R\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}_R^{n-1}} |u(x)|^2 d\sigma(x)}$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0,1[$.

Dans cette section nous montrons la formule de fréquence d'Almgren pour les fonctions harmoniques fractionnaires.

Commençons donc avec quelques notations et définitions. Soit $R > 0$, on définit la semi-boule supérieure par

$$B_R^+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 < R \quad \text{et} \quad t > 0\}$$

et on définit la semi-sphère supérieure par

$$S_R^+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 = R^2 \quad \text{et} \quad t > 0\}.$$

Remarquons que $\partial B_R^+ = S_R^+ \cup \{|x| \leq R\}$.

On veut monter le théorème suivant :

Théorème 3.4 (Formule de fréquence d'Almgren)**.** *Soit $R_0 > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème d'extension pour φ :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) + \dfrac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) + = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Si φ est de plus une fonction harmonique fractionnaire pour tout $|x| < R_0$ alors la fonction $\Phi :]0, R_0[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi(R) = R\frac{\displaystyle\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx}{\displaystyle\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)},$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0, R_0[$.

Démonstration. Tout d'abord remarquons que $\Phi(R)$ est croissante si et seulement si $\log(\Phi(R))$ est croissante car la fonction log et son inverse sont croissantes. Pour montrer ceci il suffit de montrer que $(\log(\Phi(R)))' \geq 0$, pour tout $0 < R < R_0$. Soit donc $0 < R < R_0$. On a,

$$\log(\Phi(R)) = \log(R) + \log\left(\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx\right) - \log\left(\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)\right),$$

donc

$$\begin{aligned}(\log(\Phi(R)))' &= \frac{1}{R} + \frac{\partial_R \displaystyle\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx}{\displaystyle\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx} - \frac{\partial_R \displaystyle\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{\displaystyle\int_{S_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx} - \frac{\displaystyle\int_{S_R^+} t^a \left(2u(t,x)\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x) + (n+a)|u(t,x)|^2\right) d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}.\end{aligned}$$

Par le changement de variable $(t,x) = R(s,w)$, où $(s,w) \in B_1^+$, il suffit de montrer que $(\log(\Phi(1)))' \geq 0$. En prenant $R = 1$ dans la formule antérieure, on obtient

$$(\log(\Phi(1)))' = 1 + \frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx} - \frac{2\displaystyle\int_{S_1^+} t^a \left(u(t,x)\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x) + (n+a)|u(t,x)|^2\right) d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \tag{35}$$

Maintenant, on va étudier les intégrales $\displaystyle\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)$ et $\displaystyle\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx$ de la première fraction de la formule précédente.

Pour la première intégrale ci-dessus, comme $\nabla_{t,x} u(t,x) = \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)$ et $\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x) \cdot \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x) = 0$ on a

$$|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 = \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x)\right|^2 - \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2 + 2\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2,$$

alors, on peut écrire

$$\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) = \int_{S_1^+} \left(\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x)\right|^2 - \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2\right) d\sigma(t,x) + 2\int_{S_1^+} \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x).$$

Supposons pour l'instant le lemme suivant.

Lemme 3.6.

$$\int_{S_1^+} t^a \left(\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\tau}} u(t,x)\right|^2 - \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2\right) d\sigma(t,x) = \int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx.$$

Alors par le lemme ci-dessus on a

$$\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) = \int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dtdx + 2\int_{S_1^+} \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{n}} u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x). \tag{36}$$

Maintenant, pour la deuxième intégrale comme $u(t,x)$ est une solution classique de l'équation (9) on a

$$\begin{aligned}
div_{t,x}(t^a u(t,x)\nabla_{t,x}u(t,x)) &= \partial_t t^a u(t,x)\partial_t u(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\partial_i t^a u(t,x)\partial_i u(t,x) = t^a|\nabla_x u(t,x)| + t^a u(t,x)\Delta_x u(t,x) \\
&\quad + \frac{a}{t}t^a u(t,x)\partial_t u(t,x) + t^a(\partial_t u(t,x))^2 + t^a\partial_t^2 u(t,x) \\
&= t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 + t^a u(t,x)\underbrace{\left(\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x)\right)}_{=0 \text{ car } u(t,x) \text{ vérifie l'équation } (9)} = t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2,
\end{aligned}$$

donc, on peut écrire

$$\int_{B_1^+} t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dtdx = \int_{B_1^+} div_{t,x}(t^a u(t,x)\nabla_{t,x}u(t,x))dtdx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_1^+\cap\{t>\varepsilon\}} div_{t,x}(t^a u(t,x)\nabla_{t,x}u(t,x))dtdx.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, par la formule de Stokes, on a

$$\int_{B_1^+\cap\{t>\varepsilon\}} div_{t,x}(t^a u(t,x)\nabla_{t,x}u(t,x))dtdx = \int_{S_1^+\cap\{t>\varepsilon\}} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x) - \int_{|x|<\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)u(\varepsilon,x)dx.$$

Ensuite, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, par le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{S_1^+\cap\{t>\varepsilon\}} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)dtdx \longrightarrow \int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)dtdx$$

et

$$\int_{|x|<\sqrt{1-\varepsilon^2}} \varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)u(\varepsilon,x)dx = \int_{|x|<1} \varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)u(\varepsilon,x)\mathbb{1}_{B(0,\sqrt{1-\varepsilon^2})}(x)dx \longrightarrow 0.$$

Donc, on peut écrire

$$\int_{B_1^+} t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dtdx = \int_{S_1^+} u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x). \tag{37}$$

Maintenant, en utilisant les formules (36) et (37) et on revenant à (35) on obtient

$$
\begin{aligned}
(\log(\Phi(1)))' &= 1+\frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{B_1^+} t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dtdx} - \frac{2\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} - \frac{(n+a)\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 1+\frac{\displaystyle\int_{B_1^+}(n+a-1)t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dtdx + 2\int_{S_1^+}\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{B_1^+} t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2 dtdx} - \\
&\quad (n+a) - \frac{2\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left(u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right)d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 1+(n+a-1)-(n+a)+2\frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)} - 2\frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 2\left(\frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)} - \frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}\right) \\
&= \underbrace{2\left(\frac{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) - \left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)\right)^2}{\displaystyle\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}\right)}_{:=I}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on sait que

$$
\left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)\right)^2 \le \left(\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)\right)\left(\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)\right),
$$

alors, dans la formule (38) on a

$$
I \ge \frac{\left(\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)\right)\left(\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)\right) - \left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x)\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)d\sigma(t,x)\right)^2}{\left(\displaystyle\int_{S_1^+} t^a\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2 d\sigma(t,x)\right)\left(\int_{S_1^+} t^a|u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)\right)^2} \ge 0
$$

car par l'inégalité de Cauchy -Schwarz nous avons vu que le numérateur de la fraction ci dessus est positif. De cette façon on a montré que $(\log(\Phi(1)))' \ge 0$ et ceci termine la démonstration du Théorème 3.4. ■

Passons maintenant à la preuve du Lemme 3.6.

Preuve. Tout d'abord on va montrer que

$$2\,div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)-t^a((t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x))\nabla_{t,x}u(t,x)\right)=t^a(n+a-1)|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2. \tag{39}$$

Notons $w:=(t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x)$, alors comme

$$div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)-t^a w\,\nabla_{t,x}u(t,x)\right)=div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}\right)-div_{t,x}\left(t^a w\,\nabla_{t,x}u(t,x)\right)$$

on a par la définition de l'opérateur de divergence que

$$div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)\right)=t^a(n+a+1)\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}+\Delta_{t,x}u(t,x)w.$$

D'autre part, pour l'expression $div_{t,x}\left(t^a w\,\nabla_{t,x}u(t,x)\right)$ on a que

$$\begin{aligned}
div_{t,x}\left(t^a w\nabla_{t,x}u(t,x)\right) &= t^a w\Delta_{t,x}u(t,x)+\nabla_{t,x}(t^a(w\cdot\nabla_{t,x}u(t,x)))=t^a w\Delta_{t,x}u(t,x)+\sum_{i=1}^n\partial_i t^a w\partial_i u(t,x)+\partial_t t^a w\partial_t u(t,x)\\
&= t^a w(\Delta_x u(t,x)+\partial_t^2 u(t,x))+\sum_{i=1}^n\partial_i t^a w\partial_i u(t,x)+\left(t^a\frac{a}{t}w+t^a\,\partial_t w\right)\partial_t u(t,x)\\
&= t^a\nabla_{t,x}w\cdot\nabla_{t,x}u(t,x)+t^a w\underbrace{\left(\partial_t^2 u(t,x)+\frac{a}{t}\partial_t u(t,x)+\Delta_x u(t,x)\right)}_{=0\text{ car } u(t,x)\text{ vérifie l'équation } (9)}\\
&= t^a\nabla_{t,x}w\cdot\nabla_{t,x}u(t,x)=t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2+\Delta_{t,x}u(t,x)w.
\end{aligned}$$

D'où on obtient la formule (39) car

$$\begin{aligned}
div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)-t^a((t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x))\nabla_{t,x}u(t,x)\right)&=t^a(n+a+1)\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}+\Delta_{t,x}u(t,x)w\\
&-t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2-\Delta_{t,x}u(t,x)w=t^a\frac{n+a-1}{2}|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2.
\end{aligned}$$

De cette façon, par la formule (39) et le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{B_1^+}(n+a-1)t^a|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2dtdx=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\int_{B_1^+\cap\{t>\varepsilon\}}div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)-t^a((t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x))\nabla_{t,x}u(t,x)\right)dtdx,$$

ensuite, pour tout $\varepsilon>0$, par la formule de Stokes on obtient que

$$\begin{aligned}
&2\int_{B_1^+\cap\{t>\varepsilon\}}div_{t,x}\left(t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}(t,x)-t^a((t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x))\nabla_{t,x}u(t,x)\right)dtdx\\
=\;&2\int_{S_1^+\cap\{t>\varepsilon\}}t^a\frac{|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2}{2}-t^a|(t,x)\cdot\nabla_{t,x}u(t,x)|^2d\sigma(t,x)+2\int_{|x|<1}-\varepsilon^{a+1}\frac{|\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)|^2}{2}dx\\
&+2\int_{|x|<1}(\varepsilon,x)\cdot\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)dx\\
=\;&\int_{S_1^+}t^a\left(|\nabla_{t,x}u(t,x)|^2-2\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(x,t)\right|^2\right)d\sigma(t,x)+2\int_{|x|<1}-\varepsilon^{a+1}\frac{|\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)|^2}{2}+(\varepsilon,x)\cdot\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)dx\\
=\;&\int_{S_1^+}t^a\left(\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{\tau}}u(t,x)\right|^2-\left|\frac{\partial}{\partial\overrightarrow{n}}u(t,x)\right|^2\right)d\sigma(t,x)+2\int_{|x|<1}-\varepsilon^{a+1}\frac{|\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)|^2}{2}+(\varepsilon,x)\cdot\nabla_{t,x}u(\varepsilon,x)\varepsilon^a\partial_t u(\varepsilon,x)dx.
\end{aligned}$$

Pour montrer la formule de ce lemme on doit montrer que la deuxième intégrale de la dernière expression est égale à zéro lorsque $\varepsilon \to 0^+$. Tout d'abord remarquons que :

$$\left| \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon,x)|^2}{2} + (\varepsilon,x)\cdot \nabla_{t,x} u(\varepsilon,x) \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon,x) dx \right| \leq \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon,x)|^2}{2} + c|\nabla_{t,x} u(\varepsilon,x)||\varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon,x)| dx.$$

Comme φ est harmonique fractionnaire pour tout $|x| < R < R_0$ par l'identité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$ en écrivant ε en place de t, on a que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon,x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad |x| < R,$$

alors on obtient par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon,x)|^2}{2} + C|\nabla_{t,x} u(\varepsilon,x)||\varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon,x)| dx = 0$$

et nous avons montré ce lemme. ■

4 Extension à d'autres opérateurs de dérivation fractionnaire.

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension au demi-espace, montrée dans le Théorème 2.1 dans la Section 2, ouvre la porte à des relations similaires pour d'autres opérateurs de dérivation fractionnaire. L'objectif de cette section est de montrer deux résultats récents exposés dans les articles [14] et [1] où, motivés par le Théorème 2.1, la relation entre le problème d'extension et un opérateur de dérivation fractionnaire est généralisée à des opérateurs différentiels linéaires de deuxième ordre L. D'autre part cette relation permet de définir l'opérateur de Laplace-Beltrami fractionnaire sur l'hyperboloïde $\mathbb{H}^n$.

4.1 Relation entre un opérateur différentiel de deuxième ordre et le problème d'extension au demi-espace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on dénote par L un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre, c'est à dire, pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ l'action de L sur f est donnée par l'expression :

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial^2_{i,j} f + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i f + cf,$$

où l'on suppose que les fonctions $a_{i,j}, b_i$ et c sont continues sur Ω et de plus $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Nous utiliserons comme principal outil la théorie spectrale et avant de commencer il convient de préciser quelques définitions et résultats qui seront utilisés ici. Toutes ces définitions et résultats se trouvent dans [11] Chapitres 12 et 13.

Définition 4.1 (Résolution de l'identité)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et H un espace de Hilbert complexe avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Une fonction*

$$E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{L}(H),$$

où $\mathfrak{L}(H)$ dénote l'espace des opérateurs linéaires et continus de H dans H, est dite une résolution de l'identité si elle vérifie :

(i) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $E(A) \in \mathfrak{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint et tel que $E(A) \circ E(A) = E(A)$ (composition d'opérateurs).

(ii) $E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = I_d$.

(iii) Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $E(A \cap B) = E(A) \circ E(B)$.

(iv) Si $A, B \in \mathcal{A}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$.

(v) Pour tous $f, g \in H$ la fonction $E_{f,g}$ définie par

$$\begin{array}{rccl} E_{f,g}: & \mathcal{A} & \longrightarrow \mathbb{C} & \\ & A & \longmapsto & E_{f,g}(A) = \langle E(A)f, g \rangle_H \end{array}$$

est une mesure complexe.

Remarque 4.1. *Remarquons que par les propriétés (i) et (v) de la définition antérieure on a que pour tout $f \in H$ la mesure $E_{f,f}$ est positive et de variation totale $E_{f,f}(X) = ||f||^2_H$.*

L'outil le plus important repose sur le théorème suivant pour les opérateurs auto-adjoints. Rappelons que le spectre d'un opérateur auto-adjoint T, noté $\sigma(T)$, est tel que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Théorème 4.1 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints)**.** *Soit $T : Dom(T) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, auto-adjoint avec domaine dense $Dom(T) \subset H$. Alors il existe une unique résolution de l'identité $E : Bor(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{L}(H)$ telle que :*

(i) Pour tout $f \in Dom(T)$ et $g \in H$ on a

$$\langle Tf, g \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{f,g}(\lambda). \tag{40}$$

(ii) $E(\sigma(T)) = I_d$ *et on dit alors que le résolution de l'identité est concentrée dans le spectre de* T.

(iii) $Dom(T) = \left\{ f \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dE_{f,f}(\lambda) < +\infty \right\}$.

Il est important de remarquer que si un opérateur linéaire auto-adjoint $T : Dom(T) \longrightarrow H$ est de plus un opérateur positif, c'est à dire,

$$\langle Tf, f\rangle_H \geq 0, \quad \text{pour tout} \quad f \in Dom(T),$$

alors on a que $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$ (en fait c'est une condition équivalente) et dans le théorème antérieur on obtient dans l'expression (40) que

$$\langle Tf, g\rangle_H = \int_{0}^{+\infty} \lambda dE_{f,g}(\lambda),$$

pour tout $f \in Dom(T)$ et $g \in H$, de cette façon, dans le cadre des opérateurs linéaires auto-adjoints positifs on travaille uniquement sur le domaine d'intégration $[0, +\infty[$.

Ce théorème nous montre que tout opérateur linéaire auto-adjoint $T : Dom(T) \longrightarrow H$ génère une unique résolution de l'identité E et de plus, on peut récupérer cet opérateur avec cette résolution de l'identité au sens de la formule (40). De cette façon on écrit formellement

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda).$$

Pour $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et $T : Dom(T) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire auto-adjoint on veut donner un sens a l'expression $\phi(T)$, plus précisément, on souhaite obtenir un opérateur $\phi(T)$ défini dans un sous-ensemble dense de H. L'exemple le plus important est lorsqu'on prend la fonction ϕ de cette façon $\phi(\lambda) = e^{-\tau\lambda}$ avec $\tau > 0$ et de cette manière on obtient le semi-groupe associé à l'opérateur T, $(e^{-\tau T})_{\tau>0}$, comme nous allons le voir plus tard. Tout d'abord énonçons le théorème qui donne un sens à l'expression $\phi(T)$.

Théorème 4.2 (Calcul symbolique)**.** *Soit* $T : Dom(T) \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire auto-adjoint et* $E : Bor(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{L}(H)$ *la résolution de l'identité générée par* T. *Alors pour toute fonction mesurable* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *l'opérateur*

$$\phi(T) : Dom(\phi(T)) \longrightarrow H$$

défini par

$$\langle \phi(T)f, g\rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) dE_{f,g}(\lambda), \quad \textit{pour tout} \quad f \in Dom(\phi(T)), g \in H, \tag{41}$$

vérifie :

(i) $Dom(\phi(T)) = \left\{ f \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\lambda)|^2 dE_{f,f}(\lambda) < +\infty \right\}$ *est un sous-espace dense de* H.

(ii) $\phi(T) : Dom(\phi(T)) \longrightarrow H$ *est un opérateur linéaire normal, c'est à dire* $\phi(T)(\phi(T))^* = (\phi(T))^*\phi(T)$.

(iii) Pour $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction mesurable on a que* $\phi\psi(T) \subset \phi(T) \circ \psi(T)$ *et* $Dom(\phi(T) \circ \psi(T)) = Dom(\psi(T)) \cap Dom(\phi\psi(T))$. *En particulier* $\phi\psi(T) = \phi(T) \circ \psi(T)$ *si et seulement si* $Dom(\phi(T) \circ \psi(T)) = Dom(\psi(T)) \cap Dom(\phi\psi(T))$.

Remarque 4.2. *Dans la propriété (iii) du théorème antérieur l'expression* $\phi\psi(T) \subset \phi(T) \circ \psi(T)$ *signifie que l'opérateur* $\phi(T) \circ \psi(T)$ *est une extension de l'opérateur* $\phi\psi(T)$, *c'est à dire,* $Dom(\phi(T) \circ \psi(T)) \supset Dom(\phi\psi(T))$ *et pour tout* $f \in Dom(\phi\psi(T))$ *on a* $\phi\psi(T)(f) = \phi(T) \circ \psi(T)(f)$.

Par la formule (41) on écrit formellement

$$\phi(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) dE(\lambda).$$

Une fois que nous avons exposé rapidement ces résultats de la théorie spectrale, maintenant, nous allons les utiliser pour définir le semi-groupe associé à l'opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre L et l'opérateur de dérivation fractionnaire L^s avec la puissance $0 < s < 1$.

Dorénavant nous allons travailler uniquement sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Afin d'appliquer les résultats antérieurs il faut imposer sur l'opérateur $L : Dom(L) \longrightarrow L^2(\Omega)$ les conditions suivantes :

(i) $Dom(L)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$.

(ii) L est un opérateur auto-adjoint et positif.

De cette façon, par le Théorème 4.1 il existe une unique résolution de l'identité $E : Bor([0, +\infty[) \longrightarrow \mathfrak{L}(L^2(\Omega))$ telle que $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$. À partir de maintenant et dans tout qui suit E dénote la résolution de l'identité générée par l'opérateur L.

Nous avons alors les définitions suivantes :

Définition 4.2 (Semi-groupe asocié à l'opérateur L)**.** *Soit L un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre qui vérifie les hypothèses (i) et (ii) ci-dessus. La famille d'opérateurs $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ avec domaine $L^2(\Omega)$, définie pour tout $\tau > 0$ par :*

$$\left\langle e^{-\tau L} f, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda} dE_{f,g}(\lambda), \quad \textit{pour tout} \quad f, g \in L^2(\Omega),$$

est le semi-groupe associé à l'opérateur L.

Il es important de remarquer que pour tout $\tau > 0$ l'opérateur $e^{-\tau L}$ a les propriétés suivantes pour tout $f \in L^2(\Omega)$ (voir [1], Section 3 et [14], Section 2) :

(i) La famille $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ est un semi-groupe avec générateur infinitésimal L, c'est à dire : $e^{-\tau_1 L} \circ e^{-\tau_2 L} = e^{-(\tau_1+t_2)L}$ pour tout $\tau_1, \tau_2 > 0$, $e^{0L} = I_d$ et $Lf = \displaystyle\lim_{\tau\to 0^+} \frac{e^{-\tau L} f - f}{\tau}$ pour tout $f \in Dom(L)$.

(ii) $||e^{-\tau L} f||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}$.

(iii) La fonction $u = e^{-\tau L} f$ vérifie, dans L^2, l'équation d'évolution : $\partial_t u + Lu = 0$.

(iv) $e^{-\tau L}$ est un opérateur auto-adjoint et positif.

Définition 4.3 (Puissances fractionnaires de l'opérateur L)**.** *Soit $0 < s < 1$, à l'aide du Théorème 4.2 on définit l'opérateur L^s, avec domaine $Dom(L^s) \subset Dom(L)$, par :*

$$\langle L^s f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^{+\infty} \lambda^s dE_{f,g}(\lambda), \quad \textit{pour tout} \quad f \in Dom(L^s) \textit{ et } g \in L^2(\Omega). \tag{42}$$

Il existe une relation intéressante entre les opérateurs $e^{-\tau L}$ et L^s, plus précisément, maintenant nous allons voir que l'opérateur L^s peut être défini à l'aide de l'opérateur $e^{-\tau L}$. En effet, motivés par l'identité

$$\lambda^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau\lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau, \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0,$$

grâce à la formule (42) on écrit formellement :

$$\begin{aligned} L^s &= \int_0^{+\infty} \lambda^s dE(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau\lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau dE(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau\lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} dE(\lambda) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda} dE(\lambda) - \int_0^{+\infty} 1 dE(\lambda) \right) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau L} - I_d) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau. \end{aligned}$$

De cette façon on obtient une caractérisation de l'opérateur L^s par

$$L^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau L} - I_d) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau.$$

Cette caractérisation sera d'utilité dans la démonstration du Théorème 4.3 ci-après. Après ces définitions nous passons au résultat le plus important de cette section concernant l'opérateur L^s avec $0 < s < 1$. Il s'agit en fait d'une généralisation du Théorème 2.1 et nous allons étudier ici le problème suivant pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t,x) - Lu(t,x) = 0, \qquad x \in \Omega \text{ et } t > 0 \tag{43}$$

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{44}$$

Ce problème est donc un analogue au problème d'extension au demi-espace présenté dans les sections précédentes et nous allons voir qu'il est possible d'en donner une solution complète exactement de la même façon que précédemment mais en utilisant les outils issus de la théorie spectrale. Plus précisément nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.3 (Relation entre l'opérateur L^s et le problème d'extension au demi-espace)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset Dom(L^s)$ et $0 < s < 1$. Une solution au sens de $L^2(\Omega)$ du problème d'extension pour φ au demi-espace (43)-(44) est donnée par*

$$u(t,x) = C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, \quad \textit{pour presque tout} \quad x \in \Omega \textit{ et } t > 0 \tag{45}$$

avec la constante $C_s = \frac{1}{\Gamma(s)}$.

De plus, on a l'égalité dans $L^2(\Omega)$:

$$c_s L^s \varphi = \lim_{t \to 0^+} t^{1-2s} \partial_t u, \tag{46}$$

avec la constante $c_s = C_s \frac{1}{2s} \Gamma(1-s)$.

Remarque 4.3. *Dans la Section 2 on a écrit la puissance fractionnaire $s = \frac{1-a}{2}$, avec $-1 < a < 1$. Ce changement de variable a aidé à la recherche du noyau de type Poisson P_a. Néanmoins, dans cette section, pour simplifier les calculs on va travailler directement avec la puissance fractionnaire s. Remarquons que si dans l'équation (43) on prend $s = \frac{1-a}{2}$ et $L = -\Delta$, on récupère l'équation du problème d'extension pour le Laplacien Fractionnaire : $\partial_t^2 u + \dfrac{a}{t} \partial_t u + \Delta_x u = 0$. Ce fait n'est pas fortuit, nous verrons plus tard comment le Théorème 4.3 implique le Théorème 2.1 lorsqu'on prend l'opérateur $L = -\Delta$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$.*

Démonstration du Théorème 4.3. La preuve de ce théorème est divisée dans 6 étapes. Tout au long de cette preuve nous allons travailler avec deux mesures : $\frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau$ et la mesure donnée par la résolution de l'identité, $E_{f,g}$. Il est intéressant de remarquer deux propriétés de ces mesures. D'abord, observons que pour tout $t > 0$ fixé la mesure $\frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau$ est une mesure finie sur tout compact de $[0, +\infty[$ ceci nous permettra d'utiliser le théorème de Fubini. En effet, pour $0 < M < +\infty$ on a

$$\int_0^M \frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau \leq C \int_0^M \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau,$$

où l'intégrale ci-dessus converge car $0 < s < 1$. D'autre part, remarquons que pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$ la mesure $E_{f,g}$ est de variation bornée et de plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que $|E_{f,g}|([0, +\infty[) \leq ||f||_{L^2(\Omega)} ||g||_{L^2(\Omega)}$.

Étape 1. Pour tout $t > 0$ la fonction $u(t, \cdot)$ définie par la formule (45) appartient à $L^2(\Omega)$.

En effet, soit $t > 0$ et pour chaque $R > 0$ définissons la fonction $u_R(t, \cdot)$ par :

$$u_R(t,x) = C_s \int_0^R e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Alors pour tout $g \in L^2(\Omega)$, par le théorème de Fubini et la formule (41) on a

$$\begin{aligned}\langle u_R(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s\left\langle \int_0^R e^{-\tau L}L^s\varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{1}{\tau^{1-s}}d\tau, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} = C_s\int_0^R \left\langle e^{-\tau L}L^s\varphi, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{1}{\tau^{1-s}}d\tau \\ &= C_s\int_0^R\int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda}\lambda^s dE_{\varphi,g}(\lambda)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{1}{\tau^{1-s}}d\tau = C_s\int_0^{+\infty}\int_0^R e^{-\tau\lambda}(\tau\lambda)^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{1}{\tau}d\tau dE_{\varphi,g}(\lambda),\end{aligned}$$

par le changement de variable $\tau = \frac{r}{\lambda}$ on trouve dans la dernière intégrale que

$$\langle u_R(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{\lambda R} e^{-r}r^{s-1}e^{-\frac{t^2}{4r}\lambda}drdE_{\varphi,g}(\lambda),$$

de cette façon on a la majoration suivante :

$$\left|\langle u_R(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{s-1}drd|E_{\varphi,g}(\lambda)| \leq ||\varphi||_{L^2(\Omega)}||g||_{L^2(\Omega)} < +\infty, \tag{47}$$

car $e^{-\frac{t^2}{4r}\lambda} \leq 1$. Cela nous montre, par dualité, que pour tout $t, R > 0$ la fonction $u_R(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ et de plus $||u_R(t,\cdot)||_{L^2(\Omega)} \leq ||\varphi||_{L^2(\Omega)}$. Maintenant, par la définition de la fonction $u_R(t,\cdot)$ on voit que

$$\lim_{R_1,R_2\to+\infty}\langle u_{R_1}(t,\cdot) - u_{R_2}(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ pour tout } g \in L^2(\Omega),$$

de cette façon, en prenant $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante dans $\mathbb{R}^+$ telle que $R_n \to +\infty$ et en prenant $g = u_{R_1}(t,\cdot) - u_{R_2}(t,\cdot)$, par la formule ci-dessus on voit que $(u_{R_n}(t,\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et alors il existe une fonction $u(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ telle que $u_{R_n}(t,\cdot) \to u(t,\cdot)$ dans $L^2(\Omega)$.
Pour finir la preuve de l'étape 1 montrons que cette fonction $u(t,\cdot)$ s'écrit par la formule (45). En effet, pour $g \in L^2(\Omega)$, par le théorème de convergence dominée et la formule (41) on a

$$\begin{aligned}\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{R\to+\infty}\langle u_R(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = C_s\lim_{R\to+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^R e^{-\tau\lambda}(\tau\lambda)^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{1}{\tau}d\tau dE_{\varphi,g}(\lambda) \\ &= C_s\int_0^{+\infty}\left\langle e^{-\tau L}L^s\varphi, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = \left\langle C_s\int_0^{+\infty} e^{-\tau L}L^s\varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g\right\rangle_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

alors on obtient l'égalité (45) au sens de $L^2(\Omega)$.

Étape 2. Maintenant, on va montrer la condition de type Dirichlet (44). Pour l'instant on va supposer que, pour tout $t > 0$ $u(t,\cdot) \in Dom(L)$. Soit $g \in L^2(\Omega)$, toujours par la formule (45) on a que

$$\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda}(\tau\lambda)^s dE_{\varphi,g}(\lambda)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r}r^s e^{-\frac{t^2\lambda}{4r}}\frac{1}{r}drdE_{\varphi,g}(\lambda),$$

par le changement de variable $\tau = \frac{r}{\lambda}$. On a vu dans la formule (47) que

$$\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} \leq C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{s-1}drd|E_{\varphi,g}(\lambda)| \leq ||\varphi||_{L^2(\Omega)}||g||_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

ceci donne une borne uniforme sur $\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}$ et alors, par le théorème de convergence dominée, lorsque $t \to 0^+$, on trouve que

$$\langle u(0,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{t\to0^+}\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{t\to0^+} C_s\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r}r^s e^{-\frac{t^2\lambda}{4r}}\frac{1}{r}drdE_{\varphi,g}(\lambda) = \langle\varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarquons que, également par le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-r} r^s e^{-\frac{t^2\lambda}{4r}} \frac{1}{r} dr \to \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{s-1} dr = \Gamma(s) = (C_s)^{-1},$$

lorsque $t \to 0^+$. De cette façon, on a montré la condition (44) au sens de $L^2(\Omega)$.

Étape 3. La fonction u, définie par la formule (45), est deux fois différentiable par rapport à la variable t.
En effet, par la formule (45) et le théorème de convergence dominée, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \left\langle \frac{u(t+h,\cdot)-u(t,\cdot)}{h}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{h\to 0} C_s \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{(t+h)^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{e^{-\frac{(t+h)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{h} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \partial_t \left(e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}.
\end{aligned}$$

Alors on obtient l'identité suivante :

$$\langle \partial_t u(t\,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle -C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{48}$$

Nous voyons de plus que la fonction $\partial_t u(t,\cdot)$ définie par l'intégrale antérieure est absolument convergent au sens d'intégrale de Bochner et par le théorème d'intégration sous le signe-intégral elle est deux fois différentiable par rapport à la variable t. De cette façon on obtient que :

$$\langle \partial_t^2 u(t\,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle -C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi \partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 4. Maintenant on va montrer que la fonction $u(t,x)$, définie par la formule (45) vérifie dans $L^2(\Omega)$ l'équation (43) du problème d'extension pour φ au demi-espace.
Soit alors $g \in L^2(\Omega)$, par les deux formules précédentes on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^2 u(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \left(\partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} + \frac{1-2s}{t} \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{s-1}{\tau} + \frac{t^2}{4\tau^2} \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= \underbrace{C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \frac{s-1}{\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}}_{:=I_1} \\
&\quad + C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t^2}{4\tau^2} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},
\end{aligned}$$

par une intégration par parties dans l'intégrale I_1 on trouve que

$$I_1 = -\int_0^{+\infty} \partial_\tau \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t^2}{4\tau^2} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},$$

de cette façon, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^2 u(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -C_s \int_0^{+\infty} \partial_\tau \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= -C_s \int_0^{+\infty} \partial_\tau \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda} \lambda^s dE_{\varphi,g}(\lambda) \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\tau\lambda} \lambda^s dE_{\varphi,g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\tau\lambda} \lambda^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dE_{\varphi,g}(\lambda) \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda} \lambda^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dE_{\varphi,g}(\lambda) \\
&= \left\langle L\left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right), g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Finalement, par la formule (45) on a que

$$\left\langle \partial_t^2 u(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Lu(t\,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 5. Finalement, on va montrer la relation qui existe entre l'action de l'opérateur L^s sur une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et le problème d'extension pour φ au demi-espace, (43)-(44).

Pour tout $g \in L^2(\Omega)$, par la formule (48), on a pour $t > 0$ fixé

$$\langle t^{1-s}\partial_t u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = -C_s t^{1-2s} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t}{2\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},$$

ensuite, par le changement de variable $\tau = \frac{t}{4r}$, dans l'intégrale ci-dessus on trouve que

$$\begin{aligned}
\langle t^{1-s}\partial_t u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s t^{1-2s} \int_0^{+\infty} \left\langle e^{-\frac{t^2}{4r}L} L^s \varphi, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} \frac{t}{2r} \left(\frac{4r}{t^2}\right)^{1-s} dr \\
&= C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} \left\langle e^{-\frac{t^2}{4r}L} L^s \varphi, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} r^{-s} dr,
\end{aligned}$$

comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \left\langle e^{-\frac{t^2}{4r}L} L^s \varphi, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle L^s\varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)}$, par le théorème de convergence dominée on trouve dans l'expression antérieure que :

$$\begin{aligned}
\left\langle \lim_{t\to 0^+} t^{1-2s}\partial_t u(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{t\to 0^+} \langle t^{1-2s}\partial_t u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} \left\langle e^{-\frac{t^2}{4r}L} L^s \varphi, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} r^{-s} dr \\
&= C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{-s} dr \, \langle L^s\varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle c_s L^s \varphi, g\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Étape 6. Pour finir la preuve de ce théorème on va montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $u(t,\cdot)$ appartient à $Dom(L)$.

Pour cela, comme l'opérateur L est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ il suffit de montrer que pour tout $g \in L^2(\Omega)$ la limite suivante est bornée

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \left\langle \frac{e^{-\sigma L}u(t,\cdot)-u(t,\cdot)}{\sigma}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{e^{-\sigma L}u(t,\cdot)-u(t,\cdot)}{\sigma}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \frac{e^{-\sigma L}u(t,x)-u(t,x)}{\sigma} g(x)dx \\
= \quad & \int_\Omega \frac{1}{\sigma} g(x) \left(e^{-\sigma L} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \right) dx \\
= \quad & \int_\Omega \frac{g(x)}{\sigma\Gamma(s)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} e^{-\sigma L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) dx \\
= \quad & \int_\Omega \frac{g(x)}{\sigma\Gamma(s)} \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) - e^{-\tau L} L^s \varphi(x) \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) dx \\
= \quad & \int_\Omega \frac{g(x)}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) - e^{-\tau L} L^s \varphi(x)}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dx
\end{aligned}$$

d'ou en faisant $\sigma \to 0^+$ on a :

$$\begin{aligned}
= \quad & \int_\Omega \frac{g(x)}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} -L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dx \quad \text{et par le théorème de Fubini} \\
= \quad & -\int_0^{+\infty} \int_\Omega \frac{g(x)}{\Gamma(s)} L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) dx e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},
\end{aligned}$$

ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{+\infty} \int_\Omega \frac{g(x)}{\Gamma(s)} L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} dx \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
= \quad \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right. & \left. + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right).
\end{aligned}$$

Maintenant nous allons supposer que l'action du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ est donnée par convolution avec un noyau suffisamment régulier K_τ, c'est à dire, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a $e^{-\tau L} f = f * K_\tau$ et de cette façon dans l'expression ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} \varphi * K_\tau\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} \varphi * K_\tau\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\
= \quad & \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi * L^{\frac{s}{2}} K_\tau\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi * L^{1+s} K_\tau\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\
\leq \quad & \frac{\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi\|_{L^2(\Omega)} \|L^{\frac{s}{2}} K_\tau\|_{L^1(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} K_\tau\|_{L^1(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right).
\end{aligned}$$

Nous allons supposer également le résultat suivant par analogie avec l'opérateur Laplacien ; quitte à définir l'opérateur L de façon simple pour obtenir ces propriétés :

Lemme 4.1 ([5] Lemme 3.2)**.** *Soit $s > 0$. Alors nous avons la majoration suivante.*

$$\|L^s K_\tau\|_{L^1(\Omega)} \leq C\,\tau^{-s}.$$

En appliquant ce lemme à l'expression ci-dessus on a que

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0^+}\left\langle \frac{e^{-\sigma L}u(t,\cdot)-u(t,\cdot)}{\sigma}, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C\,\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)}\left(\int_0^1 \|L^{\frac{s}{2}+1}\varphi\|_{L^2(\Omega)}\tau^{\frac{s}{2}-1}d\tau+\int_1^{+\infty}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\tau^{-2}d\tau\right)\\ &\leq \frac{C\,\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)}(\|L^{\frac{s}{2}+1}\varphi\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{L^2(\Omega)})<+\infty.\end{aligned}$$

On obtient donc que $u(t,\cdot)$ appartient au domaine de L et ceci termine la démonstration du théorème.

■

Nous avons montré dans ce théorème la relation qui existe entre l'opérateur de dérivation fractionnaire L^s avec $0<s<1$ et le problème d'extension au demi-espace. Tout au long de cette démonstration nous avons travaillé avec la solution $u(t,x)$ du problème d'extension (43)-(44) donnée par la formule (45). De la même manière que dans la Section 2 on cherche à trouver un noyau de type Poisson noté P_t^s qui nous permet d'écrire la fonction $u(t,x)$ sous la forme :

$$u(t,x)=\int_\Omega P_t^s(x,y)\varphi(y)dy.$$

De cette façon on recherche un noyau de type de Poisson dans le sens de la définition suivante :

Définition 4.4 (Noyau de type Poisson)**.** *Pour tout $s\in]0,1[$ et $t>0$ une fonction $P_t^s(x,y)$ telle que pour tout $y\in\Omega$ fixé $P_t^s(\cdot,y)\in L^2(\Omega)$ et qui vérifie au sens de $L^2(\Omega)$ l'équation (43) :*

$$\partial_t^2P_t^s(x,y)+\frac{1-2s}{t}\partial_tP_t^s(x,y)-LP_t^s(x,y)=0,$$

c'est à dire, pour tout $g\in L^2(\Omega)$ on a que

$$\left\langle \partial_t^2P_t^s(\cdot,y)+\frac{1-2s}{t}\partial_tP_t^s(\cdot,y)-LP_t^s(\cdot,y), g\right\rangle_{L^2(\Omega)}=0$$

et de plus, pour tout $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ la limite $\lim\limits_{t\to 0^+}\langle P_t^s(x,\cdot),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}=\varphi(x)$ a lieu pour presque tout $x\in\Omega$, est nommée un noyau de type Poisson.

Rappelons que dans la Section 2 pour trouver le noyau de type Poisson noté P_a (voir Définition 2.3) tout d'abord on a trouvé une solution classique de l'équation du problème d'extension (9)-(10) :

$$\partial_t^2u(t,x)+\frac{a}{t}\partial_tu(t,x)+\Delta_xu(t,x)=0,\quad \text{avec } -1<a<1,$$

notée par Q_a et ensuite, à l'aide de l'équation conjugué $\partial_t^2u(t,x)-\frac{a}{t}\partial_tu(t,x)+\Delta_xu(t,x)=0$, on en a déduit le noyau de type Poisson recherché et on a pu écrire des solutions du problème d'extension (9)-(10) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n}P_a(t,x-y)\varphi(y)dy.$$

Dans ce cadre, pour trouver le noyau de type Poisson P_t^s nous raisonnerons d'une manière similaire, c'est à dire, d'abord nous trouverons des solutions, qui appartiennent à $L^2(\Omega)$, de l'équation du problème d'extension (43)-(44) :

$$\partial_t^2u(t,x)+\frac{1-2s}{t}\partial_tu(t,x)-Lu(t,x)=0,\quad \text{avec } 0<s<1$$

et ensuite, à l'aide de son équation conjuguée définie par la formule :

$$\partial_t^2u(t,x)-\frac{1-2s}{t}\partial_tu(t,x)-Lu(t,x)=0, \tag{49}$$

on en déduira le noyau de type Poisson P_t^s.

Avant de commencer nous faisons les suppositions suivantes :

(a) L'action du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ généré par l'opérateur L est donnée par convolution avec un noyau non-négatif $K_\tau(x,y)$, c'est à dire, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a
$$e^{-\tau L}f(x) = \int_\Omega K_\tau(x,y)f(y)dy, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$
Remarquons que comme l'opérateur $e^{-\tau L}$ est auto-adjoint alors $K_\tau(x,y) = K_\tau(y,x)$.

(b) Ce noyau $K_\tau(x,y)$ appartient au domaine de l'opérateur L et de plus il vérifie l'équation $\partial_\tau K_\tau(x,y) = -LK_\tau(x,y)$ pour tout $x,y \in \Omega$. En particulier, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale cela implique que
$$\partial_\tau \int_\Omega K_\tau(x,y)f(y)dy = \int_\Omega \partial_\tau K_\tau(x,y)f(y)dy \quad \text{pour tout } f \in L^2(\Omega).$$

(c) Pour $x \in \Omega$ fixé il existe une constante positive C_x et $\varepsilon > 0$ tels que
$$\|K_\tau(x,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\tau K_\tau(x,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_x \frac{(1+\tau^\varepsilon)}{\tau^\varepsilon}.$$

Avant de continuer, il convient de donner un exemple d'un tel opérateur qui vérifie les hypothèses précédents. Motivés par la Section 2 il est naturel de prendre comme exemple $L = -\Delta$ avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ l'espace tout entier. Dans ce cas il est connu que l'action du semi-groupe $(e^{\tau\Delta})_{\tau>0}$ est donnée par la convolution avec le noyau de la chaleur $h_\tau(x) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}$, qui pour tout $\tau > 0$ est solution au sens classique de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta_x u = 0$. De cette façon, en prenant $K_\tau(x,y) = h_\tau(x-y)$ on vérifie sans problème les hypothèses (i) et (ii). De plus, comme $\|h_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\,\tau^{-\frac{n}{4}}$ et $\|\partial_\tau h_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\tau^{-\left(1+\frac{n}{4}\right)}$ on a alors que $\|K_\tau(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_\tau K_\tau(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\tau^{-\frac{n}{4}}(1+\tau^{-1})$.
On voit bien comment cette section généralise le cadre exposé dans la section 2.

Afin de rechercher le noyau de Poisson P_t^s, tout d'abord nous allons caractériser les solutions dans $L^2(\Omega)$ de l'équation (43) dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $0 < s < 1$, et $x \in \Omega$ fixé. Alors la fonction*
$$Q_x^s(t,y) = C_s \int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \quad \textit{pour tout } (t,y) \in]0,+\infty[\times\Omega \tag{50}$$
et avec la constante $C_s = \frac{1}{\Gamma(s)}$ vérifie :

(i) $Q_x^s(t,y) = Q_y^s(t,x)$, pour tout $x,y \in \Omega$.

(ii) Pour tout $t > 0$, $Q_x^s(t,\cdot)$ appartient à $L^2(\Omega)$ et vérifie l'équation $\partial_t^2 Q_x^s(t,y) + \dfrac{1-2s}{t}\partial_t Q_x^s(t,y) - LQ_x^s(t,y) = 0$ au sens de $L^2(\Omega)$, c'est à dire, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on a que
$$\left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t}\partial_t Q_x^s(t,\cdot) - LQ_x^s(t,\cdot), g\right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

(iii) Si $x \in Dom(\varphi)$ alors on a que
$$\lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{1}{2s}t^{1-2s}\partial_t Q_x^s(t,\cdot),\varphi\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{\Gamma(-s)}{4^s\Gamma(s)}\varphi(x). \tag{51}$$

Preuve. La propriété (i) est évidente car on a que $K_\tau(x,y) = K_\tau(y,x)$. Montrons alors la propriété (ii). De même façon que l'étape 1 de la démonstration du Théorème 4.3, pour $x \in \Omega$ fixé et tout $g \in L^2(\Omega)$ on a :
$$\lim_{R\to+\infty}\left\langle C_s\int_0^R K_\tau(x,\cdot)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle C_s\int_0^{+\infty} K_\tau(x,\cdot)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$
$$= \quad C_s\int_0^{+\infty}\langle K_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s\int_0^{+\infty} e^{-\tau L}g(x)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} < +\infty.$$

Cela montre que la fonction $Q_x^s(t,\cdot)$ appartient à $L^2(\Omega)$. Vérifions maintenant que la fonction $Q_x^s(t,\cdot)$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation (43), c'est à dire, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ nous allons montrer l'identité

$$\left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t}\partial_t Q_x^s(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle LQ_x^s(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t,\cdot) + \frac{1-2s}{t}\partial_t Q_x^s(t,\cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s\int_0^{+\infty} \langle K_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} \left(\partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} + \frac{1-2s}{t}\partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\right)\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= \underbrace{C_s\int_0^{+\infty} \langle K_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{s-1}{t} + \frac{t^2}{4\tau}\right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}}}_{:=I},
\end{aligned}$$

ensuite, par une intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
I &= -C_s\int_0^{+\infty} \partial_\tau\left(\langle K_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}\right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = -C_s\int_0^{+\infty} \langle \partial_\tau K_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s\int_0^{+\infty} \langle LK_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s\int_0^{+\infty} \langle LK_\tau(x,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= \langle LQ_x^s(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre (ii). Montrons maintenant (iii). Soit $x \in Dom(\varphi)$, alors par la définition de la fonction $Q_x^s(t,\cdot)$ et le théorème de dérivation sous le signe somme on a que

$$\begin{aligned}
\frac{t^{1-2s}}{2s}\partial_t Q_x^s(t,y) &= \frac{t^{1-2s}C_s}{2s}\partial_t\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = \frac{t^{1-2s}C_s}{2s}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)\partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= -\frac{C_s}{4s}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\left(\frac{t^2}{\tau}\right)^{1-s}\frac{d\tau}{\tau},
\end{aligned}$$

ensuite, par le changement de variable $\tau = \frac{t^2}{4r}$, on obtient que

$$-\frac{C_s}{4s}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\left(\frac{t^2}{\tau}\right)^{1-s}\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{C_s}{4^s s}\int_0^{+\infty} K_{\frac{t^2}{4r}}(x,y) e^{-r}\frac{dr}{r^s},$$

et alors, par l'identité ci-dessus on a

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{1}{2s}t^{1-2s}\partial_t Q_x^s(t,\cdot), \varphi\right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\frac{C_s}{4^s s}\int_0^{+\infty} \left\langle K_{\frac{t^2}{4r}}(x,\cdot), \varphi\right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r}\frac{dr}{r^s} \\
&= \lim_{t\to 0^+} -\frac{C_s}{4^s s}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}L}\varphi(x) e^{-r}\frac{dr}{r^s} = -\frac{C_s}{4^s s}\varphi(x)\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{-s}dr \\
&= -\frac{\Gamma(1-s)}{4^s s\Gamma(s)}\varphi(x).
\end{aligned}$$

Finalement, par l'identité $\Gamma(-s) = -\dfrac{\Gamma(1-s)}{s}$ on conclut que $-\frac{\Gamma(1-s)}{4^s s\Gamma(s)}f(x) = \frac{\Gamma(-s)}{4^s\Gamma(s)}f(x)$ et de cette façon on a bien montré la propriété (iii). ■

Dans le cadre du Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ la relation qui existe entre l'équation du problème d'extension :

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0$$

et son équation conjuguée (voir Lemme 2.1) est généralisée rapidement au cadre de l'opérateur L^s, plus précisément on a le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soit* $0 < s < 1$. *Si* $u \in L^2(\Omega)$ *est une solution au sens de* $L^2(\Omega)$ *de l'équation du problème d'extension :*

$$\partial_t^2 u(t,y) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,y) - Lu(t,y) = 0,$$

alors la fonction $v = t^{1-2s}\partial_t u$ *est une solution au sens de* $L^2(\Omega)$ *de l'équation conjuguée :*

$$\partial_t^2 v(t,y) - \frac{1-2s}{t}\partial_t v(t,y) - Lv(t,y) = 0.$$

Inversement, si $v \in L^2(\Omega)$ *est une solution au sens de* $L^2(\Omega)$ *de l'équation conjuguée alors la fonction* $u = -t^{-(1-2s)}\partial_t v$ *est une solution au sens de* $L^2(\Omega)$ *de l'équation du problème d'extension.*

Preuve. Cette preuve suit le même schéma du Lemme 2.1 avec $a = 1-2s$. En effet, si $u \in L^2(\Omega)$ est une solution de l'equation du problème d'extension alors pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on a que :

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^2 v - \frac{1-2s}{t}\partial_t v - Lv, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle -\partial_t^2(t^{1-2s}\partial_t u) - \frac{1-2s}{t}\partial_t(t^{1-2s}\partial_t u) - L(t^{1-2s}\partial_t u), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle t^{1-2s}\partial_t\left(\partial_t^2 u + \frac{1-2s}{t}\partial_t u - Lu\right), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.
\end{aligned}$$

La preuve de la relation inverse est analogue. ■

Maintenant nous avons les outils nécessaires pour trouver le noyau de type Poisson P_t^s dans le sens de la Définition 4.4. Tout d'abord on regarde la solution $Q_x^{1-s}(t,y)$ au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation conjuguée

$$\partial_t^2 v(t,y) - \frac{1-2s}{t}\partial_t v(t,y) - Lv(t,y) = 0$$

qui est donnée par la Proposition 4.1 en prenant la puissance $1-s$. En effet dans ce cas on obtient que $1-2(1-s) = -(1-2s)$ et de cette façon on récupère l'expression $-\frac{1-2s}{t}$ qui caractérise cette équation. Ensuite, par le Lemme 4.2 on récupère une solution de l'equation du problème d'extension

$$\partial_t^2 v(t,y) + \frac{1-2s}{t} + \partial_t v(t,y) - Lv(t,y) = 0,$$

donnée par l'expression $-t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,y)$. Comme cette équation est linéaire on sait que la fonction $t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,y)$ est aussi une solution. Finalement, motivés par la propriété (iii) de la Proposition 4.1 avec la puissance $1-s$: $\lim_{t\to 0^+}\left\langle \frac{1}{2(1-s)}t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,\cdot), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{\Gamma(-(1-s))}{4^{1-s}\Gamma(1-s)}\varphi(x)$ on définit la fonction P_t^s par :

$$P_t^s(x,y) = C(s)t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,y),$$

avec la constante $C(s) = \dfrac{4^{1-s}\Gamma(1-s)}{\Gamma(-(1-s))2(1-s)}$.

Le théorème suivant nous montre que la fonction P_t^s définie ci-dessus est en effet le noyau de type Poisson recherché et de plus, il nous montre les propriétés principales de cette fonction. Néanmoins, avant de continuer il convient de donner une expression explicite de la fonction $P_t^s(x,y)$. En calculant la dérivée par rapport au temps de la fonction Q_x^{1-s} on obtient que :

$$\begin{aligned}
P_t^s(x,y) &= C(s)t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,y) = C(s)t^{-1+2s}C_{1-s}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)\partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^s} \\
&= -C(s)\frac{t^{2s}}{2\Gamma(1-s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}
\end{aligned}$$

et donc $P_t^s(x,y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$.

Nous avons alors le théorème :

Théorème 4.4. *Pour $0 < s < 1$ la fonction*

$$P_t^s(x,y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$$

est telle que :

(i) Pour tout $y \in \Omega$ fixé la fonction $P_t^s(\cdot,y)$ appartient à $L^2(\Omega)$ et vérifie l'équation

$$\partial_t^2 P_t^s(x,y) + \frac{1-2s}{t}\partial_t P_t^s(x,y) - LP_t^s(x,y) = 0$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ la limite $\lim_{t\to 0^+}\langle P_t^s(x,\cdot),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x)$ a lieu pour presque tout $x \in \Omega$.

(iii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ la solution du problème d'extension, (43)-(44) u(t,x) donnée par la formule

$$u(t,x) = C_s\int_0^{+\infty} e^{-\tau L}L^s\varphi(x)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}}$$

s'écrit sous la forme :

$$u(t,x) = \int_\Omega P_t^s(x,y)\varphi(y)dy, \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et pour presque tout } x \in \Omega.$$

Et de plus, $\sup_{t>0}|u(t,x)| \leq \sup_{\tau>0}|e^{-\tau L}\varphi(x)|$, pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. (i) Soit $y \in \Omega$ alors par l'hypothèse (c) faite sur le noyau $K_\tau(x,y)$: $\|K_\tau(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\tau K_\tau(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_y\frac{(1+\tau^\varepsilon)}{\tau^\varepsilon}$ on a la majoration

$$\|P_t^s(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\|K_\tau(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)}e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \leq C_y\int_0^{+\infty}(1+\tau^\varepsilon)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s+\varepsilon}}$$

de cette façon, pour montrer que $P_t^s(\cdot,y) \in L^2(\Omega)$ il suffit de montrer que la dernière intégrale ci-dessus converge. En effet, on a par le changement de variables $\tau = \frac{t^2}{4r}$ que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(1+\tau)^\varepsilon e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s+\varepsilon}} &= \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right)e^{-r}r^{s+\varepsilon-1}dr = \int_0^1\left(1+\frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right)e^{-r}r^{s+\varepsilon-1}dr \\ &+ \int_1^{+\infty}\left(1+\frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right)e^{-r}r^{s+\varepsilon-1}dr = I_1 + I_2,\end{aligned}$$

comme $\Gamma(s+\varepsilon) = \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{s+\varepsilon-1}dr < +\infty$ et $0 < s < 1$ on a alors que $I_1 = \int_0^1 e^{-r}r^{s+\varepsilon-1}dr + \frac{t^{2\varepsilon}}{4^\varepsilon}\int_0^1 e^{-r}r^{s-1} < +\infty$ et de même, $I_2 \leq \int_1^{+\infty} e^{-r}r^{s+\varepsilon-1} < \Gamma(s+\varepsilon) < +\infty$.

D'autre part, comme l'opérateur $e^{-\sigma L}$ avec $\sigma > 0$ est un opérateur linéaire borné sur $L^2(\Omega)$ on a que $e^{-\sigma L}P_t^s(\cdot,y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-\sigma L}K_\tau(\cdot,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$, d'où

$$\frac{e^{-\sigma L}P_t^s(\cdot,y) - P_t^s(\cdot,y)}{\sigma} = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sigma L}K_\tau(\cdot,y) - K_t(\cdot,y)}{\sigma}e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}. \tag{52}$$

Alors par le théorème des accroissements finis il existe $\theta > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{e^{-\sigma L}P_t^s(\cdot,y) - P_t^s(\cdot,y)}{\sigma}\right\|_{L^2(\Omega)} &= \left\|Le^{-\theta L}K_\tau(\cdot,y)\right\|_{L^2(\Omega)} = \left\|e^{-\theta L}L\,K_\tau(\cdot,y)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|LK_\tau(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\partial_\tau K_\tau(\cdot,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_y(1+\tau^\varepsilon)\tau^{-\varepsilon}\end{aligned}$$

et alors on obtient une borne uniforme dans σ, de cette façon par le théorème de convergence dominée (pour les intégrales au sens de Bochner) on a dans la formule (52), lorsque $\sigma \to 0^+$, que

$$-LP_t^s(\cdot, y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \partial_\tau(K_\tau(\cdot, y))e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

Maintenant nous disposons des outils nécessaires pour montrer que la fonction $P_t^s(x,y)$ vérifie l'équation (43) pour presque tout $x \in \Omega$. En effet, par le théorème de convergence dominée, les dérivées par rapport à t de la fonction $P_t^s(x,y)$ peuvent être calculées comme dérivation sous le signe intégral et de plus, par une intégration par parties, on a alors que

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 P_t^s(x,y) + \frac{1-2s}{t}\partial_t P_t^s(x,y) &= \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)\left(\frac{t^2}{4\tau^2} - \frac{1+s}{\tau}\right)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \\
&= -\frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \partial_\tau K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = LP_t^s(x,y).
\end{aligned}$$

De cette façon on conclut la preuve du point (i) de ce théorème.

(ii) Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ comme $P_t^s(x,y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = C(s)t^{-(1-2s)}\partial_t Q_x^{1-s}(t,y)$, avec la constante $C(s) = \dfrac{4^{1-s}\Gamma(1-s)}{\Gamma(-(1-s))2(1-s)}$ par la propriété (iii) de la Proposition 4.1 on vérifie immédiatement que

$$\lim_{t\to 0^+}\langle P_t^s(x,\cdot), \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x),$$

pour tout $x \in Dom(\varphi)$.

(iii)Pour montrer que la solution du problème d'extension $u(t,x)$ s'écrit sous la forme $u(t,x) = \displaystyle\int_\Omega P_t^s(x,y)\varphi(y)dy$ tout d'abord nous allons montrer que

$$u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}e^{-\tau L}\varphi(x)\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

En effet, pour $g \in L^2(\Omega)$ par la formule (45) on a que

$$\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\left\langle e^{-\tau L}L^s\varphi, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\tau\lambda}(\tau\lambda)^s dE_{\varphi,g}(\lambda)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau}}_{:=I},$$

ensuite, par le changement de variables $\lambda\tau = \frac{t^2}{4r}$ on obtient dans l'intégrale ci-dessus que

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}}\left(\frac{t^2}{4r}\right)^s dE_{\varphi,g}(\lambda)e^{-r\lambda}\frac{dr}{r} = \frac{t^{2s}}{4s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}}e^{-r\lambda}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}dE_{\varphi,g}(\lambda) \\
&= \frac{t^{2s}}{4s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-r\lambda}dE_{\varphi,g}(\lambda)e^{-\frac{t^2}{4r}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\left\langle e^{-rL}\varphi, g\right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4r}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}
\end{aligned}$$

et en retournant à la variable τ dans la dernière intégrale ci-dessus on trouve que

$$\langle u(t,\cdot), g\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \frac{t^2}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}e^{-\tau L}\varphi\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}, g\right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

et de cette façon pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}e^{-\tau L}\varphi(x)\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

Cette identité nous permet d'écrire la fonction $u(t,x)$ sous la forme énoncée dans la propriété (iii) de ce théorème. En effet, comme $e^{-\tau L}\varphi(x) = \displaystyle\int_\Omega K_\tau(x,y)\varphi(y)dy$ dans l'identité ci-dessus on obtient pour tout $t>0$ et pour presque tout $x \in \Omega$ que

$$u(t,x) \quad = \quad \frac{t^2}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\left(\int_\Omega K_\tau(x,y)\varphi(y)dy\right)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \int_\Omega \frac{t^2}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}\varphi(y)dy = \int_\Omega P_t^s(x,y)\varphi(y)dy.$$

Finalement, montrons que pour presque tout $x \in \Omega$ on a la majoration $\sup\limits_{t>0}|u(t,x)| \leq \sup\limits_{\tau>0}|e^{-\tau L}\varphi(x)|$. Nous avons montré que $u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}}e^{-\tau\varphi}\varphi(x)\frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$, alors par le changement de variable $r = \frac{t^2}{4\tau}$ on obtient dans l'expression ci-dessus que

$$u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}L}\varphi(x)e^{-r}\frac{dr}{r^{1-s}},$$

d'où pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t>0$ on a la majoration

$$|u(t,x)| \leq \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\left|e^{-\frac{t^2}{4r}}\varphi(x)\right|e^{-r}\frac{dr}{r^{1-s}} \leq \frac{1}{\Gamma(s)}\sup_{\tau>0}|e^{-\tau L}\varphi(x)|\int_0^{+\infty} e^{-r}r^{s-1}dr = \sup_{\tau>0}|e^{-\tau L}\varphi(x)|$$

et de cette façon on conclut la démonstration de ce théorème. ■

Pour terminer cette section, nous allons montrer comme annoncé que le Théorème 4.3 est une généralisation du Théorème 2.1, plus précisément, en prenant $L = -\Delta$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$ l'espace tout entier nous allons montrer qu'on récupère le noyau de type Poisson trouvé dans la Section 2 donné par la formule

$$P_a(t,x) = \frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

avec $-1 < a < 1$. En effect, tout d'abord par le changement de variable utilisé dans la Section 2 $s = \frac{1-a}{2}$ on obtient dans la formule ci-dessus que

$$P_{1-2s}(t,x) = \frac{t^{2s}}{(t^s+|x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}.$$

Ensuite, comme l'action du semi-groupe $(e^{\tau\Delta})_{\tau>0}$ est donné par convolution avec le noyau $K_\tau(x,y) = h_\tau(x-y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}}$ par la formule du noyau $P_t^s(x,y)$ qu'on a en déduit antérieurement on a alors

$$P_t^s(x,y) = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} K_\tau(x,y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} h_\tau(x-y)e^{-\frac{t^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{t^2+|x-y|^2}{4\tau}}\frac{d\tau}{\tau^{1+s}},$$

maintenant par le changement de variable $r = \frac{t^2+|x-y|^2}{4\tau}$ on obtient dans l'expression ci-dessus que

$$P_t^s(x,y) = C_2(s)\frac{t^{2s}}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} = C_2(s)P_{1-2s}(t,x-y)$$

avec la constante $C_2(s) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)}$ et de cette façon, on récupère le noyau de type Poisson $P_{1-2s}(t,x-y)$ trouvé dans la Section 2.

4.2 L'opérateur Laplacien Fractionnaire sur les variétés non compactes

Dans cette section nous allons exposer les résultats développés dans l'article [1] *Some Constructions for the Fractional Laplacian on Noncompact Manifolds* sur la relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et un problème d'extension au demi-espace. Jusqu'à présent nous avons montré cette relation (Théorèmes 2.1 et 4.3) dans le cadre de l'espace $\mathbb{R}^n$ doté de la norme euclidienne $|\cdot|$. Motivés par le Théorème 2.1 les auteurs de cet article montrent comment cette relation entre le Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension est généralisée au cadre des variétés n-dimensionnelles non compactes dotées d'une métrique Riemannienne, en commençant par un cas plus simple donné par l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ qui est défini ci-dessous.

L'objectif est de construire l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur les variétés à travers d'un problème d'extension au demi-espace du même type que celui étudié tout au long de la Section 2 (voir Définition 2.1).

En suivant le travail réalisé dans [1] nous commencerons cette brève exposition où le Laplacien Fractionnaire est défini sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ (voir [1] Section 2). Cet espace est un exemple simple d'une variété non compacte avec une métrique Riemannienne et est défini comme la branche supérieure d'un hyperboloïde dans $\mathbb{R}^{n+1}$, plus précisément on a :

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_0 > 0\},$$

ou de façon équivalent on a

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (\cosh(r), \sinh(r)\theta), \quad \text{avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

L'espace $\mathbb{H}^n$ est doté de la métrique $d_{\mathbb{H}^n} = dr^2 + \sinh^2 r d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ dénote la métrique sur la sphère dans $\mathbb{R}^n$ de centre l'origine et rayon 1 $\mathbb{S}^{n-1}$. De plus $d_h x := \sinh^{n-1} r dr d\sigma$ dénote l'élément de volume dans $\mathbb{H}^n$.
Avec ces définitions l'opérateur Laplacien sur l'espace $\mathbb{H}^n$ également nommé l'opérateur de Laplace-Beltrami dans la littérature est donné par la formule

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \partial_r^2 + (n-1)\frac{\cosh(r)}{\sinh(r)}\partial_r + \Delta_\theta,$$

où Δ_θ dénote l'opérateur Laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
Le choix de l'espace $\mathbb{H}^n$ comme une première approche de la généralisation du Théorème 2.1 aux variétés Riemanniennes est justifié par le fait que dans cet espace, doté du produit intérieur

$$[x, y] = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n, \quad \text{pour tout} \quad x, y \in \mathbb{H}^n,$$

des outils d'analyse harmonique comme la transformation de Fourier sont définis et par conséquent on peut trouver une première définition de l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur $\mathbb{H}^n$, noté $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$, au niveau de Fourier de façon analogue à la définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$ sur $\mathbb{R}^n$ au niveau de Fourier donné par l'expression $\widehat{(-\Delta)^s}\varphi(\xi) = C\,|\xi|^{2s}\widehat{\varphi}(\xi)$. De cette façon, par analogie au espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, pour $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ et $\xi = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, on définit la transformation de Fourier de la fonction f par :

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(r, \theta) = \int_{\mathbb{H}^n} f(x) e_{r,\theta}(x) d_h(x),$$

où pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixés, la fonction $e(r, \theta)(x) = [x, (1, \theta)]^{ir - \frac{n-1}{2}}$ vérifie au sens classique l'équation

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} e_{r,\theta} = -\left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right) e_{r,\theta}.$$

Par le théorème d'intégration par parties on montre que

$$\widehat{-\Delta_{\mathbb{H}^n}} f(r, \theta) = \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right) \widehat{f}(r, \theta), \quad \text{pour tout} \quad r \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$$

et de cette façon en utilisant la transformation de Fourier sur l'espace $\mathbb{H}^n$ on définit les puissances fractionnaires de l'opérateur $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ au niveau de Fourier de la façon suivante :

Définition 4.5 (Laplacien Fractionnaire sur $\mathbb{H}^n$ au niveau de Fourier)**.** *Soit $0 < s < 1$. L'action de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ sur une fonction $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ au niveau de Fourier est donnée par la formule :*

$$((-\Delta_{Hn})^s f)^\wedge (r,\theta) = \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right)^s \widehat{f}(r,\theta), \tag{53}$$

pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Maintenant avec la métrique $d = d_{\mathbb{H}^n} + dt^2$ définie sur l'espace $[0,+\infty[\times\mathbb{H}^n$ pour $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ avec $0 < s < 1$ on considère le problème d'extension au demi-espace :

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t,x) = 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{H}^n \text{ et } t > 0 \tag{54}$$

$$u(0,x) = f(x). \tag{55}$$

De même façon que la Section 2.3, en prenant la transformation de Fourier par rapport à la variable $x \in \mathbb{H}^n$ on montre qu'il existe une unique solution classique $\widehat{u}(t,r,\theta)$ du problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t,r,\theta) + \dfrac{1-2s}{t}\partial_t \widehat{u}(t,r,\theta) - \left(r^2 + \dfrac{(n-1)^2}{4}\right)\widehat{u}(t,r,\theta) = 0, \quad t > 0 \\ \widehat{u}(0,r,\theta) = \widehat{f}(r,\theta), \end{cases}$$

pour chaque $(r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ fixé. De plus, la relation entre l'action de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ sur une fonction $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ et le problème d'extension au demi-espace pour f, (54)-(55), est montrée au niveau de Fourier dans le théorème suivant :

Théorème 4.5 ([1], Section 2.3)**.** *Soit $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ et $\widehat{u}(t,r,\theta)$ la solution classique du problème d'extension pour f au niveau de Fourier*

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t,r,\theta) + \dfrac{1-2s}{t}\partial_t \widehat{u}(t,r,\theta) - \left(r^2 + \dfrac{(n-1)^2}{4}\right)\widehat{u}(t,r,\theta) = 0, \quad t > 0 \\ \widehat{u}(0,r,\theta) = \widehat{f}(r,\theta). \end{cases}$$

Alors on a l'identité

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-2s}\partial_t \widehat{u}(t,r,\theta) = -C_s \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4}\right)^s \widehat{f}(r,\theta), \quad \textit{pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}, \tag{56}$$

avec une constante C_s positive qui ne dépend que de s.

Pour l'instant on a deux définitions équivalents de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ avec $0 < s < 1$ au niveau de Fourier données par les expressions (53) et (56) et une définition de cet opérateur dans la variable réelle $x \in \mathbb{H}^n$ est désirable. Dans le cadre de la transformation de Fourier sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, pour $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ la formule d'inversion suivante a lieu :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{e}_{r,\theta}(x)\widehat{f}(r,\theta)d\theta \frac{dr}{|c(r)|^2},$$

avec $c(r)$ le coefficient de Harish-Chandra (voir [1] Section 2.2). De cette façon, à l'aide de la relation (56) une définition de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ dans la variable $x \in \mathbb{H}^n$ est déduite dans le théorème suivant :

Théorème 4.6 ([1], Section 2.2)**.** *Soit $0 < s < 1$. Pour $f \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap \mathcal{C}^\sigma(\mathbb{H}^n)$ avec $\sigma > 2s$ on a :*

$$(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s f(x) = vp \int_{\mathbb{H}^n} (f(x) - f(y))\mathcal{K}_s(d_{\mathbb{H}^n}(x,y))d_h y, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{H}^n. \tag{57}$$

Dans ce théorème le noyau $\mathcal{K}_s$ est une fonction positive définie sur $]0,+\infty[$ qui a le comportement asymptotique suivant (voir [1], équation 2.3 et Théorème 2.4) :

$$\text{lorsque } z \to 0^+, \qquad \mathcal{K}_s(z) \sim \tfrac{1}{z^{n+2s}}$$
$$\text{lorsque } z \to +\infty, \qquad \mathcal{K}_s(z) \sim \tfrac{e^{-(n-1)s}}{z^{1+s}}.$$

Remarque 4.4. *Il est important de remarquer que la définition de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$, dans la variable $x \in \mathbb{H}^n$, donnée par l'expression (57) est une conséquence de la relation qui existe entre cet opérateur et le problème d'extension exprimée par la formule (56). En revanche, pour l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur l'espace $\mathbb{R}^n$ $(-\Delta)^s$ nous avons vu comment la définition, déjà connue, de cet opérateur à travers d'une intégrale singulière (voir la formule (3)) peut être récupérée à travers du problème au demi-espace.*

5 Annexe

Dans cet annexe nous donnons les preuves de quelques résultats connus utilisés tout au long du mémoire.

5.1 Des résultats utilisés pour étudier l'opérateur Laplacien Fractionnaire

Preuve de la Proposition 1.1. Pour $z \in \mathbb{C}$ nous avons au sens des distributions l'identité

$$\widehat{\Phi_z} = \Phi_{-(n+z)}.$$

Nous donnerons la preuve pour le cas $Re(z) > -n$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous allons montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = C(n,z) \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(n+z)} \varphi(x) dx,$$

avec une constante $C(n,z)$ que l'on donnera après. En changeant à des coordonnées polaires dans la variable de fréquence $\xi = \rho\,\sigma$ où $\rho \in [0,+\infty[$ et $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{\varphi}(\rho\sigma) d\sigma d\rho = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\, i\rho\sigma\cdot x} \widehat{\varphi}(x) dx d\sigma d\rho,$$

maintenant, par le changement à des cordonnées polaires dans la variable réelle $x = r\,\theta$ ($r \in [0,+\infty[$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$) et par le Théorème de Fubini on obtient dans la dernière intégrale de la formule précédente que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} r^{n-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\rho\sigma\cdot r\theta} d\sigma \right) d\theta dr d\rho. \tag{58}$$

Notons $\omega(t) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i t(\sigma\cdot\theta)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i t\sigma_1} d\sigma$, donc, on trouve que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i\rho\sigma\cdot r\theta} d\sigma = \omega(\rho r)$ est independent de θ, alors, dans la formule (58) on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \rho^{z+n-1} \omega(\rho\, r) d\rho \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\,\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty r^{-(z+n)+1} (r\rho)^{z+n-1} \omega(\rho\, r) d\rho \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\,\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\
&= \int_0^\infty r^{-(z+n)} \left(\int_0^\infty (r\rho)^{z+n-1} \omega(\rho\, r) d(r\rho) \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\,\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\
&= C(n,z) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{|x|^{z+n}} dx,
\end{aligned}$$

avec

$$C(n,z) = \int_0^\infty t^{z+n-1} \omega(t) dt.$$

■

Lemme 5.1 (Formule de quotient différentiel [6], Section 3)**.** *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Alors*

$$(-\Delta)^s \varphi(x) = C_2(n,s) vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = -\frac{1}{2} C_2(n,s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

avec la constante $C_2(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(y_1)}{|y|^{n+2s}} dy \right)^{-1}$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Par la positivité et la symétrie du poids $|\cdot|^{-(n+2s)}$ on a

$$C_2(n,s)vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}dy = -\frac{1}{2}C_2(n,s)vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy.$$

Il s'agit maintenant de vérifier que dans l'intégrale précédente on peut se passer de la valeur principale.

On a donc

$$\begin{aligned} vp\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<M}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy \\ &\quad+\int_{|y|>M}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy. \end{aligned} \tag{59}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la deuxième intégrale ne pose aucun problème et il suffit d'étudier le premier terme ci-dessus. Pour cela on utilise un développement de Taylor de deuxième ordre :

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \nabla\varphi(x)\cdot h + \frac{1}{2}h\cdot D^2\varphi(x)h + o(|h|^3), \quad \text{pour} \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi en prenant $h = y$ et $h = -y$ on obtient l'identité $\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x) = y\cdot D^2\varphi(x)y + 2o(|y|^3)$ et donc pour un $M > 0$ assez petit on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left|\int_{|y|<M}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}}dy\right| &\leq \int_{|y|<M}\frac{|y\cdot D^2\varphi(x)y|}{|y|^{n+2s}}dy \leq \int_{|y|<M}\frac{||D^2\varphi||_\infty|y|^2}{|y|^{n+2s}}dy \\ &\leq ||D^2\varphi||_\infty\int_{|y|<M}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}dy. \end{aligned}$$

Mais comme $0 < s < 1$ on a

$$\int_{|y|<M}\frac{1}{|y|^{n+2s-2}}dy \leq C\int_0^M \rho^{1-2s}d\rho < +\infty.$$

On observe alors que la première intégrale de (59) peut être contrôlée uniformément par rapport à ε. Par le théorème de convergence dominée on en déduit qu'il n'est pas nécessaire de considérer une valeur principale dans cette première intégrale de la formule (59).

■

Une fois qu'on a montré ce lemme on passe à la preuve de l'équivalence de la définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$, avec $0 < s < 1$, comment la transformation de Fourier inverse de la fonction $|\cdot|^{2s}\widehat{\varphi}$ et comment un opérateur d'intégrale singulière.

Preuve de la Proposition 1.2. Tout d'abord remarquons que, comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par le Lemme 5.1 la fonction de variable $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}},$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Définissons donc la fonction $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$T\varphi(x) = -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}}dy, \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{60}$$

Ensuite, par la définition de la transformation de Fourier on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\widehat{T\varphi}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi} T\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}(\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x))}{|y|^{n+2s}}dy\right)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\,(x+y)\cdot\xi+2\pi i\, y\cdot\xi}\varphi(x+y)dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\,(x-y)\cdot\xi-2\pi i\, y\cdot\xi}\varphi(x-y)dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\, x\cdot\xi}\varphi(x)dx\right)\frac{1}{|y|^{n+2s}}dy \\
&= -\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i\, y\cdot\xi}+e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2s}}dy\right)\widehat{\varphi}(\xi).
\end{aligned}$$

Étudions maintenant l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i\, y\cdot\xi}+e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2s}}dy$. Plus précisément, l'objectif est de monter que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i\, y\cdot\xi}+e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2s}}dy = C\,|\xi|^{2s}.$$

D'abord, grâce à l'identité $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, on trouve que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i\, y\cdot\xi}+e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2s}}dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(y\cdot\xi)}{|y|^{n+2s}}dy.$$

Ensuite, en prenant la rotation $\Theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\Theta(|x|e_1) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ et en écrivant $\xi = \Theta(|\xi|e_1)$ on obtient :

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi\cdot y)}{|y|^{n+2s}}dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\Theta(|\xi|e_1)\cdot y)}{|y|^{n+2s}}dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(|\xi|e_1\cdot\Theta^t y)}{|y|^{n+2s}}dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(|\xi|w_1)}{|w|^{n+2s}}dw,$$

où on a posé $w = \Theta^t y$. Alors,

$$2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i\, y\cdot\xi}+e^{-2\pi i\, y\cdot\xi}-2}{|y|^{n+2s}}dy = 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(|\xi|w_1)}{\left|\frac{|\xi|w}{|\xi|}\right|^{n+2s}}dw = |\xi|^{2s}\left(2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(w_1)}{|w|^{n+2s}}dw\right).$$

Soit $C := 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(w_1)}{|w|^{n+2s}}dw = 2\,C_3(n,s)^{-1}$. On vient de montrer que

$$\widehat{T\varphi}(\xi) = C|\xi|^{2s}\widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a que $|\cdot|^{2s}\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors on peut prendre la transformation de Fourier inverse dans l'expression ci-dessus et de cette façon on obtient

$$\frac{1}{2}C_2(n,s)\,T\varphi = (|\cdot|^{2s}\widehat{(\varphi)})^{\vee}.$$

Finalement, par la définition de la fonction $T\varphi$, formule (60), et le Lemme 5.1 on obtient que

$$(-\Delta)^s\varphi = (|\cdot|^{2s}\widehat{\varphi})^{\vee}.$$

Pour finir la preuve il reste de montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(w_1)}{|w|^{n+2s}}dw < +\infty$. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $|w| < M$, avec $M > 0$ assez petit on a, $\frac{1-\cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} \le \frac{|w_1|^2}{|w|^{n+2s}} \le \frac{1}{|w|^{n+2s-2}}$. Alors

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(w_1)}{|w|^{n+2s}}dw \le \int_0^M \rho^{1-2s}d\rho + \int_M^{+\infty} \rho^{-1-2s}d\rho < +\infty.$$

■

5.2 La méthode de Perron

Avant de passer à la preuve du Théorème 2.3 nous monterons le lemme suivant qui sera utilisé plus tard.

Lemme 5.2 (Problème de Dirichlet sur les sous-intervalles compacts)**.** *Soient a_1, a_2, b_1 et b_2 nombres réels. Alors il existe une unique solution classique du problème*

$$\left\{ \begin{array}{c} -f''(z) + w(z)f(z) = 0, \quad z \in]a_1, b_1[\\ f(a_1) = a_2 \\ f(b_1) = b_2. \end{array} \right. \tag{61}$$

Preuve. Tout d'abord on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (61) en utilisant le théorème de Lax-Milgram (voir [2], Chapitres 5 et 8). Pour cela, d'abord, on va transformer le problème (61) dans un problème de Dirichlet homogène. Soit alors f_0 une fonction fixée de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f_0(a_1) = a_2$ et $f_0(b_1) = b_2$, notons que si f est une solution classique du problème (61) alors la fonction $F = f - f_0$ est une solution classique du problème de Dirichlet suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} -F''(z) + w(z)F(z) = F_0(z), \quad z \in]a_1, b_1[\\ F(a_1) = F(b_1) = 0, \end{array} \right. \tag{62}$$

avec la fonction $F_0 = f_0'' - wf_0$. De cette façon, on commence par montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (62). En prenant $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a_1, b_1[)$ et en multipliant l'équation du problème antérieur par ϕ, par une intégration par parties on trouve l'équation

$$\int_{a_1}^{b_1} F'(z)\phi'(z)dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)F(z)\phi(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} F_0(z)\phi(z)dz. \tag{63}$$

Par le théorème de Lax-Milgram il suffit de montrer que

$$a(u, v) = \int_{a_1}^{b_1} u'(z)v'(z)dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)u(z)v(z)dz$$

est une forme bi-linéaire, continue et coercive dans $H_0^1(]a_1, b_1[)$. Ensuite, comme $b(u) = \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} F_0(z)u(z)dz$ pour tout $u \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ est toujours une fonctionnelle linéaire et continue dans $H_0^1(]a_1, b_1[)$ il existe une unique fonction $F \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ solution faible du problème (62). De cette façon, $f = F + f_0$ est bien une solution faible du problème (61).

Montrons alors que $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les conditions mentionnées antérieurement. D'abord, il est évident que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bi-linéaire. Ensuite, comme la fonction continue et positive $w(z)$ est toujours bornée sur le compact $[a_1, b_1]$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient, pour tout $u, v \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ que $|a(u, v)| \leq C||u||_{H_0^1} ||v||_{H_0^1}$. Finalement, $a(\cdot, \cdot)$ est coercive par l'inégalité de Poincaré. En effet, comme $w \geq 0$ on a bien pour tout $u \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ que

$$a(u, u) = \int_{a_1}^{b_1} |u'(z)|^2 dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)|u(z)|^2 dz \geq \int_{a_1}^{b_1} |u'(z)|^2 dz \geq C\, ||u||^2_{H_0^1}.$$

Montrons maintenant la régularité de la fonction f, solution faible du problème (61). D'abord, par une intégration par parties, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a_1, b_1[)$ on a que $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} F'(z)\phi(z)dz = -\int_{a_1}^{b_1} F''(z)\phi(z)dz$, alors dans l'équation (63) on obtient que

$$\int_{a_1}^{b_1} F''(z)\phi(z)dz = -\int_{a_1}^{b_1} (f_0''(z) - w(z)f_0(z) - w(z)F(z))\phi(z)dz,$$

d'où, comme $F_0 - wF \in L^2(]a_1, b_1[)$ et $F \in H_0^1(]a_1, a_2[)$ est une solution faible du problème de Dirichlet (62) on a que $F'' \in L^2(]a_1, b_1[)$ et par conséquent $F \in H^2(]a_1, b_1[)$. En particulier on obtient que $F' \in H^1([a_1, a_2])$ et alors on conclut que $F' \in \mathcal{C}([a_1, a_2])$.

D'autre part, comme $f \in H^1(]a_1, b_1[)$ on a que $f \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$ d'où on obtient que $f_0'' - wf = f_0'' - wf_0 - wF \in \mathcal{C}([a_1, a_2])$, donc, $F'' = f_0'' - wf_0 - wF \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$. On conclut alors que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et par conséquent f est aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. ■

Démonstration du Théorème 2.3. Tout d'abord supposons qu'il existe $z_0 \in I$ tel que $A(z_0) > B(z_0)$. On voit que $A \in S^-$ est une fonction continue car $A \in H^1_{loc}(I)$ et elle est convexe par la condition $A'' - wA \in \mathcal{D}^+$. De même, $B \in S^+$ est une fonction continue et concave par la condition $-(B'' - wB) \in \mathcal{D}^+$. Alors, comme $A(z_0) > B(z_0)$ on a que l'ensemble $J = \{z \in I : A(z) > B(z)\} \neq \emptyset$ et de plus, par la continuité de la fonction $A - B$, il existe un intervalle $]a_0, b_0[$ tel que $z_0 \in]a_0, b_0[\subset J$ et tel que, par la convexité de A et la concavité de B, on a que : $\lim_{z \to a_0^+} A(z) - B(z) = \lim_{z \to b_0^-} A(z) - B(z) = 0$. De cette façon, on peut trouver $z_1, z_2 \in]a_0, b_0[$ tels que : $z_1 < z_0 < z_2$ où $A(z_1) - B(z_1) \leq A(z_0) - B(z_0)$ et $A(z_2) - B(z_2) \leq A(z_0) - B(z_0)$. Ce fait nous montre que la fonction $A - B$ doit être concave sur l'intervalle $]a_0, b_0[$.
D'autre part, sur le même intervalle, $]a_0, b_0[$, on a que $A'' - B'' \in \mathcal{D}^+$, en effet, on voit que

$$A'' - B'' = A'' - wA + wB - B'' + w(A - B) \in \mathcal{D}^+,$$

car la fonction $w(A - B) \geq 0$ sur $]a_0, b_0[$. De cette façon on obtient que la fonction $A - B$ est convexe sur l'intervalle $]a_0, b_0[$ et alors on a une contradiction. Ainsi, on la montré la partie (i).

Prenons maintenant la fonction

$$\phi(z) = \sup_{A \in S^-} A(z), \quad \text{pour tout} \quad z \in I.$$

Nous allons montrer que ϕ est bien une solution classique du problème

$$\begin{cases} -\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0 \qquad \text{sur} \quad I, \\ \lim_{z \to a^+} \phi(z) = a_1, \\ \lim_{z \to b^-} \phi(z) = b_1. \end{cases}$$

Tout d'abord, comme $A \in S^-$ et $B \in S^+$ alors par la définition de la fonction ϕ on a que

$$A(z) \leq \phi(z) \leq B(z), \quad \text{pour tout} \quad z \in I.$$

En particulier, cela montre que l'on a : $\lim_{z \to a^+} \phi(z) = a_1$ et $\lim_{z \to b^-} \phi(z) = b_1$. Il reste à montrer que $-\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0$ au sens classique pour tout $z \in I =]a, b[$. Prenons $z_1, z_2 \in I$ et notons l'intervalle $I_1 := [z_1, z_2] \subset I$. De même, notons par $f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ la solution classique du problème

$$\begin{cases} -f''(z) + w(z)f(z) = 0, \quad z \in [z_1, z_2] \\ f(a_1) = \phi(z_1) \\ f(b_1) = \phi(z_2), \end{cases}$$

donnée par le Lemme 5.2. L'objectif est de montrer que $\phi = f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ sur l'intervalle $[z_1, z_2]$, de cette façon, comme nous avons pris n'importe quels $z_1, z_2 \in I$ on obtient que ϕ vérifie l'équation $-\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0$ sur l'intervalle $I =]a, b[$. En applicant la partie (i) de ce théorème à l'intervalle $I_1 = [z_1, z_2]$ au lieu de l'intervalle I, pour n'importe quelle $A \in S^-$ on voit que $A \leq f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ sur l'intervalle I_1, car $f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)} \in S^+$ sur cet intervalle I_1. Ensuite, par la définition de ϕ on conclut alors que

$$\phi(z) \leq f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}(z),$$

pour tout $z \in I_1$.

D'autre part, comme $\phi(z) = \sup_{A \in S^-} A(z)$ pour tout $z \in I$, pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver $A_1, A_2 \in S^-$ telles que $\phi(z_1) - \varepsilon \leq A_1(z_1) \leq \phi(z_1)$ et $\phi(z_2) - \varepsilon \leq A_2(z_2) \leq \phi(z_2)$, on peut aussi supposer, sans perte de généralité, que $A_2(z_1) \leq A_1(z_1)$ et $A_1(z_2) \leq A_2(z_2)$. Définissons alors la fonction $A_0(z)$ par :

$$A_0(z) = \begin{cases} A_1(z), & a < z < z_1 \\ f_{I_1,\phi(z_1),\phi(z_2)}(z), & z_1 \leq z \leq z_2 \\ A_2(z), & z_2 < z < b \end{cases}$$

On veut montrer que $A_0 \in S^-$, de cette façon on a que $\phi(z) \geq f_{I_1,\phi(z_1),\phi(z_2)}(z)$ sur I_1 et par conséquent on obtient l'égalité $\phi = f_{I_1,\phi(z_1),\phi(z_2)}$ sur $I_1 = [z_1, z_2]$. Pour simplifier les notations on va noter $f = f_{I_1,\phi(z_1),\phi(z_2)}$. Alors par la formule des sauts on a au sens des distributions que :

$$A_0'' - wA_0 = (A_1'' - wA_1)\mathbb{1}_{]a,z_1[} + (f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-))\delta_{z_1} + (A_2'' - wA_2)\mathbb{1}_{]z_2,b[} + (A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-))\delta_{z_2}.$$

Comme $A_1, A_2 \in S^-$ pour montrer que $A_0 \in S^-$ il suffit de vérifier que $f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq 0$ et $A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-) \geq 0$. On a vu antérieurement que pour n'importe quelle $A \in S^-$ on a que $A \leq f$ sur l'intervalle I_1. En particulier, pour les fonctions A_1, A_2 on a que $A_1 \leq f$ et $A_2 \leq f$ sur $I_1 = [z_1, z_2]$. De plus on a que $A_1'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) > 0$ et $A_2'(z_2^+) - A_2'(z_2^-) > 0$, de cette façon on obtient que $f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq A_1'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq 0$ et par le même raisonnement $A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-) \geq 0$.

Pour finir la preuve de ce théorème montrons l'unicité de la solution ϕ. Clairement on a que $\phi \in S^- \cap S^+$, nous allons montrer que l'ensemble $S^- \cap S^+$ a un seul élément. En effet, si on peut trouver $\phi_1, \phi_2 \in S^- \cap S^+$ alors pour la partie (i) on a que, puisque $\phi_1 \in S^-$ et $\phi_2 \in S^+$ donc $\phi_1 \leq \phi_2$, ensuite, par le même raisonnement on obtient que $\phi_2 \leq \phi_1$ et alors on obtient que $\phi_1 = \phi_2$. ■

Références

[1] V. Banica, M.d.M. Gonzales et M. Sáez. Some Constructions for the Fractional Laplacian on Noncompact Manifolds. arxiv.org > math > arXiv :1212.3109, 2014.

[2] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Dunod, Paris, 1995.

[3] L. Caffarelli et E. Gutiérrez. Properties of the Solutions of the Linearized Monge-Ampère Equation. American Journal of Mathematics. Vol 19, No. 2 : 423-465, 1997.

[4] L. Caffarelli et L. Silvestre. An Extention Problem Related to the Fractional Laplacian. Communications in Partial Differential Equations. Vol 32 : 1245-1260, 2007.

[5] D. Chamorro et O. Jarrín. Fractional Laplacians and Nilpotent Lie Groups. arxiv.org > arXiv :1409.5055, 2014.

[6] E. Di Neiza, G. Palatucci et E. Valdinoci. Guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci math, Vol 136, No. 5 : 521-573, 2012.

[7] L. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society.

[8] D. Gilbarg et N. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, New York, 1997.

[9] L. Grafakos. Classical Fourier Analysis. Springer, New York, 2008

[10] D. Maldonado. Notes on F.J. Almgren's Frequency Formule. Topis in Analysis, Kansas State University, Departement of Mathematics, 2009.

[11] W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, Wisconsin New York, 1991.

[12] E.M. Stein. Singular Integrals and Differentiability Properties of Fonctions. Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[13] E.M Stein. Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[14] R. Stinga et L. Torrea. Extension Problem and Harnack's Inequality for some Fractional Operators. Communications in Partial Differential Equations. Vol 35 : 2092-2122, 2010.