AUTORIZACIÓN

Manuel Fernando Cortez, el abajo firmante, matriculado en el Máster en Investigación Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Máster: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES EN DOMINIOS QUE DEPENDEN DEL TIEMPO, realizado durante el curso académico 2010-2011 bajo la dirección del profesor Aníbal Rodríguez Bernal en el Departamento de Matemáticas Aplicadas, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

Atentamente
Manuel Fernando Cortez

Palabras Clave en Inglés

- Partial differential equations
- Noncilindrical domains
- Flow of a differential equation
- Balance equations
- Diffusion equations
- Maximum principle
- Energy estimate

Palabras Clave en Castellano

- Ecuaciones diferenciales parciales
- Dominios no cilíndricos
- Flujo de una ecuación diferencial
- Ecuaciones de balance
- Ecuaciones de difusión
- Principio del máximo
- Estimación de la energía

Codigo MSC 2000

- 34A34
- 35B
- 35B40
- 35F10
- 35K05
- 35K15
- 35K20
- 35K57

Resumen Del Trabajo

En este trabajo estudiamos Ecuaciones Diferenciales Parciales definidas en un dominio que se mueve con relación al tiempo siguiendo el flujo de una ecuación diferencial ordinaria prefijada, a partir de un dominio inicial dado. Empezamos encontrando la formulación de un tipo especial de ecuaciones en derivadas parciales conocidas como ecuaciones de balance. Para este tipo de ecuaciones encontramos las ecuaciones en derivadas parciales equivalentes en el dominio inicial y posteriormente estudiamos los casos particulares de ecuaciones sin difusión y con difusión. También analizamos ecuaciones generales de segundo orden que no son necesariamente de balance. Las ecuaciones sin difusión las estudiamos utilizando el método de las características. También probamos que las ecuaciones con difusión, dotadas de condiciones de contorno de Dirichlet y condición inicial estan bien planteadas en el dominio que se mueve con el tiempo. Para ello probamos que la parte principal de la ecuación equivalente en el dominio inicial es uniformemente elíptica.
Luego demostramos una versión del principio del Máximo débil para una ecuación en un dominio variable con relación al tiempo.
Por último realizamos estimaciones de energía en el dominio que depende del tiempo y con esto damos condiciones suficientes para que la solución tienda a cero cuando el tiempo tiende al infinito.

Summary

In this work we study Partial Differrential Equations defined in a domain that moves in time according to the flow of a given ordinary differential equation, starting out of a given initial domain. We first derive a formulation for a particular casa of partial differential equations known as balnace equations. For this kind of equations we find the equivalent partial differential equations in the initial domain and later we study some particular cases with and without diffusion. We also analyze general second order differential equations, not necessarily of balance type. The equations without diffusion are solved using the characteristics method. We also prove that the diffusion equations, endowed with Dirichlet boundary conditions and initial data, are well posed in the moving domain. For this we show that the principal part of the equivalent equation in the initial domain is uniformly elliptic. We then prove a version of the weal maximum principle for an equation in a mo-

ving domain.
Finally we perform suitable energy estimates in the moving domain and give sufficient conditions for the solution to converge to zero as time goes to infinity

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

PROYECTO FIN DE MASTER: ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES EN DOMINIOS QUE DEPENDEN DEL TIEMPO

AUTOR:
MANUEL FERNANDO CORTEZ
DIRECTOR:
ANÍBAL RODRIGUEZ BERNAL
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA e
INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
CSIC-UAM-UC3M-UCM

25 DE NOVIEMBRE DE 2011

Índice

1. INTRODUCION **2**

2. Ecuaciones de Balance **14**
2.1. Ecuaciones de Balance en Dominio Fijo 14
2.2. Ecuaciones de Balance en Dominios que varian dependiendo del tiempo 17
2.3. Condiciones de Contorno Dirichlet Homogéneas y Condiciones Iniciales 34

3. Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión **35**
3.1. Ecuación de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión y Sin Flujo 35
3.2. Ecuación de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión y con Flujo 39

4. Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo con Difusión **45**

5. EDPs Generales de Segundo Orden en Dominios Variables **50**
5.1. Existencia de Soluciones de Ecuaciones de Segundo Orden en Dominios que Depende del tiempo 53

6. Principio Del Máximo **55**
6.1. Principio del Máximo en un Dominio Fijo 55
6.2. Principio del Máximo en un Dominio que Depende del Tiempo . . 58

7. Estimación de Energía **60**
7.1. Estimación de Energía en un Dominio fijo 60
7.2. Estimación de Energía en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo 63
7.3. Bibliografía 67

1. INTRODUCION

En este trabajo estudiamos Ecuaciones Diferenciales Parciales definidas en un dominio que se mueve con relación al tiempo siguiendo el flujo de una ecuación diferencial ordinaria prefijada, a partir de un dominio inicial dado. Empezamos encontrando la formulación de un tipo especial de ecuaciones en derivadas parciales conocidas como ecuaciones de balance. Para este tipo de ecuaciones encontramos las ecuaciones en derivadas parciales equivalentes en el dominio inicial y posteriormente estudiamos los casos particulares de ecuaciones sin difusión y con difusión. También analizamos ecuaciones generales de segundo orden que no son necesariamente de balance. Las ecuaciones sin difusión las estudiamos utilizando el método de las características. También probamos que las ecuaciones con difusión, dotadas de condiciones de contorno de Dirichlet y condición inicial estan bien planteadas en el dominio que se mueve con el tiempo. Para ello probamos que la parte principal de la ecuación equivalente en el dominio inicial es uniformemente elíptica.
Luego demostramos una versión del principio del Máximo débil para una ecuación en un dominio variable con relación al tiempo.
Por último realizamos estimaciones de energía en el dominio que depende del tiempo y con esto damos condiciones suficientes para que la solución tienda a cero cuando el tiempo tiende al infinito.

Para empezar partimos recordando las ecuaciones de balance para un dominio Ω_0 que en el caso general seria

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + div(\vec{J}(x,t)) = f(x,t)$$

donde $f(x,t)$ es una función suficientemente regular y $\vec{J}(x,t)$ es un campo vectorial en $I\!R^n$ definido en $\partial\Omega_0$ (frontera). Para establecer un problema bien defindo consideramos condiciones iniciales y condiciones de Dirichlet Homogénea, por tanto la ecuación de balance se transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + div(\vec{J}(x,t)) = f(x,t) \\ T(x,t) = 0 \; x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Después damos algunas ejemplos de campos vectoriales $\vec{J}$.
Apartir de aqui consideramos el flujo $\phi(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{Y}(t;x) = \vec{V}(Y(t;x)) \\ \\ Y(0;x) = x \end{cases}$$

donde $\vec{V}$ es un campo vectorial conocido, suficientemente regular. Observemos que $\phi(t)$ es un difeomorfismo de $I\!R^n$.
Se puede definir lo siguiente, si W_0 es subconjunto de Ω_0

$$W(t) = \phi(t)(W_0) \quad \partial W(t) = \phi(t)(\partial W_0).$$

Haremos una deducción bajo las hipótesis anteriores de las Ecuaciones de Balance en un dominio que varia con el tiempo ($\Omega(t)$).
Teniendo en cuenta que no se cumple la siguiente igualdad

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} \frac{\partial}{\partial t} T(y,t)\,dy.$$

Después demostramos y utilizaremos la **La Fórmula De Abel- Liouville- Jacobi**.
Definimos $\overline{f}$ para cualquier f de manera tal que tenga sentido lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy$$

se puede escribir de forma equivalente como

$$\int_{W_0} \frac{\partial\,\overline{T}}{\partial t}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx + \int_{W_0} \overline{T}(x,t)\;\overline{div\vec{V}}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx$$

o

$$\int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\;.\;\vec{V}(y))\,dy$$

o

$$\int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial W(t)} T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}.$$

donde $|K(x,t)|$ es el determinante de $D\phi(t)$.
Gracias ha esto llegaremos a tener las dos ecuaciones, una en el dominio fijo y

otra en el dominio que depende del tiempo, con una cierta equivalencia.
Las ecuaciones serian con condiciones iniciales y de Dirichlet Homogéneas

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \ \ y \in \partial\Omega(t) \quad \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ \ x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \quad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

respectivamente.
Después daremos casos de $\vec{J}(y,t)$ en $\Omega(t)$ y su equivalencia en Ω_0. Los dos principales casos son :

- Ecuación de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión y con Flujo
- Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo con Difusión

En el primero consideramos.

$$\vec{J}(y,t) = \vec{a}(y,t)T(y,t) \quad y \in \ \Omega(t)$$

donde $\vec{a}$ es un campo escalar de clase $C^1(I\!R^n \times I\!R, I\!R)$.
Para encontrar las dos ecuaciones equivalentes en $\Omega(t)$ y Ω_0 respectivamente, es necesario definir $\psi(t)$ como

$$\psi(t) : C^1(I\!R^n, I\!R^n) \longrightarrow \Omega_0 \subset I\!R^n$$

tal que

$$\psi(t) \circ \phi(t) = I \quad \Longleftrightarrow \psi(t) = \phi^{-1}(t) = \phi(-t).$$

Se tiene que como $\phi(t)$ es un difeomorfismo de clase C^1, también lo es $\psi(t)$.
Por tanto las ecuaciones de balance equivalentes quedarían de la siguiente manera

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) + \nabla_y T(y,t).\vec{a}(y,t) + div_y(\vec{a}(y,t))T(y,t) = f(y,t) \quad y \ \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) + \overline{T}(x,t)C(x,t) + \nabla_x \overline{T}(x,t)\vec{b}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

donde

$$C(x,t) = \overline{div_y(\vec{V})}(x,t) + \overline{div_y(\vec{a})}(x,t)$$
$$\vec{b}(x,t) = D\psi(t)y \; . \; \overline{a}(y,t)$$

Luego buscamos una solución para la ecuación de balance en Ω_0, utilizaremos el método de las características en un dominio fijo, teniendo en cuenta la invarianza del Dominio Ω_0, es decir si , $y_0 = x(t_0) \in \partial\Omega_0$

$$< \vec{b}(x_0,t_0), \vec{n}(x_0) > \leq 0$$

que no es más que una condición equivalente a una condición geométrica en $\Omega(t)$, que es la siguiente
si para todo $y_0 \in \partial\Omega(t)$, se tiene que

$$< \vec{a}(y_0,t_0), \vec{n_0}(y_0) > \leq 0$$

donde $\vec{n_0}(y_0)$ es el vector normal unitario externo en $y_0 \in \partial\Omega(t)$.
Con esta hipótesis añadida en $\Omega(t)$, se va a tener que La solución dentro del la curva característica $(X(s))$

$$\overline{T}(X(t),t) = T_0(x_0)e^{-\int_0^t C(X(r),r)\,dr} + \int_0^t e^{-\int_s^t C(X(r),r)\,dr}\overline{f}(X(s),s)\,ds.$$

Por tanto, se concluirá que la ecuación de balance en $\Omega(t)$ tiene solución.

El siguiente caso que se tratara es las Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo con Difusión, es decir

$$\vec{J}(y,t) = -k\nabla_y T(y,t) \quad y \in \; \Omega(t)$$

con $k > 0$ escalar, entonces las ecuaciones de balance equivalentes, quedarían de la suguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + \nabla_y T(y,t).\vec{V}(y) + T(y,t)div(\vec{V})(y) - k\Delta T(y,t) = f(y,t) \quad t \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \quad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\,\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k \partial x_i}.a_{k,i}(x,t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T(x,0)} = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

donde

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_k(t)y}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \psi_i(t)y}{\partial y_j} = \nabla_y \psi_k . \nabla_y \psi_i = a_{k,i}(x,t) \ \ , \ y = \phi(t)x$$

y

$$s_i(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_i(t)y}{\partial y_j^2} = \Delta_y \psi_i(t)y \quad (y = \phi(t)x)$$

Una observación que se dara es que la ecuación en Ω_0 se puede ver también como

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

donde

$$\vec{B} = (B_i)_{i=1,..,n} = A(x,t)\nabla_x \overline{T}(x,t)$$
$$A(x,t) = (a_{k,i}(x,t))$$
$$d_i(x,t) = s_i(x,t) - c_i(x,t)$$
$$c_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k,i}(x,t)}{\partial x_i}$$

Lo que seguirá es dar una ecuación general de segundo orden en $\Omega(t)$ y ver su ecuación equivalente, bajo las condiciones en que este trabajo se basa.
Consideremos

$$\begin{cases} T_t(y,t) - k\Delta_y T(y,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t) \cdot g_i(y,t) + c(y,t)T(y,t) = f(t,y) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \ \ y \in \partial\Omega(t) \ \ \ \forall t \quad T(y,0) = T_0(y) \quad \ y \in \Omega_0 \end{cases}$$

donde k es un escalar, $c(y,t)$ y para cada i $g_i(y,t)$, es lo suficientemente regular que se necesite para los cálculos.
Llegaremos a la ecución equivalente en Ω_0, que es

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial\overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}d_i(x,t)\right) + \nabla_x\overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x\in\Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x\in\partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x\in\Omega_0 \end{array}\right.$$

donde

$$B(x,t) = A(x,t)\nabla_x\overline{T}(x,t)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_k(t)y}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_j} = a_{k,i}(x,t)$$

$$d_i(x,t) = s_i(x,t) - c_i(x,t)$$

$$s_i(x,t) = \Delta_y\psi_i(t)y \qquad c_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k,i}(x,t)}{\partial x_i}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ h_n(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\overline{g}}(x,t)\,.\,\nabla_y\psi_1(t)y \\ \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \\ \vec{\overline{g}}(x,t)\,.\,\nabla_y\psi_n(t)y \end{pmatrix}$$

donde

$$\vec{\overline{g}}(x,t) = (\overline{g_1}(x,t),...,\overline{g_n}(x,t))^t$$

Una observación que se dará es que la ecuación en Ω_0 se puede ver también como

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial\overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(\displaystyle\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}.a_{k,i}(x,t) \;+\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) + \nabla_x\overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x\in\Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x\in\partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x\in\Omega_0 \end{array}\right.$$

Lo que seguirá es demostrar que tanto la ecuación general de segundo orden como la ecuacion con difusión en $\Omega(t)$ tienen solución.
Para ello analizaremos sus ecuaciones equivalentes en Ω_0. Suponiendo que $T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$ y puesto que la parte principal de ambas es la misma, además de la regularidad de los datos y coeficientes, procederemos a analizar

$$A = [(a_{k,i})] \quad 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq k \leq n \tag{1}$$

que es una matriz definida positiva, es decir la coercitividad.
Para demostrarlo, comenzemos observando la natulaleza de A. Despues citamos los resultados de [1] y [2] y concluiremos que ambas ecuaciones en Ω_0 como sus ecuaciones equivalentes en $\Omega(t)$ tienen solución.
Para terminar consideramos

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \Delta T(x,t) + a(x,t)\,T(x,t) = 0 \\ \\ T(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

donde $a(x,t)$ es lo suficientemente regular. Realizaremos el principio de Máximo. Si

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha(t) \leq a(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t.$$

tenemos que

$$T(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \;\; \forall t$$

Para ello utilizaremos la definición de $T^-(x,t) = max(0, -T(x,t)) \quad \forall x \;\; \forall t$, la condición de contorno Dirichlet homogénea, la fórmula de Green y además la hipótesis sobre $a(x,t)$, para llegar a

$$\frac{d}{dt}\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\alpha(t)\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq 0$$

integrando con respecto t y usando el Lema de Gronwall tendremos que

$$\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq \left\|T_0^-\right\|_{L^2(\Omega_0)} e^{-2\int_0^t \alpha(s)\,ds} \tag{2}$$

y por hipótesis, se sabe que

$$T_0(x,.) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0^-(x) = 0,$$

lo que implicará que

$$T^{-}(x,t)=0 \quad \forall x\in\Omega_0 \;\; \forall t>0 \qquad \Rightarrow \qquad T(x,t)\geq 0 \;\; \forall x\in\Omega_0,\; \forall t>0$$

Después consideramos

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)-\Delta T(y,t)+a(y,t)\,T(y,t)=0 \quad\;\; y\in\Omega(t) \\ \\ T(y,t)=0 \;\; y\in\partial\Omega(t) \quad \forall t \quad T(y,0)=T_0(y) \quad\;\; y\in\Omega_0 \end{array}\right.$$

donde $a(y,t)$ es lo suficientemente regular. y realizaremos el principio del Máximo en $\Omega(t)$.
Si $T_0(x)\geq 0 \; y \;\; T_0\in L^2(\Omega_0)$
y

$$\alpha(t)\leq a(y,t) \quad \forall y\in\Omega(t) \quad \forall t.$$

donde $\alpha(t)$ es una función regular, entonces

$$T(y,t)\geq 0$$

Para ello utilizaremos la definición de $T^{-}(y,t)$, la condición de contorno Dirichlet Homogénea en $\Omega(t)$, la fórmula de Green en $\Omega(t)$ además de

$$\int_{W(t)}\frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy+\int_{\partial W(t)}T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}.$$

y la hipótesis sobre $a(y,t)$, llegaremos que

$$\frac{d}{dt}\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}+2\alpha(t)\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}\leq 0$$

integrando con respecto a t y utilizando el Lema Gronwall, tenemos que

$$\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}\leq \left\|T_0^{-}\right\|_{L^2(\Omega_0)}e^{-2\int_0^t\alpha(s)\,ds},$$

y por hipótesis, se sabe que

$$T_0(y,.)=0 \quad \forall y\in\Omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0^{-}=0 \;\; en\;\Omega_0$$

lo que implica que

$$T^{-}(y,t)=0 \qquad y\in\Omega(t) \;\; \forall t\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(y,t)\geq 0 \quad\; y\in\Omega(t) \;\; \forall t\geq 0$$

Por último consideramos la misma ecuación que en el Principio del Máximo en Ω_0, despues realizaremos la estimación de energía para ver el decaimiento con respecto al tiempo de la solución.
Si se supone que

$$T_0(x) \geq 0 \quad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$0 < \alpha \leq a(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t.$$

tenemos que

$$0 \leq \int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx \leq e^{-t\alpha} \int_{\Omega_0} T_0(x)\, dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Para ello utilizamos el teorema de la divergencia en Ω_0, el Principio de Máximo enΩ_0, adémas

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x,t) \leq 0 \Rightarrow -\int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial n}(x,t)\, d\vec{s} \geq 0,$$

con $x \in \partial\Omega_0$ y la hipótesis sobre $a(x,t)$, llegaremos a

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx + \alpha \int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx \leq 0.$$

integrando con respecto t, además de utilizar Lema Gronwall tendremos que

$$\|T(.,t)\|_{L^1(\Omega_0)} \leq \|T_0\|_{L^1(\Omega_0)}\, e^{-t\alpha} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

y por tanto , la solución hace un decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞.

Regresando a la misma ecuación en Ω_0. Si

$$T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha > -C_0(\Omega_0),$$

donde $C_0(\Omega_0)$ es la constante de Poincaré, y por tanto, se tendrá que

$$0 \leq \int_{\Omega_0} T^2(x,t)\, dx \leq e^{-2t(\alpha + C_0(\Omega_0))} \int_{\Omega_0} T_0^2(x)\, dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Aqui no supondremos que $T(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t.$

Después consideraremos la misma ecuación que en el Principio del Máximo en $\Omega(t)$ y realizaremos la estimación de energía para ver el decaimiento con respecto al tiempo de la solución.
Si se supone que

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha(t) \leq a(y,t) \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t.$$

donde $\alpha(t)$ es una función regular tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\,ds > \alpha_0 > 0$$

entonces

$$\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy \leq e^{-\int_0^t \alpha(t)\,ds}\int_{\Omega_0} T_0(x)\,dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Para ello utilizamos la condición de contorno Dirichlet Homogénea en $\Omega(t)$, la fórmula de Green en $\Omega(t)$, el Principio de Máximo en $\Omega(t)$ ya que

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y además de

$$\frac{\partial T}{\partial n}(y,t) \leq 0 \Rightarrow -\int_{\partial\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial n}(y,t)\,d\vec{s} \geq 0$$

con $y \in \partial\Omega(t)$ y la hipótesis con respecto a $a(y,t)$, tendremos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy + \alpha(t)\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy \leq 0.$$

Integrando con respecto a t y utilizando el lema de Gronwall

$$\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy = \int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy \leq e^{-\int_0^t \alpha(t)\,ds}\int_{\Omega_0} T_0(x)\,dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

ya que por hipótesis

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\,ds > \alpha_0 > 0$$

y por tanto, tendríamos que

$$e^{-\int_0^t \alpha(s)\,ds} = e^{-t\left(\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\,ds\right)} < e^{-\alpha_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

con $t >> 1$, se deducifa que , la solución hace una decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞.

Regresando a la misma ecuación en $\Omega(t)$. Si

$$T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

$$\gamma(t) = \alpha(t) - C_0(\Omega(t))$$

donde $C_0(\Omega(t))$, es la constante de Poncairé en $\Omega(t)$ y $\alpha(t)$ es tal que

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \gamma(s)\, ds > \alpha_1 > 0$$

entonces se tendrá que

$$0 \leq \int_{\Omega(t)} T^2(y,t)\, dy \leq e^{-2\int_0^t \gamma(s)\, ds} \int_{\Omega(t)} T_0^2(x)\, dx \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \tag{4}$$

Aqui no se supondrá que $T(y,t) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t$.

Estructura del Trabajo

- En la sección 2.1 se vera las ecuaciones de Ecuaciones de Balance en un dominio fijo
- En la sección 2.2 se vera las Ecuaciones de Balance en un dominio que varia con el tiempo y su ecuaciones equivalentes en un dominio fijo .
- En la subsección 2.3 se vera las Ecuaciones de Balance en un dominio que varia con el tiempo con condiciones de contorno e iniciales.
- En las secciones 3.1, 3.2, 3.2 se veran ejemplos del campo vectorial $\vec{J}$ en $\Omega(t)$ y su equivalencia en Ω_0.
- En la sección 5 se vera Ecuaciones Generales de orden dos que dependen de el tiempo .
- En la sección 5.1 se vera las soluciones de ecuaciones de orden dos tanto de Balance como Generales.

- En las subsecciones 6.1, 6.2 se vera el Principio del Máximo tanto en dominio fijo como en uno que varia con el tiempo.

- En las subsecciones 7.1 , 7.2 se vera la Estimación de Energía tanto en dominio fijo como en uno que varia con el tiempo.

2. Ecuaciones de Balance

2.1. Ecuaciones de Balance en Dominio Fijo

En este capítulo queremos obtener las Ecuaciones de Balance en Dominios fijos. En este trabajo cuando se hable de una función regular se refiere a que es diferenciable la veces que sea necesario para los cálculos.
Si se habla de Dominio suficientemente regular se refiere que la frontera sea lo suficientemente suave o sea lo suficientemente diferenciable posible para que todos los teoremas conocidos se cumplan.

Sea $\Omega_0 \subset I\!R^n$, un dominio fijo y regular y T(x,t), con x$\in \Omega_0$ y t ≥ 0, una función que puede representar la densidad de calor, materia o cualquier magnitud en Ω_0. Para fijar ideas podemos suponer que se trabaja con el calor.

Consideramos $W_0 \subset \Omega_0$ una subregión regular. La cantidad de calor en W_0, viene dada por

$$\int_{W_0} T(x,t)\,dx \tag{5}$$

entonces la variación del calor en W_0, con respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{W_0} T(x,t)\,dx \quad . \tag{6}$$

También se sabe que la variación de una función $T(x,t)$ regular en un dominio lo suficientemente regular es

$$\int_{W_0} f(x,t)\,dx - \int_{\partial W_0} \vec{J}\,d\vec{s} \tag{7}$$

donde $f(x,t)$ es una función que representa la tasa de producción o consumo de la función $T(x,t)$ en W_0 y ∂W_0 es la superficie envolvente de W_0 (frontera), $\vec{J}$ es un campo vectorial en $I\!R^n$, que mide el flujo del calor que cruza en la superficie envolvente (frontera) de W_0.
Ahora por lo visto en (7) , se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{W_0} T(x,t)\,dx = \int_{W_0} f(x,t)\,dx - \int_{\partial W_0} \vec{J}\,d\vec{s} \tag{8}$$

Proposición 2.1. *Bajo las hipótesis anteriores se tiene que*

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + div(\vec{J}(x,t)) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0, \;\; \forall t > 0 \tag{9}$$

Demostración. Partiendo de

$$\frac{d}{dt}\int_{W_0} T(x,t)\,dx = \int_{W_0} f(x,t)\,dx - \int_{\partial W_0} \vec{J}\,d\vec{s}$$

Ahora como estamos en W_0, un dominio suficientemente regular, fijo que no depende del tiempo, tenemos la siguiente identidad

$$\frac{d}{dt}\int_{W_0} T(x,t)\,dx = \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\,dx$$

se tiene

$$\int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\,dx = \int_{W_0} f(x,t)\,dx - \int_{\partial W_0} \vec{J}\,d\vec{s}$$

Utilizando el Teorema de la divergencia

$$\int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t)\,dx = \int_{W_0} f(x,t)\,dx - \int_{W_0} div(\vec{J})\,dx$$

$$0 = \int_{W_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) + div(\vec{J}) - f(x,t) \right) dx$$

Ahora como W_0 es una subregión arbitraria de Ω_0 se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) + div(\vec{J}(x,t)) = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0, \;\; \forall t > 0$$

■

Para establecer que (9) este bien definida, hace falta ponerle condiciones de contorno y una codición inicial.
Por condiciones de contorno se puede hablar de condiciones de Dirichlet, Neuman y Robín. En este trabajo supondremos condición Homogénea Dirichlet.
Por tanto (9) con condicioń Homogénea Dirichlet y con condición inicial se transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + div(\vec{J}(x,t)) = f(x,t) \\ T(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{10}$$

donde $T_0(x)$ es una función lo suficientemente regular.

Para culminar podemos citar ejemplos de flujos en un dominio fijo, para observar como quedarían las ecuaciones de balance con condiciones de contorno y condiciones iniciales
Veamos el caso más fácil. Consideremos $div(\vec{J}(x,t)) = 0$ por tanto la ecuación de balance quedaría de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = f(x,t) \\ T(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{11}$$

Si consideramos $\vec{J}(x,t)$= $\vec{a}(x,t)T(x,t)$, donde $\vec{a}(x,t)$ es campo vectorial conocido y suficientemente regular , entonces la ecuación de balance se transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) + \nabla T(x,t).\vec{a}(x,t) + T(x,t)div(\vec{a}(x,t)) = f(x,t) \\ T(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0. \end{cases} \tag{12}$$

Y por último, si consideramos la ley de Fourier, $\vec{J}(x,t)$= $-k\nabla T(x,t)$, se tiene que

$$
\begin{cases}
\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - k\Delta T(x,t) = f(x,t) \\
\\
T(x,t) = 0 \; x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad\qquad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0.
\end{cases}
\tag{13}
$$

Estas son ecuaciones clásicas, y por tanto existe mucha teoría de ellas así que no serán analizadas aquí.

2.2. Ecuaciones de Balance en Dominios que varian dependiendo del tiempo

En lo anterior se vió la ecuación de balance en dominio fijo suficientemente regular que no dependende del tiempo.
Ahora, en esta parte del trabajo suponemos que cada $x \in \Omega_0$ en tiempo 0 , se mueve siguiendo una función $Y(t;x)$ en el instante t.

$$
\begin{aligned}
Y(.\,;x) : I\!R &\longrightarrow I\!R^n \\
t &\longmapsto Y(t;x).
\end{aligned}
$$

Suponemos que esta función cumple el siguiente sistema de EDO autónomo

$$
\begin{cases}
\dot{Y}(t;x) = \vec{V}(Y(t;x)) \\
\\
Y(0;x) = x
\end{cases}
\tag{14}
$$

donde

$$
\vec{V} : \quad I\!R^n \longrightarrow I\!R^n
$$

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} V_1(y_1, ..., y_n) \\ V_2(y_1, ..., y_n) \\ . \\ . \\ . \\ V_n(y_1, ..., y_n) \end{pmatrix}
$$

En el presente trabajo se supone que $\vec{V}$ es un campo vectorial conocido, suficientemente regular, ademas que $\vec{V}$ no depende del tiempo o sea que el sistema de EDO es autónomo, para simplificar un poco los cálculos y utilizar teoremas ya existentes.
Este sistema se supone definido $\forall t \in I\!R$

Con las soluciones de (14), definimos

$$\begin{aligned}\phi(t) : \Omega_0 \subset I\!R^n &\longrightarrow C^1(I\!R^n, I\!R^n)\\ x &\longmapsto \phi(t)(x) = Y(t; x)\end{aligned}$$

que es el semigrupo asociado a (14).
Aqui recordaremos la definición de un semigrupo asociado a un sistema autónomo

Definición 2.2. *Se dice que $\{\phi(t)\}_{t\in I\!R}$, conjunto de funciones tal que $\forall\, t \in I\!R\; \phi(t) \in C^1(I\!R^n, I\!R^n)$ es semigrupo asociado a un sistema autónomo, si*

1. $\phi(0) = I$
2. $\phi(t+s) = \phi(t) \circ \phi(s) \quad \forall\, t, s \in I\!R$

   En particular $\phi(t) \circ \phi(-t) = I$
3. *Para un $z \in I\!R^n$, fijo se tiene que $\phi(.)z \in C^1(I\!R, I\!R^n)$*

Por la regularidad de $\vec{V}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(t) : I\!R^n &\longrightarrow I\!R^n\\ z &\longmapsto \phi(t)z\end{aligned}$$

es un difeomorfismo, por tanto, si se mueve Ω_0 hasta el instante t se tiene

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= \phi(t)\Omega_0 \qquad t \in I\!R \\ \partial\Omega(t) &= \phi(t)\, \partial\Omega_0.\end{aligned} \tag{15}$$

Ahora si movemos una subregión W_0 regular de Ω_0 , tenemos que

$$W(t) = \phi(t)W_0 \qquad t \in I\!R \tag{16}$$
$$\partial W(t) = \phi(t)\partial W_0$$

Lema 2.3. *Bajo las hipótesis anteriores, tomando $x_0 \in \partial\Omega_0$ entonces $\phi(t)x_0 \in \Omega(t)$. Además*

$$D\phi(t)(x_0)$$

es un isomorfismo en $I\!R^n$ que transforma el hiperplano tangente en $x_0 \in \partial\Omega_0$, notado $T_{x_0}\partial\Omega_0$ en el hiperplano tangente a $\partial\Omega(t)$ en $\phi(t)x_0$ $T_{\phi(t)x_0}\partial\Omega(t)$

Demostración. Notese que si $z(s)$ es una curva en $\partial\Omega_0$ con $z(0) = x_0$, entonces $z'(0) = v_0$ es un vector tangente (y recíprocamente).
Entonces $w(s) = \phi(t)(z(s))$ es una curva en $\partial\Omega(t)$, con $w(0) = y_0$ y

$$w'(0) = D\phi(t)(x_0)v_0$$

es un vector tangente en $\partial\Omega(t)$. ∎

Apartir de aqui introducimos una notación que sera muy útil en nuestro trabajo

Definición 2.4. *Sea f una función definida en*

$$f : \Omega(t) \times \{t\} \longrightarrow I\!R$$
$$(y, t) \longmapsto f(y, t)$$

entonces $\overline{f}$ es una función definida en

$$\overline{f} : \Omega_0 \times I\!R^+ \longrightarrow I\!R$$
$$(x, t) \longmapsto f(x, t)$$

tal que

$$\overline{f}(x, t) = f(\phi(t)x, t)$$

Observación 2.5. *Incluso si* $f = f(y) \quad y \in \Omega(t)$, $\overline{f}(x,t)$ *depende de t ya que*

$$\overline{f}(x,t) = f(\phi(t)x) \tag{17}$$

Antes de seguir vamos a dar una proposición que nos ayudara para los cálculos posteriores

Proposición 2.6. *Con las hipótesis anteriores si*

$$|K(x,t)| = det(D\phi(t)x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} Y_1(t;x_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} Y_n(t;x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} Y_1(t;x_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} Y_n(t;x_n) \end{vmatrix}$$

$D\phi(t)$= *Diferencial de* $\phi(t)$

y

$$D\vec{V}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1(z)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial V_1(z)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n(z)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial V_n(z)}{\partial q_n} \end{pmatrix} \quad z \in I\!R^n$$

la diferencial de $\vec{V}$

entonces se tiene la ***La Fórmula De Abel- Liouville- Jacobi***

$$\frac{\partial}{\partial t} |K(x,t)| = tr\ D\vec{V}(\phi(t)x)\,|K(x,t)| = \overline{div\vec{V}}(x,t)\,|K(x,t)| \tag{18}$$

y por tanto

$$|K(x,t)| = e^{\int_0^t div\vec{V}(\phi(s)(x))\,ds}. \tag{19}$$

En particular si $t \in [0,T]$, $\exists\, C_1(T), C_2(T)$ *tal que*

$$0 < C_1(T) \leq |K(x,t)| \leq C_2(T) \quad \forall x \in \Omega(t) \ \ \forall t \in [0,T]. \tag{20}$$

Aqui se tiene presente la observación (2.5), para darse cuenta que $\overline{div(\vec{V})(x,t)}$, depende del tiempo, si bien $\vec{V}$ no.

Demostración. Partimos de

$$\frac{\partial \phi(t)x}{\partial t} = \vec{V}(\phi(t)x).$$

Ahora por hipótesis sabemos que el campo vectorial $\vec{V}$ es regular, entonces los **Teoremas de diferenciabilidad de Peano**, dicen que la solución $\phi(t)x$ es regular en todas sus variables. Entonces es posible derivar con relación a cada componente de x y se puede cambiar el orden de derivación, por tanto se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{V}(\phi(t)x)).$$

Ahora entonces para j= 1,...,n tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(V_j(\phi(t)x)) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial V_j(\phi(t)x)}{q_k}\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i}\right)_k$$

donde q_k son indices de derivación y $\left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i}\right)_k$, es la componente k-ésima de $\left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i}\right)$.

Ahora si llamamos

$$\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i} = Z_i(t)$$

y se tiene el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_2} \\ . \\ . \\ . \\ \dot{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1(\phi(t)x)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial V_1(\phi(t)x)}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial V_n(\phi(t)x)}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial V_n(\phi(t)x)}{\partial q_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ . \\ . \\ z_n \end{pmatrix}$$

donde para cada j , $\dot{z}_j$ es la derivada con respecto a el tiempo y z_j= $\left(\frac{\partial \phi(t)x}{\partial x_i}\right)_j$.

Poniendo de forma mas simplificada, se tendría que

$$\begin{cases} \dot{Z}_i(t) = A(t)\ Z_i(t) \\ \\ \quad Z_i(0) = \frac{\partial x}{\partial x_i} = e_i \end{cases} \tag{21}$$

donde $A(t) = D\vec{V}(\phi(t)x)$, es la matriz anterior y e_i es el elemento i-ésimo de la base canónica.
Para la primera demostración de (18) utilizaremos el hecho de que para cada $i,\ Z_i$ es la columna i-ésima de $D\phi(t)x$ y por tanto podemos usar la siguiente notación

$$D\phi(t)x = [Z_1(t), ..., Z_n(t)]$$

donde para cada $i,\ Z_i(t)$, cumple el sistema (21).
Aqui vamos a usar el siguiente Lema

Lema 2.7. *Sea $M(t) = [C_1(t), ..., C_n(t)]$ una matriz, donde para cada i, $C_i(t)$, representa la columna i-ésima de la matriz $M(t)$, y $Det(M(t))$, representa el determinante de la matriz $M(t)$, entonces se tiene*

$$\frac{d}{dt}Det(M(t)) = Det([\dot{C}_1(t), C_2(t), ..., C_n(t)]) + ... + Det([C_1(t), ..., C_i(t), ..., \dot{C}_n(t)])$$

Ahora por el lema anterior se tiene

$$\frac{d}{dt}Det(D\phi(t)x) = Det([\dot{Z}_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)]) + ... + Det([Z_1(t), ..., Z_i(t), ..., \dot{Z}_n(t)])$$

Ahora usando (21), tenemos

$$\frac{d}{dt}Det(D\phi(t)x) = Det([A(t)Z_1(t), Z_2(t), ..., Z_n(t)]) + ... + Det([Z_1(t), ..., A(t)Z_n(t)]) = (*)$$

$$(*) = tr(A(t)).Det(D\phi(t)x)$$

Aqui es preciso observar que

$$trA(t) = trD\vec{V}(\phi(t)x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i(\phi(t)x)}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial V_i}{\partial q_i}}(x,t) = \overline{div\vec{V}}(x,t)$$

y por tanto

$$\frac{d}{dt}Det(D\phi(t)x) = \overline{div\vec{V}}(x,t)\ Det(D\phi(t)x)$$

lo que demuestra (18).

Integrando (18) con respecto a t y tomando $t_0 = 0$ y como $\phi(0) = I$. Se tiene

$$Det(D\phi(t)x) = Det(I)e^{\int_0^t div\vec{V}(\phi(s)(x))\,ds} = e^{\int_0^t div\vec{V}(\phi(s)(x))\,ds}$$

lo que demuestra (19) ■

Observación 2.8. *Una consecuencia es si $W_0 \subset \Omega_0$ con $W(t) = \phi(t)W_0$ se tiene que, el volúmen de $W(t)$ es*

$$|W(t)| = \int_{W(t)} 1\,dy = \int_{W_0} |K(x,t)|\ dx = \int_{W_0} e^{\int_0^t div\vec{V}(\phi(s)(x))\,ds}\,dx$$

Aqui podemos dar casos particulares del campo vectorial $\vec{V}$.

Suponemos que $t > 0$

(a) *Si $div(\vec{V}) = 0$ entonces*

$$|W(t)| = |W_0| \qquad \forall\, W_0 \subset \Omega_0 \quad \forall t \in I\!R$$

Por tanto el flujo no altera la medida de los subconjuntos de Ω_0.

(b) *Si $div(\vec{V}) = d_0$, donde d_0 es constante, se tiene que*

$$|W(t)| = |W_0|\ \ e^{d_0 t}$$

*por tanto si se tiene que, $d_0 > 0$, el flujo aumenta el volúmen de los subconjuntos de Ω_0, se dice que el flujo es **expansivo**.*
*Si $d_0 < 0$, el flujo disminuye el volúmen de los subconjuntos de Ω_0, se dice que el flujo es **contractivo***

(c) *Si existe d_0 tal que*

$$div(\vec{V}) \leq -d_0 < 0\ \Rightarrow |W(t)| \leq |W_0|\ \ e^{-d_0 t}$$

el flujo disminuye el volúmen de los subconjuntos de Ω_0, y por tanto el flujo es ***contractivo****. Si hacemos tender al infinito a t entonces el volúmen tiende a cero*

(d) *Si existe d_0 tal que*

$$div(\vec{V}) \geq d_0 > 0 \;\Rightarrow |W(t)| \geq |W_0| \;\; e^{d_0 t}$$

el flujo aumenta el volúmen de los subconjuntos de Ω_0, y por tanto el flujo es ***expansivo****. Si hacemos tender al infinito a t entonces el volúmen tiende a infinito*
Si $t < 0$ entonces los casos son al contrario.

Si $\quad \vec{V}(x) = \lambda x \quad$ una dilatación, con $\lambda \in I\!R$. Se tiene

$$div(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n.\lambda = d_0$$

donde se puede hacer el mismo análisis anterior para $d_0 = n.\lambda$

Si $\quad \vec{V}(x) = Mx$, donde M es una matriz. Se tiene que

$$div(\vec{V}) = tr(M) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = d_0$$

donde, para cada i, μ_i son los autovalores de M. Se realiza el análisis anterior para $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = d_0$.

Definición 2.9. *Sea $\eta(t)$ una matriz, se dice que es una matriz fundamental del sistema*

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{22}$$

si cada i-ésima columna de $\eta(t)$ es solución de (22) y $\eta(t)$ es no singular

Observación 2.10. *Si cada columna de una matriz m(t) verifica (22) entonces*

$$m'(t) = A(t)m(t).$$

y recíprocamente

Lema 2.11. *Sea $\eta(t)$ una matriz fundamental de (22), entonces*

$$\gamma(t) = \left(\eta^{-1}(t)\right)^{*} = \left(\eta^{*}(t)\right)^{-1}$$

es un matriz fundamental del sistema

$$Y'(t) = -A^*(t)Y(t)$$

*donde * denota la adjunta*

Demostración. Partimos de

$$\eta^{-1}(t) \circ \eta(t) = I \quad llamando \quad \epsilon(t) = \eta(t) \quad es\ no\ \ singular$$

derivando con respecto a t se tiene que

$$\epsilon'(t)\eta(t) + \epsilon(t)\eta'(t) = 0$$

como $\eta(t)$ es una matriz fundamental de (22), tenemos

$$(\epsilon'(t) + \epsilon(t)A(t))\,\eta(t) = 0$$

como $\eta(t)$ es no singular tenemos

$$\epsilon'(t) + \epsilon(t)A(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \epsilon'(t) = -\epsilon(t)A(t)$$

tomando la adunta $(*)$, tenemos

$$\gamma'(t) = -A^*(t)\gamma(t)$$

y $\gamma(t)$ no singular $\blacksquare$

Observación 2.12. *Una consecuencia de la proposicion 2.6 es que $D\phi(t)$ es una matriz fundamental de (21),*

y por tanto se tiene

$$D\psi^*(t) = (D\phi^{-1}(t))^* = (D\phi^*(t))^{-1}$$

es una matriz fundamental de

$$\dot{Z}(t) = -A^*(t)\ Z(t) \tag{23}$$

donde $A(t) = D\vec{V}(\phi(t)x)$, lo que implica

$$D\psi^*(t) = -A^*(t)D\psi^*(t). \tag{24}$$

Tenemos el siguiente corolario

Corolario 2.13. *Supongamos que $x_0 \in \partial\Omega_0$ y $y_0 = \phi(t)x$, $y_0 \in \partial\Omega(t)$ entonces si $\vec{n}(x_0)$ es un vector normal externo unitario de Ω_0 en x_0 entonces*

$$N(y_0) = ((D\phi(t)x_0)^*)^{-1}\vec{n}(x_0)$$

es un vector normal (no necesariamente unitario) de y_0, es decir $((D\phi(t))^* x_0)^{-1}$ es un isomorfismo lineal en $I\!R^n$ que transforma el espacio normal en $x_0 \in \partial\Omega_0$ denotado N_{x_0} en el espacio normal de $\Omega(t)$ en $y_0 \in \partial\Omega(t)$ denotado N_{y_0}.

Demostración. Partimos del Lemma 2.3, se tiene que un vector normal en $y_0 = \phi(t)(x_0) \in \partial\Omega(t)$, $\vec{n}$, debe satisfacer

$$< \vec{n}, D\phi(t)x_0\vec{\tau} >= 0 \quad \forall\vec{\tau} \in T_{x_0}\partial\Omega_0$$

que es lo mismo que

$$< (D\phi(t)x_0)^*\vec{n}, \vec{\tau} >= 0 \quad \forall\vec{\tau} \in T_{x_0}\partial\Omega_0.$$

Por tanto podemos tomar $\vec{n}$ tal que

$$((D\phi(t)x_0)^*)\vec{n} = \vec{n}(x_0)$$

despejando $\vec{n}$, tenemos

$$\vec{n} = ((D\phi(t)x_0)^*)^{-1}\vec{n}(x_0) = N(y_0)$$

■

Por otra parte, sea $T(y,t)$ una función que va

$$T : \cup_{t\geq 0}\, \Omega(t) \times \{t\} \longrightarrow I\!R$$

$$(y,t) \longmapsto T(y,t)$$

Sea $W(t) = \phi(t)W_0 \subset \Omega(t)$, una subregión suficientemente regular.

Entonces la cantidad de $T(y,t)$ en $W(t)$ es

$$\int_{W(t)} T(y,t)\, dy.$$

Se sabe que la variación con respecto al tiempo de la cantidad de $T(y,t)$ en $W(t)$ es

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy.$$

El objetivo de esta parte es poner la variación con respecto al tiempo de la cantidad de $T(y,t)$ en $W(t)$ en términos de $\overline{T}(x,t)$ definido en W_0.

Observación 2.14. *Como $W(t)$ depende del tiempo, no tenemos la siguiente igualdad*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t)\,dy.$$

Proposición 2.15. *Bajo las hipotésis anteriores se tiene que*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy$$

se puede escribir de forma equivalente como

$$\int_{W_0} \frac{\partial\,\overline{T}}{\partial t}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx + \int_{W_0} \overline{T}(x,t)\,\overline{div\vec{V}}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx \tag{25}$$

o

$$\int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\;.\;\vec{V}(y))\,dy \tag{26}$$

o

$$\int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial W(t)} T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}. \tag{27}$$

Demostración. En primer lugar vamos a demostrar la igualdad (25).
Partimos de

$$I(t) = \int_{W(t)} T(y,t)\,dy$$

y utilizando el siguiente cambio de variable

$$y = \phi(t)x \quad \Rightarrow \quad \partial y = |K(x,t)|\, \partial x \tag{28}$$

se tiene que

$$I(t) = \int_{W_0} T(\phi(t)x, t)\, |K(x,t)|\ dx.$$

Derivando con respecto al tiempo. Se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{W_0} T(\phi(t)x, t)\, |K(x,t)|\ dx\right) = \int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t}(T(\phi(t)x, t)\, |K(x,t)|) =$$

$$\int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, T}{\partial y_i}(\phi(t)x, t)\ .\ \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial t}\right) |K(x,t)|\ dx + \int_{W_0} \left(\frac{\partial\, T}{\partial t}(\phi(t)x, t)\right) |K(x,t)|\ dx +$$

$$\int_{W_0} T(\phi(t)x, t)\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\, |K(x,t)|\right)\ dx.$$

Ahora como

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_i(x) = \dot{\phi}_i(x) = V_i(\phi(t)x)$$

se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, T}{\partial y_i}(\phi(t)x, t)\ .\ V_i(\phi(t)x)\right) |K(x,t)|\ dx + \int_{W_0} \left(\frac{\partial\, T}{\partial t}(\phi(t)x, t)\right) |K(x,t)|\ dx +$$

$$\int_{W_0} T(\phi(t)x, t)\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\, |K(x,t)|\right)\ dx.$$

Utilizando la notación introducida en este trabajo, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial\, T}{\partial y_i}}(x, t)\ .\ \overline{V_i}(x,t)\right) |K(x,t)|\ dx + \int_{W_0} \left(\overline{\frac{\partial\, T}{\partial t}}(x, t)\right) |K(x,t)|\ dx +$$

$$\int_{W_0} \overline{T}(x,t) \left(\frac{\partial}{\partial t} |K(x,t)| \right) dx.$$

Utilizando la Proposición 2.6, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial\, T}{\partial y_i}}(x,t) \, . \, \overline{V_i}(x,t) \right) |K(x,t)| \; dx + \int_{W_0} \left(\overline{\frac{\partial\, T}{\partial t}}(x,t) \right) |K(x,t)| \; dx +$$

$$\int_{W_0} \overline{T}(x,t) \overline{div \vec{V}}(x,t) \, |K(x,t)| \; dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \overline{\nabla_y T}(x,t) \, . \, \overline{\vec{V}}(x,t) \, |K(x,t)| \; dx + \int_{W_0} \left(\overline{\frac{\partial\, T}{\partial t}}(x,t) \right) |K(x,t)| \; dx +$$

$$\int_{W_0} \overline{T}(x,t) \overline{div \vec{V}}(x,t) \, |K(x,t)| \; dx.$$

Para continuar necesitamos la siguiente observación

$$\overline{T}(x,t) = T(y,t)$$

donde

$$y = \phi(t) x.$$

y se tiene que

$$\frac{\partial\, \overline{T}}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, T}{\partial y_i}(y,t) \, . \, V_i(y) = \overline{\frac{\partial\, T}{\partial t}}(x,t) + \overline{\nabla_y T}(x,t) \, . \, \overline{\vec{V}}(x,t) \tag{29}$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \frac{\partial\, \overline{T}}{\partial t}(x,t) \, |K(x,t)| \; dx \; + \int_{W_0} \overline{T}(x,t) \overline{div \vec{V}}(x,t) \, |K(x,t)| \; dx$$

lo que prueba (25).

La siguiente igualdad a demostrar es (26), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\vec{V}(y))\,d\vec{s}.$$

Se tiene por lo anterior

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W_0} \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial T}{\partial y_i}}(x,t).\overline{V_i}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx$$

$$+ \int_{W_0} \overline{\frac{\partial T}{\partial t}}(x,t)\,|K(x,t)|\;dx + \int_{W_0} \overline{T}(x,t)\;\;\overline{div(\vec{V})}(x,t)\;\;|K(x,t)|\;dx =$$

$$\int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, T}{\partial y_i}(\phi(t)x,t)\;.\;V_i(\phi(t)x) \right) |K(x,t)|\;dx + \int_{W_0} \left(\frac{\partial\, T}{\partial t}(\phi(t)x,t) \right) |K(x,t)|\;dx +$$

$$\int_{W_0} \Big(T(\phi(t)x,t)\;\; div(\vec{V}(\phi(t)x) \Big)\;\;|K(x,t)|\;dx.$$

Si hacemos el mismo cambio de variable que en (28), se tiene que

$$\int_{W_0} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(\phi(t)x,t).V_i(\phi(t)x) \right) |K(x,t)|\;dx = \int_{W(t)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t).V_i(y)\,dy$$

$$\int_{W_0} \left(\frac{\partial T}{\partial t}(\phi(t)x,t) \right) |K(x,t)|\;dx = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy$$

$$\int_{W_0} \Big(T(\phi(t)x,t)\; div(\vec{V}(\phi(t)x) \Big)\;\;|K(x,t)|\;dx = \int_{W(t)} T(y,t)\;\; div(\vec{V}(y))\,dy.$$

Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t).v_i(y)\,dy + \int_{W(t)} T(y,t)\;\; div(\vec{V}(y))\,dy.$$

Ahora observamos que

$$\int_{W(t)} div_y(T(y,t)\,.\,\vec{V}(y))\,dy = \int_{W(t)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t).v_i(y)\,dy + \int_{W(t)} T(y,t)\;div(\vec{V}(y))\,dy$$

y por tanto se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\vec{V}(y))\,dy$$

lo que prueba (26).
La siguiente igualdad a demostrar es (27), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial W(t)} T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}.$$

Partimos de la igualdad anterior

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\vec{V}(y))\,dy$$

y usando el Teorema de la divergencia se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial W(t)} T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}.$$

■

En esta parte obtendremos las Ecuaciones de Balance en dominios que dependan del tiempo.
Como anteriormente, la variación con respecto al tiempo de la cantidad de $T(y,t)$ en $W(t)$, es dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} f(y,t)\,dy - \int_{\partial W(t)} \vec{J}\,d\vec{s} \tag{30}$$

donde $f(y,t)$ es una función que representa la tasa de producción o consumo de la funcion $T(y,t)$ en $W(t)$ y $\partial W(t)$ es la superficie envolvente de $W(t)$ (frontera), $\vec{J}$ es un campo vectorial en $I\!R^n$, que mide el flujo del calor que cruza en la superficie envolvente (frontera) de $W(t)$.

Regresando a (30) y utilizando el Teorema de la divergencia en $W(t)$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{W(t)} T(y,t)\,dy = \int_{W(t)} f(y,t)\,dy - \int_{W(t)} div_y \vec{J}\,dy \tag{31}$$

Hasta aqui es lo que necesitamos para escribir las ecuaciones en derivadas parciales en Ω_0 y $\Omega(t)$ equivalentes. Tenemos la siguiente proposición

Proposición 2.16. *Bajo las hipótesis anteriores tenemos la siguientes igualdades equivalentes*

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \tag{32}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \tag{33}$$

Demostración. En primer lugar demostraremos (32). Llamando como antes

$$I(t) = \int_{W(t)} T(y,t)\,dy\ ,$$

utilizamos (26) y (31) y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \int_{W(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{W(t)} div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y))\,dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \int_{W(t)} f(y,t)\,dy - \int_{W(t)} div_y \vec{J}\,dy.$$

Igualando (26) y (31) se tiene que

$$\int_{W(t)} \left(\frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\vec{V}(y))\right)\,dy = \int_{W(t)} (f(y,t) - div_y \vec{J})\,dy.$$

Ahora por ser $W(t) = \phi(t)(W_0)$ y como $\phi(t)$ es Difeomorfismo de clase C^1, se concluye que esto se cumple para cualquier región regular de $\Omega(t)$, por tanto, se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t)$$

lo que demuestra (32).
La siguiente igualdad a demostrar es (33), es decir

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0.$$

Ahora, partimos de (31). si hacemos el mismo cambio de variable que en (28) y con la notación introducida en este trabajo , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \int_{W_0} \overline{f}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx - \int_{W_0} \overline{div_y(\vec{J})}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx. \tag{34}$$

Regresando a (25)

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = \int_{W_0} \frac{\partial\,\overline{T}}{\partial t}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx + \int_{W_0} \overline{T}(x,t)\,\overline{div\vec{V}}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx$$

e igualando (25) y (34), se tiene

$$\int_{W_0} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx + \int_{W_0} \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t)\ \ |K(x,t)|\ dx =$$
$$\int_{W_0} \overline{f}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx - \int_{W_0} \overline{div_y(\vec{J})}(x,t)\,|K(x,t)|\ dx.$$

Ahora como W_0 es una región arbitraria en Ω_0 se tiene que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t)\right)|K(x,t)| = \left(\overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t)\right)|K(x,t)|\,.$$

Ahora simplificando $|K(x,t)|$, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0.$$

Simplificando notaciones tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{T} + \overline{T}\ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f} - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t)$$

■

2.3. Condiciones de Contorno Dirichlet Homogéneas y Condiciones Iniciales

Ahora para hablar de existencia y unicidad de soluciones de (32) y (33) requerimos dar condiciones de contorno y condiciones iniciales tanto en la ecuación en dominios variable con el tiempo como en la ecuación en dominios fijo.
Empezaremos por las condiciones de Contorno. En este trabajo se utilzaran condiciones de Dirichlet Homogéneas que abarcan. El caso de condiciones de Neuman es algo complicado en dominios que dependen del tiempo ya que la normal al dominio inicial no se conserva por Difeomorfismos, así que en este trabajo sólo se hablara de condiciónes de Dirichlet Homogénea. Se tiene la siguiente equivalencia, si

$$y = \phi(t)x,$$

entonces

$$T(y,t) = 0 \ \ \forall\, y \in \partial\Omega(t) \ \ \Leftrightarrow \ \ \overline{T}(x,t) = 0 \ \ \forall\, x \in \partial\Omega_0 \tag{35}$$

ya que $\phi(t)$ es Difeomorfismo de clase C^1 y por tanto

$$\phi(t)(\partial\Omega_0) = \partial\Omega(t).$$

Ahora, consideramos la condición inicial, se tiene la siguiente equivalencia

$$\overline{T}(x,0) = T_0(x) \ \ \forall\, x \in \Omega_0 \ \ \Leftrightarrow \ \ T(y,0) = T_0(y) \ \ \forall\, y \in \Omega_0 \tag{36}$$

ya que

$$y = \phi(0)(x) = x \in \Omega_0.$$

Donde T_0 es una función dada en Ω_0 suficientemente regular.

Por tanto las ecuaciones (32) y (33), con condiciones iniciales y de contorno, quedarian de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ \quad T(y,t) = 0 \ \ y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{array} \right. \tag{37}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \quad \overline{T}(x,t) = 0 \ \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{array} \right. \tag{38}$$

respectivamente.
Esto sirve para definir la solución de (37), por tanto:

$$T(y,t) \ \ verifica \ \ (37) \ \ \Leftrightarrow \overline{T}(x,t) \ \ verifica \ \ (38).$$

El caso es que para la ecuación en un dominio que depende del tiempo, no existe teoremas para asegurar la existencia y unicidad de solución y por tanto recurrimos a su ecuación equivalente en un dominio fijo para saberlo.

3. Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión

3.1. Ecuación de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión y Sin Flujo

Ya concluido la equivalencia entre ecuaciones en un dominio variable con el tiempo y ecuaciones en dominio fijo, empezaremos en esta capítulo a dar algunos ejemplos de divergencia del flujo en dominios variables con el tiempo y su representación en un dominio fijo que no dependa del tiempo.
Después lo incluiremos en las ecuaciones diferenciales parciales equivalentes que tengan esa divergencia y veremos si es posible decir que exíste solución.

Comenzaremos con el caso más básico cuando no existe difusión ni flujo

Regresemos a las dos ecuaciones equivalentes (37) y (38)

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \ \ y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

Proposición 3.1. *Bajo las hipótesis anteriores, suponiendo que* $div_y(\vec{J}(y,t)) = 0$ *entonces*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + div_y(T(y,t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y,t) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \ y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0 \end{cases} \tag{39}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega_0 \quad \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{40}$$

son equivalentes.

Demostración. Como

$$div_y(\vec{J}(y,t)) \ = \ 0$$

se tiene inmediatamente que

$$\overline{div_y(\vec{J})}(x,t) = 0$$

y por tanto las ecuaciones de balance equivalentes (37) y (38) se transforman en (39) y (40) respectivamente. de donde se tiene la equivalencia. ■

Ahora mostremos que tiene existe solución única explícita

Proposición 3.2. *Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que entonces (39) y (40) tienen solución única explícita que son*

$$T(y,t) = T_0(x)\, e^{-\int_0^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \; + \; \int_0^t \; e^{-\int_s^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \; f(y,s)\,ds$$

y

$$\overline{T}(x,t) = T_0(x)\, e^{-\int_0^t div(\vec{V}(\phi(r)x)\,dr} \; + \int_0^t \; e^{-\int_s^t div(\vec{V}(\phi(r)x)\,dr} \; \overline{f}(x,s)\,ds$$

respectivamente

Demostración. Empezaremos por (40), ya que es una EDP en un dominio fijo. Fijamos x$\in \Omega_0$, se tiene que (40) es una ecuacion diferencial ordinaria lineal de primer orden, es de la forma

$$\begin{cases} Z'(t) + P(t)Z(t) = h(t) \\ \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$$

Donde la solución viene dada por

$$Z(t) = Z_0\, e^{-\int_0^t P(r)\,dr} + e^{-\int_0^t P(r)\,dr} \int_0^t \; e^{\int_0^s P(w)\,dw} \; h(s)\,ds =$$

$$Z_0\, e^{-\int_0^t P(r)\,dr} + \int_0^t \; e^{-\int_s^t P(r)\,dr} \; h(s)\,ds.$$

en nuestro caso la solucion de (40) viene dada por

$$\overline{T}(x,t) = T_0(x)\, e^{-\int_0^t div(\vec{V}(\phi(r)x)\,dr} \; + \int_0^t \; e^{-\int_s^t div(\vec{V}(\phi(r)x)\,dr} \; \overline{f}(x,s)\,ds$$

Por tanto se tiene que el sistema (40) tiene una solición única explícita, como el sistema (40) es equivalente al sistema (39) se deduce que también tiene solución que es dada por

$$T(y,t) = T_0(x)\, e^{-\int_0^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \; + \; \int_0^t \; e^{-\int_s^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \; f(y,s)\,ds$$

■

Observación 3.3. *Se puede analizar algunos casos, para saber como se comporta la solución del sistema (39).*

Supogamos que $T_0(x)$ *es distinto de cero y que* $f = 0$ *entonces la solución de (39) viene dada por*

$$T(y,t) = T_0(x)\; e^{-\int_0^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr}$$

Aqui podemos regresar a la observación 2.8 y tenemos casos particulares de el campo vectorial $div(\vec{V})$*, que son los siguientes.*

Suponemos que $t > 0$

(a) *Si* $div(\vec{V}) = 0$ *entonces*

$$T(y,t) = T_0(x)$$

Por tanto T *permanece* ***constante****, sobre las curvas del flujo* $y = \phi(t)x$

(b) *Si* $div(\vec{V}) = d_0$*, donde* d_0 *es constante, se tiene que*

$$T(y,t) = T_0(x)e^{-d_0 t} \qquad\qquad y = \phi(t)x$$

por tanto si se tiene que el flujo es expansivo ($d_0 > 0$*) ,* $T(y,t)$ *decrece sobre las curvas del flujo* $y = \phi(t)x$
Si el flujo es contractivo ($d_0 < 0$*) ,* $T(y,t)$ *crece sobre las curvas del flujo* $y = \phi(t)x$

(c) *Cuando el flujo es expansivo y ademas existe* $d_0 > 0$ *tal que*

$$div(\vec{V}) \geq d_0 \geq 0 \Rightarrow |T(y,t)| = |T_0(x)|\; e^{-\int_0^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \leq\; |T_0(x)|\, e^{-d_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

(d) *Cuando el flujo es contractivo y ademas existe* $d_0 > 0$ *tal que*

$$div(\vec{V}) \leq -d_0 \leq 0 \Rightarrow |T(y,t)| = |T_0(x)|\; e^{-\int_0^t div_y(\vec{V}(\phi(r)x))\,dr} \geq\; |T_0(x)|\, e^{d_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

Si $t < 0$ *entonces los casos son al contrario.*

3.2. Ecuación de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo Sin Difusión y con Flujo

El siguiente caso es un poco mas complicado
Regresemos a las dos ecuaciones equivalentes (37) y (38)

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) + div_y(T(y,t) \,.\, \vec{V}(y)) = f(y,t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ \quad T(y,t) = 0 \;\; y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x,t) + \overline{T}(x,t) \;\; \overline{div(\vec{V})}(x,t) = \overline{f}(x,t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \quad \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Aqui es necesario definir $\psi(t)$ como

$$\psi(t) : C^1(I\!R^n, I\!R^n) \longrightarrow \Omega_0 \subset I\!R^n$$

tal que

$$\psi(t) \circ \phi(t) = I \quad \Longleftrightarrow \psi(t) = \phi^{-1}(t) = \phi(-t).$$

Se tiene que como $\phi(t)$ es un difeomorfismo de clase C^1, tambien lo es $\psi(t)$.

Proposición 3.4. *Con las hipótesis anteriores, suponiendo que*

$$\vec{J}(y,t) = \vec{a}(y,t)T(y,t) \quad y \in \; \Omega(t)$$

con

$$\vec{a} : I\!R^n \times I\!R \;\; \rightarrow \;\; I\!R$$

un campo escalar de clase C^1, entonces

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + div_y(T(y,t) \,.\, \vec{V}(y)) + \nabla_y T(y,t).\vec{a}(y,t) + div_y(\vec{a}(y,t))T(y,t) = f(y,t) \quad y \; \in \Omega(t) \\ \\ \qquad T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0 \end{cases} \tag{41}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) + \overline{T}(x,t)C(x,t) + \nabla_x \overline{T}(x,t)\vec{b}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{array} \right. \tag{42}$$

son equivalentes.

donde
$$C(x,t) = \overline{div_y(\vec{V})}(x,t) + \overline{div_y(\vec{a})}(x,t)$$

$$\begin{pmatrix} b_1(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x,t) \end{pmatrix} = \vec{b}(x,t) = D\psi(t)y.\overline{a}(y,t) = \begin{pmatrix} \nabla_y \psi_1(t)y \, . \, \overline{\vec{a}}(x,t) \\ .... \\ .... \\ .... \\ \nabla_y \psi_n(t)y \, . \, \overline{\vec{a}}(x,t) \end{pmatrix}$$

Demostración. Como

$$div_y(\vec{a}(y,t)\; T(y,t)) = \nabla_y T(y,t).\vec{a}(y) + T(y,t) div_y(\vec{a}(y,t)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t) a_i(y,t) + T(y,t) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial y_i}(y,t) \right),$$

donde a_i es la componente i-ésima de el campo vectorial $\vec{a}$, (37) se transforma en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} T(y,t) + div_y(T(y,t) \, . \, \vec{V}(y)) + \nabla_y T(y,t).\vec{a}(y,t) + div_y(\vec{a}(y,t))T(y,t) = f(y,t) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0. \end{array} \right.$$

Lo que sigue es buscar la ecuacion equivalente en un dominio fijo.

Ahora para poner $div_y(a(y,t)T(y,t))$ en terminos de x, utilizamos la definicion de ψ. Observamos que

$$x = \psi(t)y$$
$$T(y,t) = \overline{T}(\psi(t)y,t)$$

por tanto

$$\frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}(x,t)\frac{\partial \psi_j(t)y}{\partial y_i} \tag{43}$$

donde $\psi_j(t)y$ es la componente j- esima de $\psi(t)y$ se tiene por tanto que como vectores fila

$$\nabla_y T(y,t)=\nabla_x \overline{T}(x,t)D\psi(t)y$$

donde

$$D\psi(t)y=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_1(t)y & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\psi_1(t)y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_n(t)y & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\psi_n(t)y \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\nabla_y T(y,t).\vec{a}(y,t)=\nabla_x \overline{T}(x,t)\left(D\psi(t)y\ .\ \vec{a}(y,t)\right)$$

por tanto se tiene

$$\overline{\nabla_y T(y,t).\vec{a}}=\overline{\nabla_x \overline{T}(x,t)D\psi(t)y\ \ \vec{a}(y,t)}=\nabla_x \overline{T}(x,t)\left(D\psi(t)y\ .\ \overline{\vec{a}}(x,t)\right).$$

Notamos

$$D\psi(t)y\ .\ \overline{\vec{a}}(x,t)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_1(t)y & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\psi_1(t)y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_n(t)y & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\psi_n(t)y \end{pmatrix}.\ \begin{pmatrix} \overline{a_1}(x,t) \\ \overline{a_2}(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ \overline{a_n}(x,t) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_1(t)y\overline{a_1}(x,t)+...+\frac{\partial}{\partial y_n}\psi_1(t)y.\overline{a_n}(x,t) \\ .... \\ .... \\ .... \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\psi_n(t)y\overline{a_1}(x,t)+...+\frac{\partial}{\partial y_n}\psi_n(t)y\overline{a_n}(x,t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \nabla_y\psi_1(t)y\ .\ \overline{\vec{a}}(x,t) \\ .... \\ .... \\ .... \\ \nabla_y\psi_n(t)y \end{pmatrix}.\overline{\vec{a}}(x,t)=\begin{pmatrix} b_1(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x,t) \end{pmatrix}.$$

Asi se tiene que

$$\overline{\nabla_x \overline{T}(x,t) D\psi(t)y \ \vec{a}(y,t)} = \nabla_x \overline{T}(x,t)\vec{b}(x,t)$$

donde

$$\begin{pmatrix} b_1(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(x,t) \end{pmatrix} = \vec{b}(x,t)$$

observamos que $\vec{b}(x,t)$ es conocido.

Entonces bajo estas condiciones el sistema (38) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) + \overline{T}(x,t)C(x,t) + \nabla_x \overline{T}(x,t)\vec{b}(x,t) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

y se tiene que (41) y (42), son sistemas equivalentes. ■

Ahora lo que nos interesa es saber si existe solución para (41) y (42).

Proposición 3.5. *Bajo las hipótesis anteriores y considerando :*
si para todo $y_0 \in \partial\Omega(t)$, se tiene que

$$< \vec{a}(y_0, t_0), \vec{n_0}(y_0) > \leq 0$$

donde $< ., >$ es el producto punto y $\vec{n_0}(y_0)$ es el vector normal unitario externo en y_0
entonces (41) y (42) tienen solución .

Demostración. Empezaremos por (42), ya que esta en un dominio fijo.
Para eso utilizaremos el método de las características para ecuaciones diferenciales de orden 1.
Tenemos que tener encuenta la invarianza por caracteristicas de Ω_0, eso quiere decir que

Ahora Parametrizamos.

Sea x_0 un elemento de Ω_0. Definimos:

$$X(s) : I \longrightarrow \Omega_0 \ \subset \ I\!R^n$$

$$s \longmapsto X(s) \ \in \Omega_0$$

$$t(s) : I \longrightarrow \ I\!R^+$$

$$s \longmapsto t(s) \ \in I\!R^+$$

tal que $t(0) = 0 \quad y \quad X(0) = x_0$.
Por último definimos:

$$Z(s) : I \longrightarrow \ I\!R$$

$$s \longmapsto Z(s) = \overline{T}(X(s), t(s)).$$

Derivamos $Z(s)$ con respecto a s y tenemos

$$\frac{\partial}{\partial s} Z(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{T}(X(s), t(s)).X_i'(s) + \frac{\partial}{\partial t} \overline{T}(X(s), t(s)).t'(s) \tag{44}$$

donde $X_i(s)$ es la componente i-esima de $X(s)$.
Utilizando el gradiante de $\overline{T}$, se tendria que (44), se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial s} Z(s) = \nabla_x \overline{T}(X(s), t(s)).X'(s) + \frac{\partial}{\partial t} \overline{T}(X(s), t(s)).t'(s). \tag{45}$$

En nuestro caso al observar (42) y (45) nos damos cuenta que necesitamos elegir $t(s)$, $X(s)$ tales queverifiquen los siguientes sistemas

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} t(s) = 1 \\ \\ \quad t(0) = 0 \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} X(s) = \vec{b}(X(s), t(s)) \\ \\ \qquad X(0) = x_0. \end{cases} \tag{47}$$

Ahora se resuelve facilmente (46) se tiene

$$t(s) = s,$$

y por tanto (47) se transforma en

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} X(t) = \vec{b}(X(t), t) \\ \\ X(0) = x_0 \end{array} \right. \tag{48}$$

Ahora para resolver (47), por hipótesis tomamos $\vec{b} \in C^1(R^n)$, utilizando los teoremas que aseguran la existencia para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sabemos que $X(t)$, existe y es derivable para todo $t \in I$.

Por otro lado, usando (48) y asociando adecuadamente tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t} Z(X(t), t) + \ Z(X(t), t)\, C(X(t), t) = \overline{f}(X(t), t) \\ \\ Z(0) = Z(x_0, 0) = T_0(x_0) \end{array} \right. \tag{49}$$

Se tiene que la solucion de (49) es

$$Z(t) = T_0(x_0) e^{-\int_0^t C(X(r),r)\, dr} + \int_0^t e^{-\int_s^t C(X(r),r)\, dr} \overline{f}(X(s), s)\, ds \tag{50}$$

■

Aqui necesitamos la invarianza del Dominio Ω_0 por características es decir, la solución que nosotros encontramos de (42) esta en la curva característica (49), por tanto la curva no se tiene que salir de Ω_0.
Si $X(t)$ llega a la frontera de Ω_0 en tiempo t_0, llamamos

$$y_0 = x(t_0) \in \partial\Omega_0$$

la tangente a $X(t_0)$ es

$$X^{'}(t_0) = \vec{b}(x_0, t_0)$$

y por tanto tiene que apuntar adentro de Ω_0, es decir

$$< \vec{b}(x_0, t_0), \vec{n}(x_0) > \leq 0 \tag{51}$$

Esta hipótesis es una condición geometrica en $\Omega(t)$.

Para ver que es una condición geometrica en $\Omega(t)$,partimos de (51), y tenemos que

$$< \vec{b}(x_0, t_0), \vec{n}(x_0) > \leq 0 \Leftrightarrow < D\psi(t_0)y_0.\vec{a}(y_0, t_0), \vec{n}(x_0) > = < \vec{a}(y_0, t_0), (D\psi(t_0)y_0)^* \vec{n}(x_0) > =$$

utilizando el corolario 2.13, tenemos

$$= < \vec{a}(y_0, t_0), ((D\phi(t_0)x_0)^*)^{-1} \vec{n}(x_0) > = < \vec{a}(y_0, t_0), N(y_0) > \leq 0.$$

Ahora

$$< \vec{a}(y_0, t_0), N(y_0) > \leq 0 \Leftrightarrow \ < \vec{a}(y_0, t_0), \vec{n_0}(y_0) > \leq 0$$

donde $\vec{n_0}(y_0)$ es el vector normal unitario externo en $y_0 \in \partial\Omega(t)$ y por hipótesis esto se cumple.

Ahora regresando a (50) y sustituyendo $Z(t)$ por $\overline{T}(x, t)$, tenemos la solución (42) es

$$\overline{T}(X(t), t) = T_0(x_0) e^{-\int_0^t C(X(r),r)\, dr} + \int_0^t e^{-\int_s^t C(X(r),r)\, dr} \overline{f}(X(s), s)\, ds$$

y como (42) es equivalente a (41), se sigue que (41) tiene solución única

4. Ecuaciones de Balance en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo con Difusión

El siguiente caso es una ecuación en dominio dependiente de el tiempo con difusión.
Regresemos a las dos ecuaciones equivalentes (37) y (38)

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y, t) + div_y(T(y, t)\ .\ \vec{V}(y)) = f(y, t) - div_y(\vec{J}) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y, t) = 0 \ \ y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad T(y, 0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}(x, t) + \overline{T}(x, t)\ \ \overline{div(\vec{V})}(x, t) = \overline{f}(x, t) - \overline{div_y(\vec{J})}(x, t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x, t) = 0 \ \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x, 0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Proposición 4.1. *Con las hipótesis anteriores, suponiendo que*

$$\vec{J}(y,t) = -k\nabla_y T(y,t) \quad y \in \ \Omega(t)$$

con $k > 0$ *escalar, entonces*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + \nabla_y T(y,t).\vec{V}(y) + T(y,t)div(\vec{V})(y) - k\Delta T(y,t) = f(y,t) \quad t \in \Omega(t) \\ \\ \qquad T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad\qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0 \end{cases} \tag{52}$$

y

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\,\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k \partial x_i}.a_{k,i}(x,t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \qquad \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T(x,0)} = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{53}$$

donde

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_k(t)y}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \psi_i(t)y}{\partial y_j} = \nabla_y\psi_k.\nabla_y\psi_i = a_{k,i}(x,t) \ \ , \ y = \phi(t)x \tag{54}$$

y

$$s_i(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi_i(t)y}{\partial y_j^2} = \Delta_y \psi_i(t)y \quad (y = \phi(t)x) \tag{55}$$

Son equivalentes

Demostración. Como

$$\vec{J}(y,t) = -k\nabla_y T(y,t) \quad \Rightarrow \quad div_y(\vec{J}) = -k\Delta T(y,t) \quad y \in \Omega(t)$$

y por tanto la ecuación de balance en dominio que depende del tiempo (37) se transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + \nabla_y T(y,t).\vec{V}(y) + T(y,t)div(\vec{V})(y) - k\Delta T(y,t) = f(y,t) \quad t \in \Omega(t) \\ \\ \qquad T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \ \ \forall t \qquad\qquad T(y,0) = T_0(y) \qquad y \in \Omega_0. \end{cases}$$

Lo que sigue es buscar la ecuacion equivalente en un dominio fijo.
Ahora por lo visto en ecuaciones de balance sin difusión con flujo se tiene que

$$\nabla_y T(y,t) = \nabla_x \overline{T}(x,t).D\psi(t)y =$$

$$\left(\frac{\partial\,\overline{T}}{\partial x_1}(x,t),...,\frac{\partial\,\overline{T}}{\partial x_n}(x,t)\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial\ \psi_1(t)y}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\ \psi_1(t)y}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\ \psi_n(t)y}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\ \psi_n(t)y}{\partial y_n} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_1},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_n}\right). \tag{56}$$

Por tanto por (56), se tiene que

$$div_y(-k\nabla_y T(y,t)) = -k\ \ div_y(\nabla_x \overline{T}(x,t)D\psi(t)y) =$$

$$-k\ div_y\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_1},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_n}\right).$$

Se obseva que

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.\frac{\partial\ \psi_i(t)y}{\partial y_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.\frac{\partial\ \psi_i(t)y}{\partial y_j}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\right).\frac{\partial\ \psi_i(t)y}{\partial y_j} + \frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.\frac{\partial^2\ \psi_i(t)y}{\partial y_j^2}\right) \tag{57}$$

Ahora por lo visto en (43), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\,\partial x_i}\frac{\partial\ \psi_k(t)t}{\partial y_j}.$$

Por tanto se tiene que (57)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_k(t)y}{\partial y_j}\right)\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_j}+\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial^2\psi_i(t)y}{\partial y_j^2}\right).$$

Con estas consideraciones, se tiene

$$-k\;div_y\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_1},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_n}\right)=$$

$$-k\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_k(t)y}{\partial y_j}\right)\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_j}-$$

$$k\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial^2\psi_i(t)y}{\partial y_j^2}.$$

Como las sumatorias son finitas se puede cambiar el orden y por tanto se tiene

$$-k\;div_y\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_1},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_n}\right)=$$

$$-k\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_k(t)y}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_j}\right)-k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i(t)y}{\partial y_j^2}\right).$$

Ahora si llamamos

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi_k(t)y}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_j}=\nabla_y\psi_k.\nabla_y\psi_i=a_{k,i}(x,t)\;\;,\;y=\phi(t)x$$

y

$$s_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\psi_i(t)y}{\partial y_j^2}=\Delta_y\psi_i(t)y\quad(y=\phi(t)),$$

se tiene

$$-k\ div_y\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\ .\ \frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_1},...,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\ .\ \frac{\partial\psi_i(t)y}{\partial y_n}\right)=$$

$$-k\left(\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\ .\ a_{k,i}(x,t)\ +\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\ .\ s_i(x,t)\right).$$

Se tiene que la ecuacion equivalente de (52),en un dominio fijo es

$$\begin{cases} \frac{\partial\,\overline{T}(x,t)}{\partial t}+\overline{T}(x,t)\overline{div(\vec{V})}(x,t)-k\left(\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}.a_{k,i}(x,t)\ +\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right)=\overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t)=0\ x\in\partial\Omega_0\ \ \forall t\qquad \overline{T}(x,0)=T_0(x)\quad x\in\Omega_0 \end{cases}$$

y (52) y (53) son equivalentes. ■

Aqui vamos a poner una observación que necesitaremos en lo posterior.

Proposición 4.2. *Bajo las hipótesis anteriores se tiene que*

$$\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\ .\ a_{k,i}(x,t)$$

se puede ver en forma de divergencia

Demostración. Observamos que

$$\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k\partial x_i}\ .\ a_{k,i}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.a_{k,i}(x,t)\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}\ .c_i(x,t) \tag{58}$$

donde

$$c_i(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k,i}(x,t)}{\partial x_i}$$

$$B_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.a_{k,i}(x,t)$$

$$\vec{B} = (B_i)_{i=1,..,n}$$

y asi (58) queda

$$div(\vec{B}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} .c_i(x,t) \tag{59}$$

■

Observación 4.3. *Regresamos a (53)*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{T}(x,t)}{\partial x_k \partial x_i}.a_{k,i}(x,t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Ahora remplazamos (59) en (53), tenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \ x \in \partial\Omega_0 \ \ \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{60}$$

donde

$$\vec{B} = (B_i)_{i=1,..,n} = A(x,t)\nabla_x \overline{T}(x,t) \tag{61}$$

$$A(x,t) = (a_{k,i}(x,t))$$
$$d_i(x,t) = s_i(x,t) - c_i(x,t)$$

5. EDPs Generales de Segundo Orden en Dominios Variables

En este capítulo se vera la equivalencia entre ecuaciones definidas en dominios que dependen del tiempo con ecuaciones definidas en un dominio fijo.

La diferencia entre este capítulo y el anterior es que estas ecuaciones no son ecuaciones de balance, es decir son cualquier EDP, de orden 2 lineales en un dominio que depende del tiempo y, bajo las condiciones en que esta este trabajo se basa, su ecuación equivalente en dominio fijo y despues mostraremos si es posible existencia de solución y unicidad.
Comenzaremos por una ecuación general de segundo orden, con condiciones iniciales y de Dirichlet Homogénea.
Consideremos la misma incógnita $T(x,t)$ para poder usar algunas notaciones anteriores.

$$\begin{cases} T_t(y,t) - k\Delta_y T(y,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t) \,.\, g_i(y,t) + c(y,t)T(y,t) = f(t,y) \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \;\; y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases} \tag{62}$$

donde k es un escalar, $c(y,t)$ y para cada i $g_i(y,t)$, es lo suficientemente regular que se necesite para los cálculos.

Proposición 5.1. *Bajo las hipótesis anteriores tenemos que la ecuación equivalente de (62) en un dominio fijo es*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) + \nabla_x \overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{63}$$

donde

$$B(x,t) = A(x,t)\nabla_x \overline{T}(x,t)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_k(t)y}{\partial y_j} \,.\, \frac{\partial \psi_i(t)y}{\partial y_j} = a_{k,i}(x,t)$$

$$d_i(x,t) = s_i(x,t) - c_i(x,t)$$

$$s_i(x,t) = \Delta_y \psi_i(t) y \qquad c_i(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k,i}(x,t)}{\partial x_i}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1(x,t) \\ . \\ . \\ . \\ h_n(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\vec{g}}(x,t) \ . \ \nabla_y \psi_1(t) y \\ .... \\ .... \\ .... \\ \overline{\vec{g}}(x,t) \ . \ \nabla_y \psi_n(t) y \end{pmatrix}$$

donde

$$\overline{\vec{g}}(x,t) = (\overline{g_1}(x,t), ..., \overline{g_n}(x,t))^t$$

Demostración. Ahora por los capítulos anteriores (29), sabemos que si se hace el siguiente cambio de variable

$$y = \phi(t)x$$

tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, \phi(t)x) = \frac{\partial}{\partial t} \overline{T}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(\phi(t)x, t) \ . \ V_i(\phi(t)x) + \frac{\partial T}{\partial t}(\phi(t)x, t) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\partial T}}{\partial y_i}(x,t) \ . \ \overline{V_i}(x) + \frac{\overline{\partial T}}{\partial t}(x,t) = \overline{\nabla_y T}(x,t).\overline{\vec{V}} + \frac{\overline{\partial T}}{\partial t}(x,t)$$

se tiene por (61) que

$$k \Delta_y T(y,t) = k \left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t) \right)$$

se tiene por (56) que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t) \ . \ g_i(y,t) = \nabla_y T(y,t).\vec{g}(y,t) = \nabla_x \overline{T}(x,t) D\psi(t) y \ . \ \vec{g}(y,t)$$

y por tanto

$$\overline{\nabla_y T(y,t).\vec{a}(y,t)} = \nabla_x \overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t)$$

Ahora la ecuacion (62) es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\overline{T}\partial t(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) + \nabla_x \overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

■

Ahora regresando a (62), realizamos el caso mas sencillo cuando para cada i $g_i(y,t) = 0$, $c(y,t) = 0$ tenemos

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) - k\Delta_y T(y,t) = f(t,y) \quad y \in \Omega(t) \\ T(y,t) = 0 \;\; y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases} \tag{64}$$

que la ecuación equivalente en dominio fijo es

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{65}$$

5.1. Existencia de Soluciones de Ecuaciones de Segundo Orden en Dominios que Depende del tiempo

En este capítulo probaremos la existencia de soluciones para ecuaciones de segundo orden en un dominio que depende del tiempo. Mas concretamente se verán las ecuaciones de (52) y (62).
En primer escribimos (52) y (62) con sus respectivas ecuaciones en un dominio fijo.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}T(y,t) + \nabla_y T(y,t).\vec{V}(y) + T(y,t)div(\vec{V})(y) - k\Delta T(y,t) = f(y,t) \quad t \in \Omega(t) \\ T(y,t) = 0 \quad y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial t} + \overline{T}(x,t)\,\overline{div(\vec{V})}(x,t) - k\left(\displaystyle\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial^2\,\overline{T}(x,t)}{\partial x_k \partial x_i}.a_{k,i}(x,t)\;+\;\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) = \overline{f}(x,t) \\ \overline{T}(x,t) = 0 \; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T(x,0)} = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) - k\Delta_y T(y,t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial y_i}(y,t)\;.\;g_i(y,t) + c(y,t)T(y,t) = f(t,y) \quad y \in \Omega(t) \\ T(y,t) = 0 \;\; y \in \partial\Omega(t) \;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(div(B(x,t)) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i} d_i(x,t)\right) + \nabla_x \overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases}$$

En la ultima ecuacion se puede ver tambien que es equivalente tambien en un dominio fijo

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{T}}{\partial t}(x,t) - k\left(\displaystyle\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial^2 \overline{T}(x,t)}{\partial x_k \partial x_i}.a_{k,i}(x,t)\;+\;\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \overline{T}(x,t)}{\partial x_i}.s_i(x,t)\right) + \nabla_x \overline{T}(x,t).\vec{h}(x,t) + \\ \overline{c}(x,t)\overline{T}(x,t) = \overline{f}(x,t) \quad x \in \Omega_0 \\ \overline{T}(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad \overline{T}(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{66}$$

Proposición 5.2. *Bajo las hipótesis anteriores y la regularidad de los datos y coeficientes, ademas de suponer*

$$T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

se tiene que (52) y (62), tienen solución única.

Demostración. Ahora para demostrar que (52) y (62) tienen solución , nos centramos en sus respectivas ecuaciones equivalentes en un dominio fijo que son (53)

y (66). Nos centramos en la parte principal de ambos operadores.
Lo que vamos a demostrar es que la matriz

$$A = [(a_{k,i})] \quad 0 \leq i \leq n \quad 0 \leq k \leq n \tag{67}$$

definida en (54), es una matriz definida positiva.
Comenzemos observando la natulaleza de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1(t)y}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1(t)y}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_n(t)y}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(t)y}{\partial y_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1(t)y}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(t)y}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_1(t)y}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial\psi_n(t)y}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$A(x,t) = D\psi(t)y.(D\psi(t)y)^t \qquad y = \phi(t)x$$

Sea $\xi \in I\!R^n$, con $\xi \neq 0$, entonces, se tiene

$$< D\psi(t)y.(D\psi(t)y)^t\xi, \xi >=< (D\psi(t)y)^t\xi, (D\psi(t)y)^t\xi >= \left\|(D\psi(t)y)^t x\right\|^2 > 0$$

y por la equivalencia de normas tenemos que

1. t fijo, como $(D\psi(t)y)^t$ no singular $\Rightarrow \|(D\psi(t)y)^t\xi\| > 0$ si $\xi \neq 0$
2. por (20), los autovalores de $D\phi(t)$ estan lo suficientemente lejos de 0 y acotados $\forall t \in [0,T] \Rightarrow$ lo mismo ocurre para los autovalores de $D\psi(t) \Rightarrow$ $\exists\alpha(T) = \alpha > 0$ t.q $\|(D\psi(t)y)^t\xi\|^2 > \alpha \|\xi\|^2$

de donde se prueba que $A(x,t)$ es definida positiva y por tanto se demuestra la coercitividad. Con los resultados de [1] y [2], se concluye que gracias a la regularidad de los coeficientes de las derivadas primeras y segunda, se tiene que (52) y (66) tienen solución única respectivamente. ■

6. Principio Del Máximo

6.1. Principio del Máximo en un Dominio Fijo

En este sección consideramos una Ecuación en Derivadas Parciales en un dominio fijo Ω_0, despues realizaremos el Principio del Máximo.

Consideremos la siguiente ecuación en Ω_0

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \Delta T(x,t) + a(x,t)\,T(x,t) = 0 \\ \\ T(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\;\; \forall t \qquad\quad T(x,0) = T_0(x) \qquad x \in \Omega_0 \end{array} \right. \tag{68}$$

donde $a(x,t)$ es lo suficientemente regular

Proposición 6.1. *Con las anteriores hipótesis, si*

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha(t) \leq a(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t.$$

tenemos que

$$T(x,t) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega_0 \;\; \forall t \tag{69}$$

Demostración. Definimos para cualquier función u

$$u^-(x,t) = max(0, -u(x,t)) \quad \forall x \;\; \forall t$$

Multiplicamos (68) por $T^-(x,t)$, tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\;.\;T^-(x,t) - \Delta T(x,t)\;.\;T^-(x,t) + a(x,t)\;T(x,t)\;T^-(x,t) = 0.$$

Integrando en Ω_0, tenemos que

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\;.\;T^-(x,t)\,dx - \int_{\Omega_0} \Delta T(x,t)\;.T^-(x,t)\,dx + \int_{\Omega_0} a(x,t)\,(T^-)^2(x,t)\,dx = 0$$

utilizando la fórmula de Green ya que

$$T^-(x,t) = 0 \quad en \;\; \partial\Omega_0 \quad porque \quad T(x,t) = 0 \quad en \;\; \partial\Omega_0$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} (T^-)^2(x,t)\,dx + \int_{\Omega_0} \left|\nabla T^-(x,t)\right|^2\,dx + \int_{\Omega_0} a(x,t)(T^-)^2(x,t)\,dx = 0.$$

Ahora usando la hipótesis sobre $a(x,t)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\nabla T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha(t)\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq 0.$$

Usando

$$\left\|\nabla T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \geq 0$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha(t)\left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq 0. \tag{70}$$

Ahora si llamamos

$$F(t) = \left\|T^{-}(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

tenemos que (70), se transforma en

$$\frac{d}{dt}F(t) + 2\alpha(t)F(t) \leq 0$$

integrando con respecto t

$$F(t) + \int_0^t 2\alpha(s)F(s)\,ds \leq F(0)$$

Aqui hace falta usar el Lema Gronwall para tener que

$$F(t) \leq \left\|T_0^{-}\right\|_{L^2(\Omega_0)} e^{-2\int_0^t \alpha(s)\,ds} \tag{71}$$

y por hipótesis, se sabe que

$$T_0(x,.) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad T_0^{-}(x) = 0,$$

lo que implica que

$$T^{-}(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \;\; \forall t > 0 \qquad \Rightarrow \qquad T(x,t) \geq 0 \;\; \forall x \in \Omega_0,\; \forall t > 0$$

■

6.2. Principio del Máximo en un Dominio que Depende del Tiempo

En este sección consideramos una Ecuación en Derivadas Parciales en un dominio que depende del tiempo $\Omega(t)$, despues realizaremos el Principio del Máximo en $\Omega(t)$.

Consideremos la siguiente ecuación en dominio variable

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) - \Delta T(y,t) + a(y,t)\, T(y,t) = 0 \quad\; y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \;\; y \in \partial\Omega(t) \;\;\; \forall t \qquad T(y,0) = T_0(y) \quad y \in \Omega_0 \end{array} \right. \tag{72}$$

donde $a(y,t)$ es lo suficientemente regular.

Proposición 6.2. *Con las anteriores hipótesis, si*

$$T_0(x) \geq 0 \quad y \quad T_0 \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha(t) \leq a(y,t) \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t.$$

$$y = \phi(t)x.$$

donde $\alpha(t)$ *es una función regular, entonces*

$$T(y,t) \geq 0 \tag{73}$$

Demostración. Multiplicamos (72) por $T^{-}(y,t)$, tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\ .T^{-}(y,t) - \Delta T(y,t)\ .\ T^{-}(y,t) + a(y,t)\ T(y,t).\ T^{-}(y,t) = 0.$$

Integrando en $\Omega(t)$, tenemos que

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\ .\ T^{-}(y,t)\, dy - \int_{\Omega(t)} \Delta T(y,t)\ .\ T^{-}(y,t)\, dy + \int_{\Omega(t)} a(y,t).\ T(y,t).\ T^{-}(y,t)\, dy = 0$$

utilizando(27)y la fórmula de Green ya que

$$T^{-}(y,t) = 0 \;\; en \;\; \partial\Omega(t) \quad porque \;\; T(y,t) = 0 \;\; en \;\; \partial\Omega(t)$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}(T^-)^2(y,t)\,dy+\int_{\Omega(t)}\left|\nabla T^-(y,t)\right|^2\,dy+\int_{\Omega(t)}a(y,t)(T^-)^2(y,t)\,dy=0.$$

Ahora usando la hipótesis sobre $a(y,t)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}+\left\|\nabla T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}+\alpha(t)\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}\leq 0.$$

Usando

$$\left\|\nabla T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}\geq 0$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}+\alpha(t)\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}\leq 0. \tag{74}$$

Ahora si llamamos

$$\bar{F}(t)=\left\|T^-(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega(t))}$$

tenemos que (74), se transforma en

$$\frac{d}{dt}\bar{F}(t)+2\alpha(t)\bar{F}(t)\leq 0$$

integrando con respecto t

$$\bar{F}(t)+\int_0^t 2\alpha(s)\bar{F}(s)\,ds\leq\bar{F}(0)$$

Aqui hace falta usar el Lema Gronwall para tener que

$$\bar{F}(t)\leq\left\|T_0^-\right\|_{L^2(\Omega_0)}e^{-2\int_0^t\alpha(s)\,ds}, \tag{75}$$

y por hipótesis, se sabe que

$$T_0(y,.)=0\quad\forall y\in\Omega_0\qquad\Rightarrow\qquad T_0^-=0\quad en\;\Omega_0$$

lo que implica que

$$T^-(y,t)=0\qquad y\in\Omega(t)\;\;\forall t\geq 0\qquad\Rightarrow\qquad T(y,t)\geq 0\quad y\in\Omega(t)\;\;\forall t\geq 0$$

■

7. Estimación de Energía

7.1. Estimación de Energía en un Dominio fijo

En este sección consideramos una Ecuación en Derivadas Parciales en un dominio fijo Ω_0, despues realizaremos la estimación de energía para ver el decaimiento con respecto al tiempo de la solución.

Consideremos la siguiente ecuación en Ω_0

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \Delta T(x,t) + a(x,t)\, T(x,t) = 0 \quad x \in \Omega_0 \\ \\ T(x,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega_0 \;\; \forall t \qquad T(x,0) = T_0(x) \quad x \in \Omega_0 \end{cases} \tag{76}$$

donde $a(x,t)$ es lo suficientemente regular

Proposición 7.1. *Con las anteriores hipótesis, si*

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$0 < \alpha \leq a(x,t) \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t.$$

tenemos que

$$0 \leq \int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx \leq e^{-t\alpha} \int_{\Omega_0} T_0(x)\, dx \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \tag{77}$$

Demostración. Integrando (76) en Ω_0, tenemos

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\, dx - \int_{\Omega_0} \Delta T(x,t)\, dx + \int_{\Omega_0} a(x,t)\, T(x,t)\, dx = 0.$$

Usando el teorema de la divergencia se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial n}(x,t)\, d\vec{s} + \int_{\Omega_0} a(x,t)\, T(x,t)\, dx = 0,$$

Ahora por hipotesis se tiene que

$$T(x,0) = T_0(x) \geq 0,$$

utlilizando el Principio de Máximo se tiene que

$$T(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t,$$

y por tanto para $x \in \partial\Omega_0$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x,t) \leq 0 \Rightarrow -\int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial n}(x,t)\, d\vec{s} \geq 0$$

de donde tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx + \int_{\Omega_0} a(x,t)\, T(x,t)\, dx \leq 0.$$

Utilizando la hipótesis con respecto a $a(x,t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx + \alpha \int_{\Omega_0} T(x,t)\, dx \leq 0.$$

y por tanto se tiene que

$$\frac{d}{dt}\, \|T(.,t)\|_{L^1(\Omega_0)} + \alpha\, \|T(.,t)\|_{L^1(\Omega_0)} \leq 0$$

Si llamamamos

$$Y(t) = \|T(.,t)\|_{L^1(\Omega_0)}$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt}Y(t) + \alpha Y(t) \leq 0.$$

integrando con respecto t

$$Y(t) + \int_0^t \alpha Y(s)\, ds \leq Y(0)$$

Aqui hace falta usar el Lema Gronwall para tener que

$$Y(t) \leq \|T_0\|_{L^1(\Omega_0)}\, e^{-t\alpha} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{78}$$

y por tanto , la solución hace un decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞. ■

Regresando a (76), tenemos la siguiente proposición

Proposición 7.2. *Con las anteriores hipótesis, además de suponer que*

$$T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha > -C_0(\Omega_0),$$

donde $C_0(\Omega_0)$ *es la cosntante de Poincaré, tenemos que*

$$0 \leq \int_{\Omega_0} T^2(x,t)\, dx \leq e^{-2t(\alpha + C_0(\Omega_0))} \int_{\Omega_0} T_0^2(x)\, dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{79}$$

Demostración. Aqui no suponemos que $T(x,t) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_0 \quad \forall t$.
Multiplicamos (76) por $T(x,t)$, tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\, .\, T(x,t) - \Delta T(x,t)\, .\, T(x,t) + a(x,t)\, T^2(x,t) = 0.$$

Integrando en Ω_0, tenemos que

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\, .\, T(x,t)\, dx - \int_{\Omega_0} \Delta T(x,t)\, .\, T(x,t)\, dx + \int_{\Omega_0} a(x,t)\, T^2(x,t)\, dx = 0$$

utilizando la fórmula de Green ya que

$$T(x,t) = 0 \quad en \ \ \partial\Omega_0$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} T^2(x,t)\, dx + \int_{\Omega_0} |\nabla T(x,t)|^2 \, dx + \int_{\Omega_0} a(x,t) T^2(x,t)\, dx = 0.$$

Ahora usando la hipótesis sobre $a(x,t)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\, \|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha\, \|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq 0.$$

Ahora como Ω_0 es un dominio con frontera acotada tenemos la desigualdad de Poncairé que es

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_0)} \geq C_0(\Omega_0)\, \|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} \quad \forall u \; regular \; en \; \Omega_0 \quad u = 0 \; en \; \partial\Omega_0$$

donde $C_0(\Omega_0)$ es la constante de Poncairé.
Por tanto se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} + (\alpha + C_0(\Omega_0))\left\|T(.,t)\right\|^2_{L^2(\Omega_0)} \leq 0. \tag{80}$$

Ahora si llamamos

$$Z(t) = \|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

tenemos que (80), se transforma en

$$\frac{d}{dt}Z(t) + 2(\alpha + C_0(\Omega_0))Z(t) \leq 0$$

integrando con respecto t

$$Z(t) + \int_0^t 2(\alpha + C_0(\Omega_0))Z(s)\,ds \leq Z(0)$$

Aqui hace falta usar el Lema Gronwall para tener que

$$Z(t) \leq \|T_0\|_{L^2(\Omega_0)}\, e^{-t2(\alpha + C_0(\Omega_0))} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{81}$$

ya que

$$\alpha + C_0(\Omega_0) > 0 \;\;\Rightarrow\;\;\; \alpha > -C_0(\Omega_0)$$

por hipótesis y por tanto la solución hace un decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞. ■

7.2. Estimación de Energía en Dominios que Varian Dependiendo del Tiempo

En este sección consideramos una Ecuación en Derivadas Parciales en un dominio que depende del tiempo , despues realizaremos la estimación de energía para ver el decaimiento con respecto al tiempo de la solución.

Consideremos la siguiente ecuación en $\Omega(t)$

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t) - \Delta T(y,t) + a(y,t)\,T(y,t) = 0 \quad y \in \Omega(t) \\ \\ T(y,t) = 0 \;\; x \in \partial\Omega(t) \quad \forall t \qquad\quad T(y,0) = T_0(y) \quad\; y \in \Omega_0 \end{array}\right. \tag{82}$$

donde $a(y,t)$ es lo suficientemente regular.

Proposición 7.3. *Con las anteriores hipótesis, si*

$$T_0(x) \geq 0 \qquad T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

y

$$\alpha(t) \leq a(y,t) \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t.$$
$$y = \phi(t)x.$$

donde $\alpha(t)$ *es una funcion regular tal que*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\,ds > \alpha_0 > 0$$

entonces

$$\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy \leq e^{-\int_0^t \alpha(t)\,ds} \int_{\Omega_0} T_0(x)\,dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{83}$$

Demostración. Sabemos por (27) que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy + \int_{\partial\Omega(t)} T(y,t)\vec{V}(y)\,d\vec{s}.$$

Por la condición de contorno de Dirichlet Homogénea en la frontera, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy. \tag{84}$$

Con esta observación regresamos a (82) e integrando en $\Omega(t)$, tenemos

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,dy - \int_{\Omega(t)} \Delta T(y,t)\,dy + \int_{\Omega(t)} a(y,t)\,T(y,t)\,dy = 0.$$

utilizando(27)y la fórmula de Green ya que

$$T(y,t) = 0 \quad en \;\; \partial\Omega(t)$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\,dy - \int_{\partial\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}(y,t)\,d\vec{s} + \int_{\Omega(t)} a(y,t)\,T(y,t)\,dy = 0,$$

Ahora por hipótesis se tiene que

$$T(y,0) = T_0(y) \geq 0 \quad y \in \Omega_0$$

utlilizando el Principio de Máximo se tiene que

$$T(y,t) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t,$$

y por tanto para $y \in \partial\Omega(t)$

$$\frac{\partial T}{\partial n}(y,t) \leq 0 \Rightarrow -\int_{\partial\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial n}(y,t)\, d\vec{s} \geq 0$$

de donde tenemos que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\, dy + \int_{\Omega(t)} a(y,t)\, T(y,t)\, dy \leq 0.$$

Utilizando la hipótesis con respecto a $a(y,t)$, tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} T(y,t)\, dy + \alpha(t)\int_{\Omega(t)} T(y,t)\, dy \leq 0.$$

llamando

$$\bar{Y}(t) = \int_{\Omega(t)} T(y,t)\, dy$$

tenemos

$$\frac{d\bar{Y}}{dt}(t) + \alpha(t)\bar{Y}(t) \leq 0.$$

Integrando con respecto a t y utilizando otro lema de Gronwall

$$\bar{Y}(t) = \int_{\Omega(t)} T(y,t)\, dy \leq e^{-\int_0^t \alpha(t)\, ds} \int_{\Omega_0} T_0(x)\, dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{85}$$

ya que por hipótesis

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\, ds > \alpha_0 > 0$$

y por tanto

$$e^{-\int_0^t \alpha(s)\, ds} = e^{-t\left(\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)\, ds\right)} < e^{-\alpha_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

con $t >> 1$, se deduce que , la solución hace una decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞. ■

Regresando a (82) tenemos la siguiente proposición.

Proposición 7.4. *Con las anteriores hipótesis, si*

$$T_0(x) \in L^2(\Omega_0)$$

$$\gamma(t) = \alpha(t) - C_0(\Omega(t))$$

donde $C_0(\Omega(t))$, es la constante de Poncairé en $\Omega(t)$ y $\alpha(t)$ es tal que

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\,ds > \alpha_1 > 0$$

entonces

$$0 \le \int_{\Omega(t)} T^2(y,t)\,dy \le e^{-2\int_0^t \gamma(s)\,ds}\int_{\Omega(t)} T_0^2(x)\,dx \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{86}$$

Demostración. Aqui no suponemos que $T(y,t) \ge 0 \quad \forall y \in \Omega(t) \quad \forall t$.
Multiplicamos (82) por $T(y,t)$, tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\ .\ T(y,t) - \Delta T(y,t)\ .\ T(y,t) + a(y,t)\ T^2(y,t) = 0.$$

Integrando en $\Omega(t)$, tenemos que

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial T}{\partial t}(y,t)\,.\,T(y,t)\,dy - \int_{\Omega(t)} \Delta T(y,t)\,.\,T(y,t)\,dy + \int_{\Omega(t)} a(y,t)\,T^2(y,t)\,dy = 0$$

utilizando(27)y la fórmula de Green ya que

$$T(y,t) = 0 \quad en \ \ \partial\Omega(t)$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} T^2(y,t)\,dy + \int_{\Omega(t)} |\nabla T(y,t)|^2 \ dy + \int_{\Omega(t)} a(y,t)T^2(y,t)\,dy = 0.$$

Ahora usando la hipótesis sobre $a(y,t)$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))} + \|\nabla T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))} + \alpha(t)\,\|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))} \le 0.$$

Ahora como $\Omega(t)$ es un dominio con frontera acotada tenemos la desigualdad de Poincaire que es

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega(t))} \ge C_0(\Omega(t))\,\|u\|^2_{L^2(\Omega(t))} \quad \forall u\ regular\ en\ \Omega(t) \quad u = 0\ en\ \partial\Omega(t)$$

donde $C_0(\Omega(t))$ es la constante de Poicaire en $\Omega(t)$.
Por tanto se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))} + \gamma(t)\|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))} \leq 0. \tag{87}$$

Ahora si llamamos

$$\bar{Z}(t) = \|T(.,t)\|^2_{L^2(\Omega(t))}$$

tenemos que (87), se transforma en

$$\frac{d}{dt}\bar{Z}(t) + 2\gamma(t)\bar{Z}(t) \leq 0$$

integrando con respecto t

$$\bar{Z}(t) + \int_0^t 2\gamma(s)\bar{Z}(s)\,ds \leq \bar{Z}(0)$$

Aqui hace falta usar el Lema Gronwall para tener que

$$\bar{Z}(t) \leq \|T_0\|_{L^2(\Omega_0)}\, e^{-2\int_0^t \gamma(s)\,ds} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{88}$$

ya que por hipótesis

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\,ds > \alpha_1 > 0$$

y por tanto

$$e^{-\int_0^t \gamma(s)\,ds} = e^{-t\left(\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\,ds\right)} < e^{-\alpha_1 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

con $t >> 1$, se deduce que , la solución hace una decaimiento exponencial cuando t tiende a ∞. ■

7.3. Bibliografía

Referencias

[1] Amann, H. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, **89**, Birkhauser Verlag, Berlin (1995).

[2] Amann, H. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*, (Friedrichroda, 1992), Teubner, 1993, 133, 9-126

[3] Duvaut, G. Mécanique des milieux continus / G. Duvaut Paris : Masson, 1990

[4] Henry, Dan Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations / Dan Henry Cambridge [etc.] : Cambridge University Press, 2005

[5] Chorin, Alexandre Joel A mathematical introduction to fluid mechanics / A.J. Chorin, J.E. Marsden New York [etc.] : Springer, cop. 1979.

[6] Ladyzhenskaya, Olga A. The mathematical theory of viscous incompressible flow / O.A. Ladyzhenskaya New York, [etc] : Gordon and Breach, 1969.

[7] Lieberman, Gary M. Second order parabolic diferential equations / Gary M. Lieberman Singapore [etc.] : World Scientific, 2005.