Sur l'interdépendance des variables dans l'étude de quelques équations de la mécanique des fluides

Henry David Llerena Montenegro

universite PARIS-SACLAY

Sur l'interdépendance des variables dans l'étude de quelques équations de la mécanique des fluides

On the interdependence of variables in the study of some equations in fluid mechanics

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 574, Mathématiques Hadamard (EDMH)
Spécialité de doctorat : Mathématiques appliquées
Graduate School : Mathématiques
Référent : Université d'Évry Val d'Essone

Thèse préparée dans l'unité de recherche
Laboratoire Mathématiques et Modélisation d'Évry (Université Paris-Saclay, CNRS, Univ Evry),
sous la direction de **Pierre-Gilles LEMARIE-RIEUSSET**, Professeur des universités,
et la co-direction de **Diego CHAMORRO**, Maître de Conférences.

Thèse soutenue à Paris Saclay, le 4 décembre 2024, par

Henry David LLERENA MONTENEGRO

Composition du jury

Membres du jury avec voix délibérative

Isabelle GALLAGHER Professeur, École Normale-Supérieure de Paris	Présidente & Examinatrice
Lorenzo BRANDOLESE Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1	Rapporteur & Examinateur
Christophe PRANGE Professeur, CY Cergy Paris Université	Rapporteur & Examinateur
Anne-Laure DALIBARD Professeur, Sorbonne Université	Examinatrice
Stéphane MENOZZI Professeur, Université d'Evry Paris Saclay	Examinateur

THESE DE DOCTORAT

NNT : 2024UPASM048

ÉCOLE DOCTORALE
de mathématiques
Hadamard (EDMH)

Titre : Sur l'interdépendance des variables dans l'étude de quelques équations de la mécanique des fluides

Mots clés : Équations des fluides micropolaires, ε-régularité, espaces de Morrey, solutions partiellement adaptées, concentration de la norme L^3, équations micropolaires stationnaires.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude de la relation entre les variables dans les équations des fluides micro-polaires. Ce système, basé sur les équations de Navier-Stokes, consiste en un couplage de deux variables : le champ de vitesse $\vec{u}$ et le champ de micro-rotation $\vec{\omega}$. Notre objectif est de mieux comprendre comment l'information concernant une variable influence le comportement de l'autre. À cette fin, nous avons divisé cette thèse en quatre chapitres, où nous étudierons les propriétés de régularité locale des solutions faibles de type Leray, puis nous nous concentrerons sur la régularité et l'unicité des solutions faibles dans le cas stationnaire.

Le premier chapitre présente une rapide déduction physique des équations micro-polaires, suivie de la construction des solutions faibles de type Leray.

Dans le chapitre 2, nous commençons par prouver un gain d'intégrabilité pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ lorsque la vitesse appartient à certains espaces de Morrey. Ce résultat souligne un effet de domination de la vitesse. Nous montrons ensuite que cet effet peut également être observé dans le cadre de la théorie de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, *i.e.*, sous une hypothèse de petitesse supplémentaire uniquement sur le gradient de la vitesse, nous pouvons démontrer que la solution devient Hölder continue. Pour cela, nous introduisons la notion de solution partiellement adaptée, qui est fondamentale dans ce travail et représente l'une des principales nouveautés. Dans la dernière section de ce chapitre, nous obtenons des résultats similaires dans le contexte du critère de Serrin.

Dans le chapitre 3, nous nous concentrons sur le comportement de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ autour des possibles points où la régularité peut être perdue. Plus précisément, nous établissons un critère d'explosion pour la norme L^3 de la vitesse et améliorons ce résultat en présentant un phénomène de concentration. Nous vérifions également que le cas limite $L^\infty_t L^3_x$ du critère de Serrin reste valable pour les équations des fluides micro-polaires.

Enfin, le problème de l'existence et de l'unicité des équations stationnaires des fluides micro-polaires est abordé dans le chapitre 4. En effet, nous prouvons l'existence de solutions faibles $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans l'espace d'énergie naturel $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$. De plus, en utilisant la relation entre les variables, nous déduisons que ces solutions sont régulières. Il convient de noter que la solution triviale peut ne pas être unique, et pour surmonter cette difficulté, nous développons un théorème de type Liouville. Ainsi, nous démontrons qu'en imposant une décroissance plus forte à l'infini uniquement sur $\vec{u}$, nous pouvons en déduire l'unicité de la solution triviale $(\vec{u}, \vec{\omega}) = (0, 0)$.

ÉCOLE DOCTORALE
de mathématiques
Hadamard (EDMH)

Title : On the interdependence of variables in the study of some equations in fluid mechanics

Keywords : micropolar fluids equations, ε-regularity, Morrey spaces, partial suitable solutions, L^3-norm concentration, stationary micropolar fluids equations.

Abstract :
This thesis is devoted to the study of the relationship between the variables in the micropolar fluids equations. This system, which is based on the Navier-Stokes equations, consists in a coupling of two variables : the velocity field $\vec{u}$ and the microrotation field $\vec{\omega}$. Our aim is to provide a better understanding of how information about one variable influences the behavior of the other. To this end, we have divided this thesis into four chapters, where we will study the local regularity properties of Leray-type weak solutions, and later we will focus on the regularity and uniqueness of weak solutions for the stationary case.

The first chapter presents a brief physical derivation of the micropolar equations followed by the construction of the Leray-type weak solutions.

In Chapter 2, we begin by proving a gain of integrability for both variables $\vec{u}$ and $\vec{\omega}$ whenever the velocity belongs to certain Morrey spaces. This result highlights an effect of domination by the velocity. We then show that this effect can also be observed within the framework of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theory, *i.e.,* under an additional smallness hypothesis only on the gradient of the velocity, we can demonstrate that the solution becomes Hölder continuous. For this, we introduce the notion of a partial suitable solution, which is fundamental in this work and represents one of the main novelties. In the last section of this chapter, we derive similar results in the context of the Serrin criterion.

In Chapter 3, we focus on the behavior of the L^3-norm of the velocity $\vec{u}$ near possible points where regularity may get lost. More precisely, we establish a blow-up criterion for the L^3 norm of the velocity and we improve this result by presenting a concentration phenomenon. We also verify that the limit point $L^\infty_t L^3_x$ of the Serrin criterion remains valid for the micropolar fluids equations.

Finally, the problem of existence and uniqueness for the stationary micropolar fluids equations is addressed in Chapter 4. Indeed, we prove the existence of weak solutions $(\vec{u}, \vec{\omega})$ in the natural energy space $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$. Moreover, by using the relationship between the variables, we deduce that these solutions are regular. It is worth noting that the trivial solution may not be unique, and to overcome this difficulty, we develop a Liouville-type theorem. Hence, we demonstrate that by imposing stronger decay at infinity only on $\vec{u}$, we can infer the uniqueness of the trivial solution $(\vec{u}, \vec{\omega}) = (0, 0)$.

Table des matières

Remerciements

Dans les lignes suivantes, je souhaite exprimer, avec quelques mots qui ne seront bien évidemment pas suffisants, mes plus sincères remerciements à toutes les personnes qui, au cours de ces années de thèse, et même depuis bien plus longtemps, m'ont apporté un soutien infaillible.

Tout d'abord, je voudrais remercier Diego Chamorro pour son soutien, ses conseils et les "longues" discussions qui, depuis mon Master 1, m'ont permis d'accomplir ce travail. Je suis sûr que ses mots et valeurs m'accompagneront tout au long de ma vie professionnelle. Je tiens également à remercier Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, car nos échanges m'ont permis de découvrir sa passion et dévouement pour les mathématiques, qui seront toujours une source d'inspiration pour moi.

D'autre part, je souhaite également remercier Christophe Prange et Lorenzo Brandolese d'avoir accepté de rapporter ma thèse et pour le temps consacré à ce travail. Merci pour vos rapports et commentaires qui ont permis d'améliorer la clarté du manuscrit. Je remercie également Isabelle Gallagher, Anne-Laure Dalibard et Stéphane Menozzi d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je suis très reconnaissant de leur présence.

Ensuite, je tiens à remercier toute l'équipe du LaMME, qui a fait que mon temps comme doctorant reste un beau souvenir. Je voudrais exprimer ma gratitude à tous les professeurs de l'équipe d'Analyse ainsi qu'aux professeurs dont j'ai eu l'opportunité d'assurer les TDs. Ma gratitude s'adresse également à tous les doctorants et doctorantes, encore présents ou déjà partis du laboratoire, pour les conversations si enrichissantes. En particulier, je profite de cette occasion pour remercier Paulin, Mathis, Anna et Maxence, mes collègues de bureau et d'équipe. Mes remerciements s'adressent également à Valérie et Eugénie, qui m'ont aidé et guidé dans toutes les formalités administratives, ainsi qu'à Maouloud pour tous les ressources informatiques dont j'ai eu besoin.

Je tiens aussi à remercier l'association AMARUN et tous ses membres, grâce auxquels chaque conférence, que ce soit à Paris ou en Équateur, a contribué à agrandir la communauté équatorienne des mathématiciens et à partager de beaux moments ensemble. Un merci particulier à Oscar et Fernando.

Je vais maintenant mentionner les personnes que j'ai eu la grande opportunité de rencontrer depuis mon arrivée en France. Je remercie donc Paulin (encore une fois), Romain et Hao-Thien pour leur soutien et leur patience avec mon français dès mes premiers pas dans le M1 à Évry. Ensuite, je veux également exprimer ma gratitude aux amis exceptionnels que j'ai rencontrés pendant mon M2 à Orsay : merci Shivang, Carlo, Maria et Philippe pour les soirées, les jeux, et les discussions très agréables.

Je souhaite évoquer les personnes rencontrées comme doctorant et qui ont marqué ces années.

Merci à Monica et Balthazar pour votre accueil et tous les repas partagés. Je tiens également à remercier Pedro, Ana, Kathy, Daniel, Belén, Jean, Augustin, Paula et Céline, qui sont devenus un véritable soutien et ont été présents quand j'en avais besoin. Merci également à Lorenzo et Lorenza pour le temps partage ensemble à Paris et Brescia. Je profite également pour remercier touts les stagiaires équatoriens du LaMME, qui sont passés pendant ces années : Geremy, Ronny, Viviana et Josué. Je tiens à remercier en particulier Adrián et David H. pour nos conversations, les jeux et soirées, qui resteront toujours ancrés dans ma mémoire.

Enfin, et en arrivant à ma famille, quiero agradecer a mis padres, Randy y Marianita, quienes, a pesar de la distancia, siempre los he sentido cerca de mí. Este logro no es más que un reflejo de su esfuerzo y dedicación. A mi hermana Daysi, quien es y será siempre mi ejemplo, no tengo más que decir que gracias por todo el soporte incondicional que siempre me has brindado ; Sofy y Pablito David estarán siempre presentes en mi corazón. A mi hermano Randy, quien fue mi inspiración para tomar el camino de la matemática, siempre estaré agradecido por tus consejos y cariño.

Un agradecimiento especial a mis cuñados Pablo y Melissa, quienes han estado presentes en todo momento. Quiero agradecer igualmente a mi abuelita Esperancita, mi tía Madeline y mi prima Anthonella, cuyo apoyo no lo he dejado de sentir ni un momento desde que dejé el Ecuador. También quiero agradecer rápidamente a toda la familia Llerena y familia Montenegro ; no tendré espacio suficiente para mencionarlos a todos, pero sepan que sus palabras y mensajes siempre fueron una fuente de motivación. Agradezco a mis amigos en Ecuador : Gandhi, André 1 y 2, John Steven y Josse por todas las noches de juegos o pequeñas salidas cuando tuvimos la oportunidad. Gracias por todo.

Finalmente, quiero cerrar este texto con unas palabras dedicadas a la persona que ha estado conmigo desde el principio : Mica, eres mi rayo de luz en la oscuridad, sigamos juntos esta aventura.

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'interdépendance des variables dans les équations de la mécanique des fluides. En particulier, nous nous concentrerons essentiellement sur les équations micro-polaires introduites dans les années 1960 par Eringen dans [33]. Ce système d'équations, qui modélise des fluides incompressibles avec des micro-structures influençant la dynamique du fluide, est constitué par un couplage entre les équations de Navier-Stokes et une équation sur la vitesse de micro-rotation. Ce système est donc donné par l'expression suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} + \vec{g}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\vec{u}$ représente la vitesse, p la pression associée, $\vec{\omega}$ la vitesse de la micro-structure ou vitesse des micro-rotations, et $\vec{f}, \vec{g}$ sont des forces extérieures. Une rapide déduction physique de ce système, en fournissant quelques détails supplémentaires sur ces équations sera donnée dans la première section du Chapitre 1.

Notre objectif consiste alors à obtenir une meilleure compréhension de la relation entre les variables du système ci-dessus (ainsi que pour le cas stationnaire de (1)), afin d'expliquer comment l'information sur $\vec{u}$ influence le comportement des autres variables et vice-versa. Autrement dit, nous cherchons à mettre en lumière un phénomène d'interdépendance des variables pour ce système micro-polaire.

Avant de présenter plus en détail nos résultats, il est important de présenter quelques propriétés liées aux équations micro-polaires. D'abord, observons que si nous appliquons formellement l'opérateur divergence à l'équation associée à la vitesse $\vec{u}$, nous obtenons que la pression vérifie la relation suivante :

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \operatorname{div}(\vec{f}),$$

et nous observons alors qu'il est possible de récupérer l'information sur la pression seulement à partir de la vitesse (rappelons que la force $\vec{f}$ est donnée). Par conséquent, nous nous concentrerons uniquement sur la relation entre $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, que nous désignerons comme les variables principales.

En outre, notons que la première équation de (1), associée à la variable $\vec{u}$, est invariante par le changement d'échelle suivant :

$$\vec{u}_\lambda(t, x) = \lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t, x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_\lambda = \lambda^2 \vec{\omega}(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{où } \lambda > 0. \tag{2}$$

Cependant, le triplet $(\vec{u}_\lambda, p_\lambda, \vec{\omega}_\lambda)$ n'est plus une solution du système micro-polaire, car la deuxième équation de (1) n'a pas une mise à l'échelle naturelle qui préserve la structure de l'équation en raison de la présence du terme d'amortissement $\vec{\omega}$.

De plus, remarquons que comme nous avons le terme $\vec{\nabla}\,\text{div}(\vec{\omega})$ dans l'équation associée à $\vec{\omega}$, nous allons tout au long de cette thèse réaliser une étude supplémentaire du terme $\text{div}(\vec{\omega})$ et bien que cela ne soit pas explicitement écrit dans l'énoncé de nos résultats, l'information obtenue sur ce terme nous permettra den extraire certaines estimations essentielles.

Nous avons alors structuré l'étude du système micro-polaire (1) en quatre chapitres. Le premier commence par une rapide déduction physique des équations micro-polaires, suivie par la construction de solutions faibles à l'aide d'arguments classiques. Les Chapitres 2 et 3 sont dédiés à l'étude du cas évolutif, où nous mettons en évidence un phénomène de domination de la vitesse $\vec{u}$ dans l'analyse de la régularité locale des solutions faibles. Enfin, dans le Chapitre 4, nous explorerons l'interdépendance des variables dans le contexte stationnaire. Nous présentons maintenant plus en détails nos contributions dans les parties suivantes de cette introduction.

A) Les équations micro-polaires : cas évolutif

Remarquons tout d'abord que dans le système (1) ci-dessus la vitesse $\vec{u}$ vérifie les équations de Navier-Stokes avec une force extérieure $\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}+\vec{f}$, tandis que la vitesse de micro-rotation $\vec{\omega}$ vérifie une équation linéaire de type parabolique avec un terme de transport $\vec{u}$. Étant donné que nous disposons de cette structure, la manière la plus naturelle d'étudier ces équations est évidemment d'étendre ou d'adapter les théories déjà connues pour les équations de Navier-Stokes. Cela a été utile, par exemple, dans l'étude de l'existence des solutions faibles et fortes, comme cela a été fait dans [41], [72] et [86]. En effet, dans la deuxième section du Chapitre 1, nous montrons comment construire des solutions faibles de type Leray pour les équations micro-polaires (1), en considérant un traitement *symétrique* pour les deux variables $(\vec{u},\vec{\omega})$. C'est-à-dire, nous démontrons qu'il existe au moins une solution faible $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ des équations (1) globale en temps telle que nous avons l'information d'énergie $\vec{u}\in L^\infty(]0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{\omega}\in L^\infty(]0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,H^1(\mathbb{R}^3))$.

Insistons sur le fait que, pour construire ces solutions, nous devons passer par un argument de compacité et donc l'unicité et la régularité de ces types de solutions (de manière analogue aux équations de Navier-Stokes) restent des questions largement ouvertes.

Cependant, il est bien connu qu'il est possible d'établir des conditions suffisantes de régularité afin de répondre à la question suivante : Si $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ est une solution de type Leray des équations micro-polaires (1), quelles sont les conditions additionnelles sur $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ permettant d'en déduire la régularité de la solution ?

Nous pouvons ainsi mentionner l'article [80], où les auteurs ont adapté les théories connues pour les équations de Navier-Stokes et, en considérant des hypothèses similaires pour les deux variables $(\vec{u},\vec{\omega})$, ils ont obtenu la régularité des solutions faibles. Toutefois, comme cela a été remarqué des années après, il est plus judicieux de séparer le comportement de ces deux équations afin d'obtenir des résultats plus précis. Par exemple, dans l'article [29], il a été démontré que si l'on considère seulement que la vitesse appartient aux espaces de Lorentz $L^p(]0,T[,L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1$ et $3<q\leq+\infty$, alors la solution faible $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ des équations micro-polaires devient régulière dans $]0,T]\times\mathbb{R}^3$. Plusieurs articles, tels que [30], [39], [38], [51], [68], [67], [83] et [106], ont obtenu des

résultats similaires en considérant différents espaces pour la vitesse ou des différentes conditions sur la pression.

Il est très important de remarquer que tous ces résultats sur les équations micro-polaires que nous venons de citer sont obtenus en utilisant un argument d'unicité fort-faible. Par conséquent, les informations que nous avons sur la solution $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ sont considérées sur tout l'espace $]0, T[\times \mathbb{R}^3$, avec des conditions supplémentaires sur les données initiales. Cependant, ce phénomène de transport d'information de la variable $\vec{u}$ vers $\vec{\omega}$ nous permet d'introduire la notion suivante :

Définition 1. *On dira que la vitesse* $\vec{u}$ domine *les autres variables si l'on peut déduire un gain d'information en termes d'intégrabilité, de régularité, etc., des variables* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *en supposant une hypothèse supplémentaire* uniquement *sur la vitesse.*

Notons que l'hypothèse supplémentaire évoquée dans la définition précédente présente une certaine ambiguïté puisque rien n'est précisé à son sujet, ce qui nous laisse plusieurs scénarios possibles. De plus, cette propriété du système micro-polaire, bien que connue depuis un certain temps, n'a pas été étudiée de manière rigoureuse et systématique, et c'est ce point de vue que nous allons adopter et développer ici.

Le thème général consiste donc à mettre en évidence ce phénomène de domination dans l'étude de la régularité locale d'une solution faible des équations micro-polaires. Pour cela, il est important de fixer notre cadre de travail dans le contexte local, où, en particulier, nous travaillerons avec la notion suivante de solution :

Définition 2. *Nous dirons que* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *est une* solution faible *des équations micro-polaires* (1) *sur un ensemble* $\Omega \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ *ouvert et borné si* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ *et si, pour tout* $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in \mathcal{D}_{t,x}(\Omega)$ *telle que* $\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = 0$*, nous avons*

$$\begin{cases} \langle \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} - \vec{f} | \vec{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0, \\ \langle \partial_t \vec{\omega} - \Delta \vec{\omega} - \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{\omega} - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} | \vec{\psi} \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0. \end{cases}$$

Bien évidemment, lorsque nous parlons de la régularité dans un cadre local, nous pouvons penser aux théories bien connues des équations de Navier-Stokes : les critères de Serrin et la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, qui en effet nous donnent une idée de ce que devrait être le comportement de la solution afin d'obtenir un gain de régularité.

Ainsi, dans la Section 2.2 du Chapitre 2, nous présenterons un premier résultat de domination de la vitesse $\vec{u}$, donné dans notre article [18], dans le cadre des espaces de Morrey, qui est donnée comme suit :

Théorème 1. *Soit* $\mathbf{Q}_R(t, x) =]t - R^2, t + R^2[\times B_{x,R} \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ *une boule parabolique pour un certain* $R > 0$*. Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible des équations micro-polaires* (1) *sur* $\mathbf{Q}_R$ *avec une force extérieure* $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$*. Si nous supposons en plus que*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad \text{avec } 2 < p_0 \leq q_0,\ 5 < q_0 \leq 6, \tag{3}$$

alors nous avons les points suivants :

1) *sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_{R_1} \subset \mathbf{Q}_R$*, avec* $0 < R_1 < R$*, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

2) *sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_{R_2} \subset \mathbf{Q}_{R_1}$, *avec* $0 < R_2 < R_1 < R$, *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{\omega} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Ce théorème, qui joue un rôle central dans les prochaines sections, est inspiré du résultat de O'Leary dans [79]. Bien que nous ne revendiquions aucun gain de régularité, nous observons qu'une information Morrey sur $\vec{u}$ implique un gain d'intégrabilité pour les deux variables.

Par la suite, dans la Section 2.3 du Chapitre 2, nous analysons ce phénomène de domination dans le cadre de la théorie de régularité développée par Caffarelli, Kohn et Nirenberg pour les équations de Navier-Stokes dans [13]. Comme cette théorie s'applique aux solutions adaptées, c'est-à-dire des solutions faibles qui vérifient une égalité d'énergie locale, pour traiter les équations micro-polaires et obtenir une séparation des informations entre les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, nous aurons besoin d'une inégalité d'énergie qui soit vérifiée uniquement pour la vitesse $\vec{u}$. Cela nous a conduit à introduire le concept de solution suivant, qui est fondamental tout au long du développement de cette section et constitue l'une des principales nouveautés de notre travail.

Définition 3 (Solutions partiellement adaptées). *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_R$ *des équations micro-polaires* (1) *telle que* $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ *et* $\vec{f} \in L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$. *Nous dirons que* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *est une* solution partiellement adaptée *sur* $\mathbf{Q}_R$ *si la distribution* μ *donnée par*

$$\mu \quad = -\partial_t(|\vec{u}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2) - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot \vec{u} + 2\vec{f} \cdot \vec{u},$$

est une mesure non-négative localement finie sur $\mathbf{Q}_R$.

Ainsi, avec cette définition en main, nous pouvons obtenir la régularité Hölderienne en temps et en espace pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en imposant uniquement des conditions locales sur la vitesse $\vec{u}$, ce qui met en évidence le phénomène de domination mentionné précédemment. Ce résultat, tel qu'énonce dans notre article [21], est donné comme suit.

Théorème 2. *Soient* $R > 0$ *et* $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ *et nous considérons la boule parabolique* $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0) =]t_0 - R^2, t_0 + R^2[\times B_{x_0,R}$. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution partiellement adaptée des équations micro-polaires* (1) *sur* $\mathbf{Q}_R$. *Supposons que pour un certain* $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ *nous avons* $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^1_x \cap \mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_a}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ *pour* $\tau_a > \frac{5}{2-\alpha}$. *S'il existe une constante* $0 < \varepsilon \ll 1$ *telle que*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0 - r^2, t_0 + r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds < \varepsilon,$$

alors la solution $(\vec{u}, \vec{\omega})$ *est Hölder continue d'exposant* $\alpha > 0$ *en variable de temps et d'espace dans un voisinage du point* (t_0, x_0).

Remarquons en plus que puisque les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ deviennent Hölder continues sur un ensemble borné, cela implique automatiquement que la solution est bornée. Ainsi, nous pouvons également obtenir des conclusions similaires, en particulier nous avons développé le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution partiellement adaptée des équations micro-polaires* (1) *dans* $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$. *Supposons qu'il existe une constante* $0 < \varepsilon \ll 1$ *suffisamment petite telle que*

$$\frac{1}{R^2} \int_{t_0 - R^2}^{t_0 + R^2} \int_{B_{x_0,R}} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon.$$

Alors, il existe $0 < R_3 < R$ *tel que* $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_{R_3}(t_0, x_0))$.

Observons qu'à la différence du Théorème 2, nous avons une hypothèse supplémentaire sur la pression p, et le contrôle de petitesse est uniquement sur un rayon $R > 0$. Toutefois nous observons encore qu'il est possible obtenir un gain d'information sur les deux variables. Comme on le verra plus tard, ce résultat sera utile dans l'étude de la régularité des solutions partiellement adaptées dans espaces critiques par rapport au changement d'échelle (2).

Ensuite, dans la Section 2.4 du Chapitre 2, nous allons présenter un *critère de régularité de Serrin partiel* pour les équations des fluides micro-polaires. Plus précisément, nous pouvons déduire que les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ sont assez régulières par rapport à la variable spatiale en considérant seulement que la vitesse $\vec{u}$ est bornée.

Théorème 4. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible des équations des fluides micro-polaires* (1) *sur une boule parabolique* $\mathbf{Q}_R =]t_0 - R^2, t_0 + R^2[\times B_{x_0,R}$ *au sens de la Définition 2, page 11 telle que*

$$\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R) \quad et \quad p \in \mathcal{D}'_{t,x}(\mathbf{Q}_R).$$

Si $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_R)$*, alors pour tout* $0 < r < R$*, et pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t \dot{H}^{k+1}_x(\mathbf{Q}_r) \cap L^2_t \dot{H}^{k+2}_x(\mathbf{Q}_r).$$

Ces deux derniers théorèmes peuvent être trouvés dans l'appendice de notre article [20] qui a été soumis pour publication.

D'autre part, il est important de souligner que les espaces de Morrey considérés dans l'hypothèse du Théorème 1, ainsi que l'espace $L^\infty_t L^\infty_x$, sont des espaces sous-critiques par rapport au changement d'échelle (2), et donc, nous observons sans surprise qu'avoir un contrôle sous-critique sur la vitesse implique un gain d'information soit en termes d'intégrabilité ou de régularité du système micro-polaire. En particulier, étant donné que nous pouvons déduire la régularité de $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ à partir du fait que la vitesse $\vec{u}$ soit bornée, nous pouvons naturellement introduire la définition suivante :

Définition 4 (Point partiellement régulier / Point partiellement singulier). *Un point* $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ *est un* point partiellement régulier *des équations des fluides micro-polaires s'il existe* $r > 0$ *tel que* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$*. D'un autre côté, on dira qu'un point* (t_0, x_0) *est* partiellement singulier *s'il n'est pas* partiellement régulier.

Ainsi, notre prochain axe de recherche consistera en l'étude du comportement des points définis ci-dessus dans l'espace L^3_x. Plus précisément, dans le Chapitre 3, nous présenterons l'explosion, puis un effet de concentration de cette norme autour des points partiellement singuliers. Pour cela, notons d'abord que l'explosion de la norme L^3_x et la régularité sous cette hypothèse ne sont que deux faces d'une même pièce, et donc, dans un premier temps, nous établissons le résultat suivant

Théorème 5. *Soient* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution partiellement adaptée sur un ensemble ouvert* $\Omega \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ *des équations micro-polaires* (1)*. Supposons que pour* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, il existe* $R > 0$ *tel que* $]t_0 - R^2, t_0[\times B_{x_0,R} \subset \Omega$ *et que nous ayons l'information* $\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - R^2, t_0[, L^3(B_{x_0,R}))$*. Alors, il existe* $r > 0$ *avec* $0 < r \leq \frac{R}{2}$ *tel que* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$*.*

Il est important de remarquer que l'espace $L^\infty_t L^3_x$ est critique par rapport au changement d'échelle (2), et donc déduire la régularité sous cette hypothèse devient un travail plus délicat. En effet, rappelons que cela a été fait pour la première fois pour les équations de Navier-Stokes sans force extérieure dans l'article [34] en 2003, en utilisant la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, ainsi que la théorie d'unicité de l'équation de la chaleur. Observons alors que l'utilisation des résultats du Chapitre 2, ainsi que le fait de travailler avec des solutions partiellement adaptées, permet de considérer seulement que $\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - R^2, t_0[, L^3(B_{x_0,R}))$, reflétant encore une fois l'effet de domination de cette variable sur $\vec{\omega}$.

D'autre part, même si le théorème précédent est défini dans le cadre des solutions partiellement adaptées, il est possible d'en déduire l'explosion de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ pour les solutions de type Leray des équations micro-polaires obtenues dans le Chapitre 1.

Théorème 6. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible de type Leray des équations micro-polaires* (1)*. Soit* $0 < \mathcal{T} \leq +\infty$ *le temps maximal tel que nous avons le contrôle* $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$*. Si* $\mathcal{T} < +\infty$*, alors*

$$\sup_{0<t<\mathcal{T}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3} = +\infty.$$

Nous avons ainsi obtenu un premier critère d'explosion pour les équations micro-polaires, cependant, étant donné que l'argument utilisé pour montrer ce résultat est par contradiction, ces estimations sont purement qualitatives. Afin d'obtenir une meilleure compréhension du comportement de la solution en ces points, nous déduirons un effet de concentration de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ autour d'un possible point partiellement singulier $(\mathcal{T}, 0)$ lorsque $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$.

Théorème 7. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible de type Leray des équations micro-polaires* (1) *avec* $0 < \mathcal{T} < +\infty$ *le temps maximal tel que nous avons le contrôle* $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$*. Supposons en plus que le point* $(\mathcal{T}, 0)$ *soit un point partiellement singulier et le temps* $\mathcal{T}$ *satisfasse la condition suivante : pour* $r_0 > 0$ *tel que* $0 < \mathcal{T} - r_0^2$*, on a*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{r \in]0, r_0]} \sup_{t \in]\mathcal{T} - r^2, \mathcal{T}]} \frac{1}{r} \int_{B_{x_0,r}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx = \mathfrak{M} < +\infty. \tag{4}$$

Il existe alors $\epsilon > 0$*,* $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) > 0$ *et* $0 < \delta < \mathcal{T}$ *de sorte que pour tout* $t \in]\mathcal{T} - \delta, \mathcal{T}[$*, nous avons*

$$\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^3 dx \geq \epsilon. \tag{5}$$

Nous pouvons constater le phénomène de concentration de la norme L^3_x du champ de vitesse $\vec{u}$ lorsque t tend vers $\mathcal{T}$. Il est important de préciser que notre étude se concentre sur la variable $\vec{u}$, et donc l'étude de la relation de la variable $\vec{\omega}$ et des points partiellement singuliers reste encore un axe de recherche possible.

Remarquons qu'en particulier, nous devons imposer le contrôle (4) au temps $\mathcal{T}$ qui est connu dans la littérature sous le nom d'explosion de type I et il est lié au taux de croissance de la solution proche d'un moment d'explosion. Plus de détails autour de ce sujet seront discutés dans le Chapitre 3.

Les résultat du Chapitre 3 ont été soumis pour publication et sont disponibles sur [20].

B) Les équations micro-polaires : cas stationnaire

Enfin, dans le Chapitre 4, nous allons étudier le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ -\Delta \vec{\omega} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - \mathfrak{m}\vec{\omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{u} + \vec{g}, \end{cases} \tag{6}$$

où $\mathfrak{m} \gg 1$ est une constante dont le rôle est essentiellement technique. Nous allons tout d'abord montrer l'existence de solutions faibles $(\vec{u}, \vec{\omega}) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ et nous allons étudier leurs propriétés. En effet, nous avons le théorème suivant :

Théorème 8. *Soient $\vec{f}, \vec{g} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{-2}(\mathbb{R}^3)$ deux forces externes avec $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$ mais $\operatorname{div}(\vec{g}) \neq 0$. Alors il existe au moins une solution faible $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ des équations micro-polaires stationnaires (6) telle que $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, $\vec{\omega} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $p \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.*

Afin d'obtenir l'existence de solutions nous passons par un argument de compacité en prenant une limite faible, ce qui ne nous permet pas de conclure directement des résultats d'unicité ou régularité. Cependant, nous mettrons en lumière l'influence d'une variable sur l'autre, ce qui, en particulier, nous permettra de montrer que ces solutions sont régulières.

Théorème 9. *Supposons pour plus de simplicité que $\vec{f} = \vec{g} = 0$. Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution des équations micro-polaires stationnaires (6) obtenue dans le Théorème ci-dessus. Alors les fonctions $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$ sont régulières.*

La preuve de ce résultat est faite par un processus itératif. Nous commençons par une étude de la vitesse $\vec{u}$, mais comme il s'agit d'un système couplé, à un moment donné, la régularité de cette variable va dépendre de l'information que nous avons sur $\vec{\omega}$. Il est important de remarquer que comme $\vec{\omega}$ n'est pas à divergence nulle, l'étude de la deuxième équation de (6) nécessitera un traitement différent.

D'autre part, si nous parlons de l'unicité des solutions, observons que dans le cas où $\vec{f} = \vec{g} = 0$, il est facile de voir que $\vec{u} = 0$, $p = 0$ et $\vec{\omega} = 0$ est une solution du système (6). Mais cette solution triviale n'est pas unique. En effet, si nous définissons la fonction $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2$ et si nous remplaçons les fonctions $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$ par les expressions suivantes

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -2x_3), \quad p(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}|\vec{u}(x_1, x_2, x_3)|^2 \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = 0,$$

alors il est possible de vérifier que le vecteur $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ donné par les expressions ci-dessus, satisfait au sens faible le système (6). Cependant, nous avons $(\vec{u}, \vec{\omega}) \notin \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$.

De plus, il est important de souligner que l'information $(\vec{u}, \vec{\omega}) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ n'est pas suffisante pour déduire l'unicité de la solution triviale $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$, et donc pour surmonter cette limitation et inspirés de la théorie des équations de Navier-Stokes stationnaires [40], [49], [61] et [92], on peut voir que si nous imposons une décroissance plus forte à l'infini, nous pouvons obtenir l'unicité de la solution triviale. En particulier, dans le cadre des équations de Navier-Stokes stationnaires, observons que la condition $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$ est suffisante pour en déduire l'unicité de la solution. Remarquons que la borne supérieure $q \leq \frac{9}{2}$ semble être la meilleure disponible à ce jour, et le cas $\frac{9}{2} < q < 6$ est un problème complètement ouvert. Pour plus de détails à ce sujet, nous nous référons à [49], [61] ou [92].

Pour le cas des équations micro-polaires, nous pouvons mentionner l'article [54], où il a été montré que si $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < p < \frac{9}{2}$ alors nous pouvons déduire que $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$. Observons cependant que, dans le cadre des solutions construites dans le Théorème 4, nous avons $(\vec{u}, \vec{\omega}) \in \dot{H}^1 \times H^1$ et en particulier, nous avons $\vec{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ et donc par un argument d'interpolation il s'ensuit que $\vec{\omega} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $2 \leq q \leq 6$. Comme cette information est suffisante pour traiter le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}$, nous devons imposer des conditions supplémentaires uniquement à la vitesse. Dans ce sens, notre dernier résultat est le suivant.

Théorème 10. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution des équations du fluide micro-polaire* (6) *avec $\vec{f} = \vec{g} = 0$. Supposons en plus que $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, $\vec{\omega} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Si nous avons également la condition $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, alors $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$.*

Notons enfin qu'aucune condition supplémentaire n'est demandée pour $\vec{\omega}$, qui par construction possède déjà une décroissance plus forte que $\vec{u}$. Cette étude séparée des variables est, à notre connaissance, nouvelle pour ce type de problème (6).

* * *

Liste des contributions rassemblées dans la thèse

- D. Chamorro et D. Llerena. “Partial Regularity and L^3-Norm Concentration Effects around Possible Blow-up Points for the Micropolar Fluid Equations”. 2024. URL : `https://hal.science/hal-04600217`
- D. Chamorro et D. Llerena. “Partial Suitable Solutions for the Micropolar Equations and Regularity Properties”. *Ann. Math. Blaise Pascal* (2023)
- D. Chamorro et D. Llerena. “A Crypto-Regularity Result for the Micropolar Fluids Equations”. *J. Math. Anal. Appl.* 520 (2) : 28 (2023)
- D. Chamorro, D. Llerena et G. Vergara-Hermosilla. “Some Remarks about the Stationary Micropolar Fluid Equations : Existence, Regularity and Uniqueness”. *J. Math. Anal. Appl.* 536 (2) : 128201 (2024)
- D. Chamorro et D. Llerena. “Interior ϵ-Regularity Theory for the Solutions of the Magneto-Micropolar Equations with a Perturbation Term”. *J. Elliptic Parabol. Equ.* 8 (1) : 555-616 (2022)

1 Les équations des fluides micro-polaires

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord une rapide déduction physique des équations des fluides micro-polaires, puis nous donnerons une démonstration de l'existence de solutions faibles de type Leray pour ce système. Ces équations, initialement formulées par Eringen dans son ouvrage [33] serviront de modèle pour le développement des principales théories de cette thèse.

Notons pour commencer que les fluides micro-polaires sont généralement définis comme des fluides visqueux présentant des micro-structures. La présence de cette caractéristique a un impact assez marqué sur la dynamique des fluides reflétant un comportement non Newtonien et donc ils se situent en dehors du spectre des fluides généralement décrits par les équations de Navier-Stokes classiques. Des exemples de fluides micro-polaires sont le sang animal, les suspensions de particules de polymères dans l'eau et les cristaux liquides, pour n'en nommer que quelques-uns.

Malgré la complexité inhérente aux fluides micro-polaires, divers efforts ont été déployés pour élaborer des modèles capables de saisir les propriétés intrinsèques de ces fluides. Comme en témoigne le livre [69], on trouve des théories telles que celles des micro-fluides, des fluides déformables, des fluides dipolaires, entre autres. Dans ce large éventail de modèles, nous avons en particulier le système micro-polaire proposé par Eringen :

$$\begin{cases} \rho\partial_t\vec{u} = (\upsilon + \frac{\nu}{2})\Delta\vec{u} - \vec{\nabla}p - \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \nu\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \rho\partial_t\vec{\omega} = (\beta+\gamma)\Delta\vec{\omega} + (\alpha + \frac{\beta}{3} - \gamma)\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \nu\vec{\omega} + \nu\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \vec{g}, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

où $\vec{u}$ représente la vitesse du fluide, p la pression associée, $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de la micro-structure ou la vitesse de micro-rotation, et ρ la densité du fluide. Les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \upsilon$ représentent les constantes de viscosité liées à la nature du fluide et $\vec{f}$, $\vec{g}$ sont des forces extérieures. Il est important de souligner que dans le système ci-dessus, nous considérons des fluides micro-polaires incompressibles, homogènes et anisotropes tels que leurs micro-structures sont présentes partout avec une rotation indépendante de celle du fluide et qui ne peuvent pas se déformer.

L'importance de ce modèle, comme souligné dans [69], réside dans le fait qu'il constitue une généralisation des équations de Navier-Stokes, prenant en compte le couplage entre la rotation de chaque particule et le champ de vitesse et tout cela introduit une nouvelle variable cinématique, une nouvelle loi de conservation et certaines considérations supplémentaires au moment de décrire les tenseurs de contraintes. De plus, il est intéressant de remarquer que c'est précisément ce modèle (1.0.1) qui attire l'attention des chercheurs, tant du point de vue physique que du point de vue mathématique.

En effet, du point de vue physique, ce modèle permet d'obtenir de meilleures approximations dans le cadre des simulations numériques, offrant une représentation plus fidèle de la véritable nature des fluides. Cela se manifeste, par exemple, dans la modélisation du flux sanguin [9], [76], des cristaux liquides [43], [65] ainsi que des flux granulaires [77].

Du point de vue mathématique, compte tenu de la structure de ce système, nous pouvons envisager d'y appliquer certaines théories précédemment établies pour les équations de Navier-Stokes. En effet, nous pouvons citer l'article [41], qui a été le premier à réaliser une étude théorique de ces équations. Il y a été annoncé que les théories d'existence de solutions faibles et fortes des équations de Navier-Stokes peuvent être adaptées pour le système micro-polaire si l'on considère un comportement symétrique pour les deux variables. Ceci peut être observé également dans les articles [70] et [72] où l'existence et l'unicité pour le problème de Dirichlet à conditions nulles a été démontré sur des ensembles bornés à frontière lisse. La relative simplicité du modèle des fluides micro-polaires (1.0.1) par rapport à d'autres modèles ne sous-entend bien évidemment pas une trivialité mathématique, comme nous pourrons le voir dans les pages et chapitres qui suivent.

1.1. Rapide déduction physique des équations micro-polaires

Nous allons rappeler ici certaines définitions physiques et des résultats bien connus de la mécanique des fluides que nous allons ensuite appliquer aux fluides micro-polaires. Rappelons que tout au long de cette thèse, nous considérons des fluides micro-polaires incompressibles, homogènes et anisotropes.

Cette première section est surtout utile pour se convaincre très rapidement de la pertinence du modèle (1.0.1). En effet, il est nécessaire de présenter, ne serait-ce que brièvement les idées sous-jacentes qui permettent l'obtention de ces équations micro-polaires. Pour plus de détails le lecteur peut consulter [33] et [69].

1.1.1. Des propriétés des fluides : cinématique et dynamique

Nous nous intéressons ici à la modélisation des variables hydrodynamiques telles que la densité ρ, la vitesse $\vec{u}$ et la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, ce qui va nous permettre de déduire le système (1.0.1). À cet égard, il est bien connu que pour fournir une description du mouvement des fluides, nous avons deux points de vue : le Lagrangien et l'Eulérien. En ce qui concerne le point de vue Lagrangien, il s'agit d'une étude trajectorielle des particules du fluide. Si l'on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ comme la position d'une particule du fluide au temps $t = 0$, nous définissons $X_{x_0}(t)$ comme la position de la particule au temps t. Ainsi, la quantité physique de la forme $q(t, X_{x_0})$ représente la valeur de cette variable au temps t pour une particule ayant comme position initiale x_0. Notons, en particulier, que si $\vec{u}$ est la vitesse de ces particules, nous avons $\dfrac{\mathrm{d}X_{x_0}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{u}(t, X_{x_0}(t))$.

En ce qui concerne le cadre Eulérien, si l'on fixe un point de référence (t_0, x_0), les quantités physiques sont déterminées par leur valeur au temps t et en un point x dans le repère fixe associé au point (t_0, x_0).

En utilisant le lien entre ces deux approches, nous pouvons définir la dérivée matérielle d'une quantité physique q, par $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}q(t, X(t, x_0)) = \dfrac{\partial q}{\partial t}(t, X) + \vec{u}(t, X) \cdot \vec{\nabla} q(t, X)$, où $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}$ représente la dérivée par rapport aux coordonnées Lagrangiennes. De plus, pour modéliser une certaine quantité physique

$q(t,x)$ dépendant du temps $t \in [0,+\infty[$ et de la position x_0, nous étudierons les moyennes prises sur un volume de contrôle Ω qui contient le point x_0, *i.e.*, $Q(t) = \displaystyle\int_\Omega q(t,y)dy$.

Cinématique

Si la quantité physique Q correspond à une moyenne, on s'intéresse maintenant à l'évolution dans le temps de celle-ci. De cette façon, si l'on prend en considération un volume Ω_0 à un certain temps t_0 rempli par le fluide, notre intérêt se porte sur l'ensemble $\Omega(t) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = X_x(t), \text{ avec } x \in \Omega_0\}$, donné par l'écoulement du fluide. Donc, pour étudier l'évolution de ces quantités moyennées, nous devons évoquer quelques résultats usuels de la mécanique des milieux continus.

Proposition 1.1.1 (Formule de convection)**.** *Soient* $\Omega(t)$ *un volume de contrôle arbitraire et* $q(t,x) : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction décrivant une variable hydrodynamique. Alors, nous avons*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} q(t,x)dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}q(t,x) + q(t,x)\,\mathrm{div}(\vec{u})(t,x)dx. \tag{1.1.1}$$

Remarquons qu'en utilisant cette proposition, on pourra facilement déduire l'équation de continuité. En effet, par la loi de conservation de la masse, nous savons que pour un volume de contrôle $\Omega(t)$ donné, la masse ne change pas lorsque $\Omega(t)$ se déplace avec le fluide et donc nous avons $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \rho(t,x)dx = 0$, où ρ est la densité du fluide. Ainsi d'après la formule de convection donnée par la Proposition 1.1.1, et comme le volume de contrôle est arbitraire, il en résulte

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\rho + \rho\,\mathrm{div}(\vec{u}) = 0. \tag{1.1.2}$$

De plus, comme le fluide est incompressible, la densité reste constante dans les parcelles de fluide, et donc $\displaystyle\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\rho = 0$, ce qui induit que la divergence du champ de vitesse doit être nulle *i.e.,* $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$.

De plus, par lhomogénéité du fluide, la densité est indépendante de la position, et donc en utilisant (1.1.2) et la définition de dérivée matérielle, il est possible d'obtenir que la densité ρ est constante en variables de temps et d'espace. En particulier, nous supposerons que $\rho = 1$.

Dynamique

Rappelons que la quantité de mouvement d'une parcelle de fluide est donnée par

$$M(t) = \int_{\Omega(t)} \vec{u}(t,x)dx.$$

Par la deuxième loi de Newton, la variation de cette quantité dans le temps doit être égale à la somme des forces externes et internes. On peut considérer sans trop de problèmes une force extérieure de densité $\vec{f}$. D'un autre côté, les forces internes qui décrivent les forces que les particules élémentaires d'un milieu exercent les unes sur les autres, sont notées $\vec{\mathfrak{t}}$. Alors, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)} \vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \vec{f}dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{\mathfrak{t}}dS,$$

ce qui implique, par la formule de convection (1.1.1) (car $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$),

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \vec{f}dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{\mathfrak{t}}dS.$$

Il est important de souligner que le vecteur $\vec{\mathfrak{t}}$ peut être écrit comme une fonction linéaire de la normale extérieure $\vec{\mathbf{n}}$, c'est-à-dire

$$\vec{\mathfrak{t}}(t,x,\vec{\mathbf{n}}) = \mathbb{T}(t,x)\cdot\vec{\mathbf{n}},$$

où $\mathbb{T}$ est le tenseur des contraintes, voir par exemple le livre [28] pour plus de détails à ce sujet. Ainsi, par le théorème de la divergence, nous avons donc

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\vec{u}dx = \int_{\Omega(t)} \vec{f}dx + \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}(\mathbb{T})dx, \tag{1.1.3}$$

et en utilisant la définition de la dérivée matérielle, nous pouvons en déduire que si $\vec{u}$ est un fluide incompressible alors

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(t,x) + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}(t,x)\right) = \vec{f} + \mathrm{div}(\mathbb{T}). \tag{1.1.4}$$

Observons que si l'on considère le tenseur $\mathbb{T}$ tel que $\mathrm{div}(\mathbb{T}) = \vec{\nabla}p - \upsilon\Delta\vec{u}$, nous obtenons les équations de Navier-Stokes classiques. Néanmoins, comme nous travaillons avec des fluides micro-polaires, leur structure engendre de nouvelles forces internes, ce qui implique un changement dans la nature du tenseur $\mathbb{T}$.

C'est précisément dans la théorie des fluides micro-polaires d'Eringen que les contraintes de viscosité et les effets résultant de la micro-rotation du fluide sont simultanément pris en compte, notamment lors de l'étude du moment angulaire total W. En effet, sur un volume de contrôle $\Omega(t)$ donné, nous avons

$$W(t) = \int_{\Omega(t)} (\vec{\omega} + x\wedge\vec{u})dx,$$

où nous avons une nouvelle quantité $\vec{\omega}$ qui représente le moment micro-rotationnel et $(x\wedge\vec{u})$ représente le moment angulaire externe. Ainsi, par la loi de conservation du moment angulaire, (définie par exemple dans la formule (5.11.4) du livre [4]), on a l'identité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\Omega(t)} (\vec{\omega} + x\wedge\vec{u})dx = \int_{\Omega(t)} (\vec{g} + x\wedge\vec{f})dx + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{\mathfrak{c}} + x\wedge\vec{\mathfrak{t}}dS, \tag{1.1.5}$$

où nous avons des forces externes $\vec{g}$ et $\vec{f}$, qui sont censées être connues et les contraintes de viscosité $\vec{\mathfrak{t}}$ et $\vec{\mathfrak{c}}$ qui peuvent également s'écrire comme $\vec{\mathfrak{t}} = \mathbb{T}\cdot\vec{\mathbf{n}}$ et $\vec{\mathfrak{c}} = \mathbb{C}\cdot\vec{\mathbf{n}}$, où $(\mathbb{T},\mathbb{C})$ sont les tenseurs de contraintes. Observons que le tenseur $\mathbb{T}$ et la force $\vec{f}$ sont les mêmes que ceux obtenus dans (1.1.3).

Nous cherchons maintenant à étudier plus en détail l'expression des tenseurs $(\mathbb{T},\mathbb{C})$ donnés ci-dessus afin d'obtenir le système (1.0.1). Pour cela nous allons suivre l'approche donnée dans le premier chapitre de la thèse [84]. Tout d'abord nous introduisons certaines notations et identités vectorielles utiles. Remarquons que l'on utilise ci-dessous, la convention de sommation d'Einstein.

Définition 1.1.1. *Soient $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ et $A\in\mathcal{A}(3)$, où $\mathcal{A}(3)$ représente l'espace des matrices antisymétriques de dimension 3. Nous définissons les fonctions linéaires* $\mathrm{ten}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathcal{A}(3)$ *et* $\mathrm{vec}:\mathcal{A}(3)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *par*

$$\mathrm{ten}(\vec{a})_{ij} := \epsilon_{ilj}v_l \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{vec}(A)_k := \frac{1}{2}\epsilon_{ikj}A_{ij},$$

où

$$\epsilon_{ikj} = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad ikj = 123, 231, 312, \\ 0 & \textit{si non}, \\ -1 & \textit{si} \quad ikj = 321, 213, 132. \end{cases}$$

Observons que $\mathrm{ten} \circ \mathrm{vec} = \mathbb{I}_{\mathcal{A}(3)}$ et $\mathrm{vec} \circ \mathrm{ten} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3}$. En plus, nous avons les identités suivantes :

$$x \wedge (\mathbb{T} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = (x \wedge \mathbb{T}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \tag{1.1.6}$$

$$\mathrm{div}(x \wedge \mathbb{T}) = x \wedge (\mathrm{div}(\mathbb{T})) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T}). \tag{1.1.7}$$

En effet, observons que

$$x \wedge (\mathbb{T} \cdot \vec{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} (x_2\mathbb{T}_{3j} - x_3\mathbb{T}_{2j})n_j \\ (x_3\mathbb{T}_{1j} - x_1\mathbb{T}_{3j})n_j \\ (x_1\mathbb{T}_{2j} - x_2\mathbb{T}_{1j})n_j \end{pmatrix} = (x \wedge \mathbb{T}) \cdot \vec{\mathbf{n}},$$

où le tenseur $(x \wedge \mathbb{T})$ est défini par $(x \wedge \mathbb{T})_{ij} = \epsilon_{lik} x_k \mathbb{T}_{lj}$. En prenant la divergence du tenseur $x \wedge \mathbb{T}$ ci-dessus et en utilisant la Définition 1.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(x \wedge \mathbb{T})_i &= \frac{\partial}{\partial_j}\left(\epsilon_{lik} x_k \mathbb{T}_{lj}\right) \\ &= (x \wedge \mathrm{div}(\mathbb{T})_i) + (\epsilon_{lij}\mathbb{T}_{lj}) = (x \wedge \mathrm{div}(\mathbb{T})_i) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T})_i. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de convection dans l'identité (1.1.5) et comme $\vec{\mathfrak{t}} = \mathbb{T} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, $\vec{\mathfrak{c}} = \mathbb{C} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, nous avons par le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}(\vec{\omega} + x \wedge \vec{u})dx &= \int_{\Omega(t)} (\vec{g} + x \wedge \vec{f})dx + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbb{C} \cdot \vec{\mathbf{n}} + x \wedge (\mathbb{T} \cdot \vec{\mathbf{n}})dx \\ &= \int_{\Omega(t)} (\vec{g} + x \wedge \vec{f})dx + \int_{\Omega(t)} \mathrm{div}(\mathbb{C}) + \mathrm{div}(x \wedge \mathbb{T})dx \\ &= \int_{\Omega(t)} (\vec{g} + x \wedge \vec{f}) + \mathrm{div}(\mathbb{C}) + x \wedge \mathrm{div}(\mathbb{T}) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T})dx, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

où nous avons utilisé aussi les identités (1.1.6) et (1.1.7). On remarque maintenant que par (1.1.3), et le fait que $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}(x \wedge \vec{u}) = x \wedge \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\vec{u}$, le moment angulaire extérieur vérifie aussi la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\Omega(t)} (x \wedge \vec{u})dx = \int_{\Omega(t)} (x \wedge \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\vec{u})dx = \int_{\Omega(t)} x \wedge \vec{f}dx + \int_{\Omega(t)} x \wedge \mathrm{div}(\mathbb{T})dx.$$

Alors, d'après (1.1.8) et l'identité précédente, nous pouvons en déduire que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_{\Omega(t)} \vec{\omega}dx = \int_{\Omega(t)} \vec{g} + \mathrm{div}(\mathbb{C}) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T})dx,$$

et par conséquent en utilisant la formule de convection et comme $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$, nous avons

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\,t}\vec{\omega} = \vec{g} + \mathrm{div}(\mathbb{C}) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T}).$$

Enfin, en utilisant la définition de la dérivée matérielle, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \vec{g} + \mathrm{div}(\mathbb{C}) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T}). \tag{1.1.9}$$

Ainsi, avec l'équation (1.1.4), l'expression ci-dessus et comme le fluide considéré est incompressible, nous arrivons au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \vec{f} + \mathrm{div}(\mathbb{T}), \quad \mathrm{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \vec{g} + \mathrm{div}(\mathbb{C}) + 2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T}). \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Nous dirons alors que ce système est gouverné par les tenseurs $(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ et pour les décrire nous considérons dans la section qui suit des fluides très particuliers.

1.1.2. Les fluides micro-polaires

Nous aurons besoin des concepts suivants :

Définition 1.1.2. *Soit $\vec{b}$ un champ de vecteurs. On définit les opérateurs $\mathbb{D}\vec{b} = (\vec{\nabla} \otimes \vec{b} + (\vec{\nabla}\otimes)^T\vec{b})$ et $\mathbb{D}^0\vec{b} = \mathbb{D}\vec{b} - \frac{2}{3}(\mathrm{div}(\vec{b}))\mathbb{I}_3$, où $\mathbb{I}_3$ est la matrice identité en dimension 3.*

Pour ces opérateurs, nous avons les identités suivantes qui peuvent être vérifiées facilement, voir également [84].

Lemme 1.1.1. *Soit $\vec{b}$ un champ assez régulier. Alors, nous avons les identités suivantes*

1) $\mathrm{div}(\mathbb{D}\vec{b}) = \Delta\vec{b} + \vec{\nabla}(\mathrm{div}(\vec{b})$.
2) $\mathrm{div}(\mathbb{D}^0\vec{b}) = \Delta\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}(\mathrm{div}(\vec{b}))$.
3) $\mathrm{div}(\mathrm{ten}(\vec{b})) = \vec{\nabla} \wedge \vec{b}$.

En suivant les idées données dans [84, Théorème 5.20], qui sont inspirées également du travail d'Eringen [33], d'après la nature des fluides micro-polaires, nous pouvons maintenant supposer qu'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \mu \geq 0$ telles que nous pouvons écrire les tenseurs $(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ de la forme suivante

$$\mathbb{T} = \upsilon\mathbb{D}\vec{u} + \nu\,\mathrm{ten}(\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} - \vec{\omega}) - p\mathbb{I}_3 \quad \text{et} \quad \mathbb{C} = \alpha(\mathrm{div}(\vec{\omega})\mathbb{I}_3) + \beta\mathbb{D}^0\vec{\omega} + \mathrm{ten}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}).$$

Observons maintenant que comme $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$ et en utilisant le Lemme 1.1.1, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbb{T}) &= \mathrm{div}\left(\upsilon\mathbb{D}\vec{u} + \nu\,\mathrm{ten}\left(\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} - \vec{\omega}\right) - p\mathbb{I}_3\right) = \upsilon\Delta\vec{u} - \nu\vec{\nabla} \wedge (\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} - \vec{\omega}) - \vec{\nabla}p \\ &= \left(\upsilon + \frac{\nu}{2}\right)\Delta\vec{u} + \nu\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} - \vec{\nabla}p. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

On notera en particulier que dans (1.1.11) la pression intervient avec le terme $\vec{\nabla}p$. Par les mêmes arguments, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbb{C}) &= \alpha\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) + \beta\Delta\vec{\omega} + \frac{\beta}{3}\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - \gamma\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{3}\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) + \beta\Delta\vec{\omega} - \gamma\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{3} - \gamma\right)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) + (\beta + \gamma)\Delta\vec{\omega}. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Comme $\mathrm{vec}(\mathbb{D}\vec{u}) = \mathrm{vec}(p\mathbb{I}_3) = 0$ et $\mathrm{vec} \circ \mathrm{ten} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^3}$, nous avons

$$2\,\mathrm{vec}(\mathbb{T}) = 2\,\mathrm{vec}\left(\upsilon\mathbb{D}\vec{u} + \nu\,\mathrm{ten}\left(\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} - \vec{\omega}\right) - p\mathbb{I}_3\right) = \nu\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u} - 2\vec{\omega}\right). \tag{1.1.13}$$

Remarquons par contre que dans l'expression précédente la pression n'intervient pas. Enfin, si l'on remplace (1.1.11), (1.1.12) et (1.1.13) dans (1.1.10) nous obtenons les équations des fluides micro-polaires (1.0.1) :

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \left(\upsilon + \frac{\nu}{2}\right)\Delta\vec{u} - \vec{\nabla}p + \nu\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \mathrm{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\beta + \gamma)\Delta\vec{\omega} + (\alpha + \frac{\beta}{3} - \gamma)\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - \nu\vec{\omega} + \nu\vec{\nabla} \wedge \vec{u} + \vec{g}, \end{cases}$$

et ici les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \nu$ et υ correspondent aux constantes de viscosité liées à la nature de chaque fluide. Plus précisément, υ représente la viscosité dynamique, ν est la viscosité de micro-rotation dynamique et les paramètres (α, β, γ) sont connus comme les coefficients de viscosité angulaire.

Ainsi, étant donné que l'on souhaite faire une étude théorique de ces équations, nous supposons désormais que $\upsilon = \frac{3}{4}$, $\alpha + \frac{\beta}{3} - \gamma = 1$, $\beta + \gamma = 1$ et $\nu = \frac{1}{2}$, et donc on obtient le système micro-polaire avec lequel on travaillera dans les prochains chapitres

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}. \end{cases}$$

Indiquons que ce choix des constantes de viscosité (et bien que cela puisse paraître un peu arbitraire) nous amène au système déquations micro-polaires le plus couramment étudié dans la littérature.

Nous concluons cette section avec quelques remarques sur le système ci-dessus :

- Observons que si la vitesse de micro-rotation est nulle $\vec{\omega} = 0$, le système se réduit aux équations des Navier-Stokes pour des fluides avec un écoulement irrotationnel *i.e.,*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{u} = 0, \end{cases}$$

  qui a été étudié dans [8] et [40].
- Par les propriétés de fluides micro-polaires, nous avons en général $\operatorname{div}(\vec{\omega}) \neq 0$, et ceci nous amènera à faire une étude plus détaillée de cette quantité comme nous le verrons plus tard.
- En prenant formellement la divergence de l'équation associée à l'évolution de $\vec{u}$ et étant donné que $\operatorname{div}(\vec{u}) = \operatorname{div}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) = 0$, il s'ensuit que

$$-\Delta p = \operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}).$$

  Ainsi, comme la force extérieure $\vec{f}$ est connue, il est clair que la pression peut être reconstruite uniquement à partir de l'information sur la vitesse $\vec{u}$ et de la force extérieure. Donc on pourra considérer un problème dans lequel les seules variables qui interviennent sont $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$.

1.2. Solutions faibles des équations micro-polaires

Dans cette section, nous allons étudier l'existence des solutions faibles des équations de fluides micro-polaires :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \;\; \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \;\; \vec{\omega}(0,x) = \vec{\omega}_0(x), \;\; x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Remarquons que par simplicité, nous n'avons pas considéré de force extérieure dans la deuxième équation de (1.2.1) *i.e.*, $\vec{g} = 0$. Cependant dans le cas où $\vec{g} \neq 0$, on pourra obtenir l'existence de solutions en ajoutant des conditions *ad hoc* sur ce terme.

Nous dirons ainsi que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution faible du système (1.2.1), si pour tout $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in \mathcal{D}_{t,x}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$ telle que $\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = 0$, nous avons

$$\begin{cases} \langle \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} - \vec{f} | \vec{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0, \\ \langle \partial_t \vec{\omega} - \Delta\vec{\omega} - \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{\omega} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u} | \vec{\psi}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0, \end{cases}$$

où la pression est obtenue à partir de l'équation suivante

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})) - \operatorname{div}(\vec{f}).$$

Plus précisément, nous allons montrer l'existence de solutions faibles globales en temps $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ telles que $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ appartiennent à l'espace naturel d'énergie $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$, c'est-à-dire des solutions faibles de type Leray. Pour cela, nous allons nous inspirer de la stratégie usuelle pour obtenir des solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes. Tout d'abord, nous appliquerons le projecteur de Leray pour nous débarrasser de la pression, puis nous étudierons un problème régularisé afin d'obtenir l'existence de solutions approchées. Remarquons que comme nous avons le terme $\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})$ dans l'équation associée à $\vec{\omega}$, une étude supplémentaire de $\operatorname{div}(\vec{\omega})$ doit être réalisée. Ensuite, nous établirons une inégalité d'énergie qui nous permettra de prolonger le temps d'existence de ces solutions. Enfin, par un argument de compacité, nous pourrons passer à la limite et ainsi obtenir de solutions faibles des équations micro-polaires (1.2.1). Il est important de remarquer que nous allons étudier les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, de façon totalement symétrique mais dès le prochain chapitre nous réaliserons une étude séparée de chacune des variables.

1.2.1. Solutions de type Leray des équations micro-polaires

Voici maintenant le résultat qui concerne l'existence de ce type de solutions.

Théorème 1.2.1. *Soient* $\vec{u}_0, \vec{\omega}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *des données initiales telles que* $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ *et soit* $\vec{f} \in L^2([0,+\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ *une force extérieure. Alors, il existe une solution faible* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *des équations* (1.2.1) *telle que* $\vec{u} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ *et* $\vec{\omega} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, H^1(\mathbb{R}^3))$*. En plus, la paire* $(\vec{u}, \vec{\omega})$ *vérifie l'inégalité d'énergie suivante*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|\vec{\omega}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \quad &+ \int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + 2\|\vec{\omega}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{2}{3}\|\vec{\omega}(s,\cdot)\|^2_{L^2} + 2\|\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)\|^2_{L^2} ds \\ &\le 4\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{-1}} ds + \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \|\vec{\omega}_0\|^2_{L^2}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Remarque 1.2.1. *Observons que grâce au terme d'amortissement* $\vec{\omega}$ *présent dans la deuxième équation de* (1.2.1) *nous sommes en mesure d'obtenir l'information* $\vec{\omega} \in L^2(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$*, ce qui diffère évidemment du cas de la vitesse* $\vec{u}$*.*

Démonstration du Théorème 1.2.1. Nous divisons la démonstration de ce résultat en plusieurs étapes.

- *Étape 1 : un problème sans pression.* Tout d'abord, nous devons nous débarrasser de la pression, ce qui pourra être réalisé à l'aide du projecteur de Leray. Rappelons que cet opérateur est formellement défini par $\mathbb{P}(\vec{\phi}) = \vec{\phi} + \vec{\nabla}\frac{1}{(-\Delta)}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi})$, où $\vec{\phi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs.

  Rappelons brièvement quelques propriétés élémentaires du projecteur de Leray.

1) Si $\vec{\phi}$ est à divergence nulle alors nous avons $\mathbb{P}(\vec{\phi}) = \vec{\phi}$. En particulier, comme pour tout champ de vecteurs $\vec{\Psi}$, nous avons $\text{div}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}) = 0$, il s'ensuit que $\mathbb{P}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi}$.
2) Si $\vec{\phi}$ est un gradient, c'est-à-dire, s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\vec{\phi} = \vec{\nabla} g$, alors $\mathbb{P}(\vec{\phi}) = 0$.

Ainsi, comme $\mathbb{P}(\vec{u}) = \vec{u}$ car $\text{div}(\vec{u}) = 0$ et $\mathbb{P}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$, si l'on applique le projecteur de Leray à la première équation de (1.2.1), alors nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \mathbb{P}(\vec{f}), & (1.2.3) \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla}\, \text{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}, & (1.2.4) \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \;\; \vec{\omega}(0,x) = \vec{\omega}_0(x). \end{cases}$$

De cette manière, afin d'obtenir des solutions faibles du problème (1.2.1), nous pouvons étudier à la place le système ci-dessus.

- *Étape 2 : un point fixe pour un problème régularisé.* Maintenant, nous allons considérer un système régularisé afin d'obtenir des solutions approchées des équations (1.2.3) et (1.2.4). Pour cela, fixons une fonction positive $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, nous définissons la fonction $\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3}\theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, et nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\left(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla}\, \text{div}(\vec{\omega}) - ([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 * \theta_\epsilon(x), \;\; \vec{\omega}_\epsilon(0,x) = \vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon(x). \end{cases}$$

Observons que nous avons régularisé les données initiales, ainsi que le terme non-linéaire dans l'équation (1.2.3) et le terme de transport dans (1.2.4).

Remarquons que, comme nous avons le terme $\vec{\nabla}\, \text{div}(\vec{\omega})$ dans l'équation liée à la dynamique de $\vec{\omega}$, il sera utile de faire une étude supplémentaire du terme $\text{div}(\vec{\omega})$. En effet, observons que, si nous appliquons formellement l'opérateur divergence dans l'équation (1.2.4), nous avons

$$\partial_t\, \text{div}(\vec{\omega}) = 2\Delta\, \text{div}(\vec{\omega}) - \text{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}) - \text{div}(\vec{\omega}).$$

Alors, comme $\text{div}(\vec{\omega})$ vérifie une équation de type parabolique, nous pouvons obtenir une information d'intégrabilité sur ce terme qui nous permettra contrôler de façon plus simple la quantité $\vec{\nabla}\, \text{div}(\vec{\omega})$. Ainsi, si l'on note $\varpi = \text{div}(\vec{\omega})$ avec la donnée initiale $\varpi(0,\cdot) = \text{div}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon)(\cdot)$, nous obtenons alors le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\left(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \mathbb{P}(\vec{f}), & (1.2.5) \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla}\, \text{div}(\vec{\omega}) - ([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}, & (1.2.6) \\ \partial_t \varpi = 2\Delta\varpi - \text{div}([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}) - \varpi, & (1.2.7) \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 * \theta_\epsilon(x), \;\; \vec{\omega}_\epsilon(0,x) = \vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon(x), \;\; \varpi(0,x) = \text{div}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon)(x). \end{cases}$$

L'existence de solutions *mild* du système ci-dessus est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un temps d'existence $T = T(\epsilon) > 0$ tel que le système (1.2.5)-(1.2.7) admet une solution $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon, \varpi_\epsilon)$ avec $\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon \in L^\infty([0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et pour $2 < p < +\infty$, nous avons $\varpi \in L^p([0,T[, L^2(\mathbb{R}^3))$.*

Preuve. Considérons $\vec{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \\ \varpi \end{pmatrix}$. En utilisant la formulation intégrale des équations (1.2.5)-(1.2.7), nous pouvons réécrire $\vec{\mathcal{U}}$ comme suit

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{U}} &= \vec{\mathcal{U}}_0 + L(\vec{\mathcal{U}}) - B(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) \\ &= \begin{pmatrix} \vec{U}_0 \\ \vec{W}_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(\vec{\mathcal{U}}) \\ L_2(\vec{\mathcal{U}}) \\ L_3(\vec{\mathcal{U}}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) \\ B_2(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) \\ B_3(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

où nous avons posé les données initiales

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 &= e^{t\Delta}(\vec{u}_0 * \theta_\epsilon) + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(\vec{f}(s,\cdot))ds \\ \vec{W}_0 &= e^{t\Delta}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon) \\ \Phi_0 &= e^{2t\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon), \end{aligned}$$

des applications linéaires

$$\begin{aligned} L_1(\vec{\mathcal{U}}) &= \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(s,\cdot)ds \\ L_2(\vec{\mathcal{U}}) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot) - \vec{\omega}(s,\cdot) + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(s,\cdot))ds \\ L_3(\vec{\mathcal{U}}) &= -\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds, \end{aligned}$$

et des applications bilinéaires

$$\begin{aligned} B_1(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s,\cdot)ds \\ B_2(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})(\vec{\omega})(s,\cdot)ds \\ B_3(\vec{\mathcal{U}}, \vec{\mathcal{U}}) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\operatorname{div}(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})(\vec{\omega}))(s,\cdot)ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour un temps $T > 0$ qui sera fixé plus tard et pour un certain $2 < p < +\infty$, nous allons appliquer un argument de point fixe à l'expression (1.2.8) dans l'espace

$$E_T = (L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1) \times (L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1) \times (L_t^p L_x^2),$$

qui est muni de la norme suivante :

$$\|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T} = \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} + \|\vec{\omega}\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} + \|\varpi\|_{L_t^p L_x^2}.$$

Rappelons que dans la formulation intégrale (1.2.8), le terme $L(\cdot)$ définit une application linéaire, tandis que le terme $B(\cdot,\cdot)$ est un opérateur bilinéaire et alors, le problème (1.2.8) peut s'étudier avec l'argument de point fixe de Banach-Picard suivant.

Lemme 1.2.1. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Soient $e_0 \in E$ un élément tel que $\|e_0\| \leq \delta$, $L : E \longrightarrow E$ une application linéaire et $B : E \times E \longrightarrow E$ une application bilinéaire telles que l'on ai les estimations*

$$\|L(e)\|_E \leq C_L \|e\|_E \quad \text{et} \quad \|B(e,f)\| \leq C_B \|e\|_E \|f\|_E,$$

pour tout $e, f \in E$ où les constantes de continuité de ces applications vérifient les relations

$$0 < 3C_L < 1, \quad 0 < 9C_B\delta < 1 \quad \text{et} \quad C_L + 6C_B\delta < 1.$$

Alors, l'équation

$$e = e_0 + L(e) - B(e,e),$$

admet une unique solution $v \in E$ qui vérifie $\|e\|_E \leq 3\delta$.

Nous devons alors montrer que l'expression (1.2.8) vérifie les hypothèses du lemme précédent en considérant l'espace E_T.

Commençons d'abord avec la donnée initiale $\vec{\mathcal{U}}_0$ dans (1.2.8). Pour traiter ce terme, nous allons utiliser la proposition suivante qui sera utilisée également pour traiter les applications linéaires et bilinéaires.

Proposition 1.2.2.

1) *Pour tout $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, on a $\|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2}$.*
2) *Si $\vec{f} \in L^2(]0,T[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ alors $\left\| \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(\vec{f}(s,\cdot))ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x}$.*

Pour une preuve du résultat ci-dessus, on se reporte sur [16] ou [61].

Ainsi, par la donnée initiale $\vec{\mathcal{U}}_0$ donnée dans (1.2.8), nous pouvons appliquer la Proposition 1.2.2 et nous avons

$$\begin{aligned}
\|\vec{\mathcal{U}}_0\|_{E_T} &= \|\vec{U}_0\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|\vec{W}_0\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|\Phi_0\|_{L^p_t L^2_x} \\
&\leq C\|\vec{u}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2} + C\|\vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} + C\|\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2} + \|\Phi_0\|_{L^p_t L^2_x} \\
&\leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2} + C\|\vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} + C\|\vec{\omega}_0\|_{L^2} + \|\Phi_0\|_{L^p_t L^2_x}.
\end{aligned}$$

De plus, observons que par l'inégalité de Young, on a

$$\|\Phi_0\|_{L^p_t L^2_x} = \|e^{2t\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon)\|_{L^p_t L^2_x} \leq C(\epsilon)T^{\frac{1}{p}}\|\vec{\omega}_0\|_{L^2}.$$

Alors, nous avons

$$\|\vec{\mathcal{U}}_0\|_{E_T} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2} + C\|\vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} + C\|\vec{\omega}_0\|_{L^2} + C(\epsilon)T^{\frac{1}{p}}\|\vec{\omega}_0\|_{L^2}. \tag{1.2.9}$$

Étudions maintenant l'application linéaire $L(\cdot)$ dans (1.2.8). Pour cela, nous avons besoin de quelques lemmes techniques.

Lemme 1.2.2. *Pour tout $\vec{\omega} \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, nous avons*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C T^{\frac{1}{2}} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}, \tag{1.2.10}$$

et

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C T \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}. \tag{1.2.11}$$

Preuve. Observons que (1.2.10) s'obtient facilement à partir du deuxième point de la Proposition 1.2.2, en effet, nous avons

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C \|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} \leq C \|\vec{\omega}\|_{L^2_t L^2_x} \leq C T^{\frac{1}{2}} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

Montrons maintenant (1.2.11). Pour cela nous allons étudier les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ &\quad + \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Étudions d'abord le premier terme de l'expression ci-dessus. Pour cela, étant donné que $e^{t\Delta}$ est un opérateur de convolution avec le noyau de la chaleur $\mathfrak{g}_t$, en utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^2} \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \|\mathfrak{g}_{t-s}\|_{L^1} \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^2} ds \leq T \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}. \tag{1.2.13}$$

Pour le deuxième terme de (1.2.12), par l'inégalité de Young et les propriétés du noyau de la chaleur, nous avons

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{\dot{H}^1} \leq \int_0^t \|\vec{\nabla} e^{(t-s)\Delta}\|_{L^1} \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^2} ds \leq C t^{\frac{1}{2}} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}. \tag{1.2.14}$$

Ainsi, si l'on prend la norme L^2 dans la variable de temps, nous avons

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C T \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

Alors, par (1.2.13) et avec l'expression ci-dessus, on peut conclure que

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C T \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x},$$

ce qui termine la preuve du Lemme 1.2.2. ■

Nous avons maintenant le résultat suivant qui permet de contrôler le terme $\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega})$.

Lemme 1.2.3. *Pour tout $\vec{\omega} \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, nous avons*

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C T^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \| \operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^p_t L^2_x}.$$

Preuve. Observons que, grâce à la Proposition 1.2.2, nous avons

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} \leq C\|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_{t,x}}.$$

Maintenant, comme $2 < p < +\infty$ nous pouvons appliquer l'inégalité de Hölder dans la variable de temps et nous obtenons

$$\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^p_t L^2_x}.$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■.

Il est important de souligner que c'est dans ce lemme qu'intervient l'information $L^p_t L^2_x$ qui nous permet de contrôler le terme $\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})$. Le dernier résultat technique dont nous avons besoin est le suivant :

Lemme 1.2.4. *Pour tout $\vec{\omega} \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$,*

$$\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds\right\|_{L^p_t L^2_x} \leq CT^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\|\vec{\omega}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}.$$

Preuve. Tout d'abord, observons que

$$\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds\right\|_{L^2} \leq \left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\vec{\omega}(s,\cdot)ds\right\|_{\dot{H}^1}.$$

Ainsi, d'après les mêmes arguments que (1.2.14), nous avons

$$\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds\right\|_{L^2} \leq Ct^{\frac{1}{2}}\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

En prenant la norme L^p dans la variable du temps, nous avons

$$\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds\right\|_{L^p_t L^2_x} \leq CT^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Ainsi, avec les résultats précédents, nous pouvons étudier la continuité de la l'application linéaire $L(\cdot)$ donnée dans (1.2.8). En effet, observons que

$$\|L(\vec{\mathcal{U}})\|_{E_T} = \|L_1(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|L_2(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|L_3(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^p_t L^2_x}.$$

Par le Lemme 1.2.2, il s'ensuit que

$$\|L_1(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} = \left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \leq CT^{\frac{1}{2}}\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq T^{\frac{1}{2}}\|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T},$$

et par les Lemmes 1.2.2 et 1.2.3, on a

$$\begin{aligned}\|L_2(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} &= \left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot) - \vec{\omega}(s,\cdot) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}(s,\cdot))ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} \\ &\leq CT^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^p_t L^2_x} + CT\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x} + CT^{\frac{1}{2}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \\ &\leq C(T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + T + T^{\frac{1}{2}})\|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T}.\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le Lemme 1.2.4, nous avons

$$\|L_3(\vec{\mathcal{U}})\|_{L^p_t L^2_x} = \left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)ds \right\|_{L^p_t L^2_x} \leq CT^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|\vec{\omega}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq CT^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T}.$$

En regroupant les estimation précédentes, on a montré que

$$\|L(\vec{\mathcal{U}})\|_{E_T} \leq C(T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + T + T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}})\|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T}, \tag{1.2.15}$$

et donc l'application linéaire $L(\cdot)$ est continue.

Étudions maintenant l'application $B(\cdot,\cdot)$ dans (1.2.8). Notons d'abord que, comme les applications B_1 et B_2 partagent la même structure et sont liées aux équations de Navier-Stokes, la preuve de leur continuité est assez standard. En particulier, nous avons le lemme suivant dont la preuve peut être trouvée dans [61].

Lemme 1.2.5. *Pour tout $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ telle que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, nous avons $([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon \in L^2_t \dot{H}^{-1}_x$ et en plus il s'ensuit que*

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s,\cdot))ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} &\leq C(\epsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}, \\
\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} ([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}(s,\cdot)ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} &\leq C(\epsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{\omega}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}.
\end{aligned}$$

D'autre part, la continuité de l'application bilinéaire $B_3(\cdot,\cdot)$ est étudié dans le lemme suivant :

Lemme 1.2.6. *Pour tout $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ telle que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, nous avons*

$$\left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \operatorname{div}(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})(\vec{\omega}))(s,\cdot)ds \right\|_{L^p_t L^2_x} \leq C(\epsilon) T^{\frac{1}{p}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.$$

Preuve. Tout d'abord observons que, comme $\operatorname{div}([\vec{u} * \theta_\epsilon]) = 0$, nous pouvons écrire $([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})(\vec{\omega}) = \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{\omega} \otimes [\vec{u} * \theta_\epsilon]))$ et donc par la régularité maximale du noyau de la chaleur (voir [63]), nous avons

$$\left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{\omega} \otimes [\vec{u} * \theta_\epsilon]))ds \right\|_{L^p_t L^2_x} \leq C\|\vec{\omega} \otimes [\vec{u} * \theta_\epsilon]\|_{L^p_t L^2_x}.$$

Donc, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{\omega} \otimes [\vec{u} * \theta_\epsilon]))ds \right\|_{L^p_t L^2_x} &\leq C\|[\vec{u} * \theta_\epsilon]\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \|\vec{\omega}\|_{L^p_t L^2_x} \\
&\leq CT^{\frac{1}{p}} \|[\vec{u} * \theta_\epsilon]\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x}.
\end{aligned}$$

D'autre part, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\|[\vec{u} * \theta_\epsilon](s,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2} \|\theta_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2},$$

et donc

$$\left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{\omega} \otimes [\vec{u} * \theta_\epsilon]))ds \right\|_{L^p_t L^2_x} \leq C(\epsilon) T^{\frac{1}{p}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x},$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Avec ces deux lemmes précédents, nous pouvons déduire la continuité de l'application bilinéaire $B(\cdot,\cdot)$ donnée dans (1.2.8). En effet, nous avons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\|B(\vec{\mathcal{U}},\vec{\mathcal{U}})\|_{E_T} &= \|B_1(\vec{\mathcal{U}},\vec{\mathcal{U}})\|\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|B_2(\vec{\mathcal{U}},\vec{\mathcal{U}})\|_{L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x} + \|B_3(\vec{\mathcal{U}},\vec{\mathcal{U}})\|_{L^p_t L^2_x} \\
&\leq C(\epsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} + C(\epsilon) T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{\omega}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} + C(\epsilon) T^{\frac{1}{p}} \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x} \\
&\leq C(\epsilon)(T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{p}}) \|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T} \|\vec{\mathcal{U}}\|_{E_T}. \qquad (1.2.16)
\end{aligned}$$

Ainsi, les estimations (1.2.9), (1.2.15) et (1.2.16), nous pouvons fermer l'argument de point fixe pour la formulation intégrale (1.2.8). En effet, si l'on pose

$$\delta = C\|\vec{u}_0\|_{L^2} + C\|\vec{f}\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} + C\|\vec{\omega}_0\|_{L^2} + C(\epsilon) T^{\frac{1}{p}} \|\vec{\omega}_0\|_{L^2},$$
$$C_L = C(T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} + T + T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}), \qquad C_B = C(\epsilon)(T^{\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{p}}),$$

et si on fixe un temps $T = T(\epsilon) > 0$ tel que nous avons les relations

$$0 < 3C_L < 1, \quad 0 < 9C_B\delta < 1 \quad et \quad C_L + 6C_B\delta < 1,$$

nous pouvons appliquer le Lemme 1.2.1 à la formulation intégrale (1.2.8) et donc il existe un couple $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon, \varpi_\epsilon)$ qui vérifie au sens mild le système (1.2.5)- (1.2.7) tel que $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon) \in L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et $\varpi_\epsilon \in L^p(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3))$. La preuve de la Proposition 1.2.1 est donc terminée. ■

Il est important de souligner qu'il est possible de montrer que la solution $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon, \varpi_\epsilon)$ est régulière, et cela, comme nous le verrons dans l'étape suivante, nous permettra de réaliser certains calculs pour déduire des estimation uniformes.

- *Étape 3 : des solutions globales en temps pour le système régularisé.* En récapitulant, grâce à la Proposition 1.2.1, nous avons construit une solution $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon, \varpi_\epsilon)$ du système (1.2.5)-(1.2.7) telle que $\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon \in L^\infty([0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, afin d'étendre le temps d'existence de ces solutions, nous devons établir des estimations d'énergie.

Proposition 1.2.3. *Les variables $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon)$ obtenues dans la Proposition 1.2.1 vérifient l'inégalité suivante*

$$\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \int_0^t \|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + 2\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{2}{3}\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2} + 2\|\operatorname{div}(\vec{\omega}_\epsilon)(s,\cdot)\|^2_{L^2} ds$$
$$\leq 4\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{-1}} ds + \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \|\vec{\omega}_0\|^2_{L^2}.$$

Avant de passer à la preuve de ce résultat, remarquons que comme on a $\operatorname{div}(\vec{u}_e) = 0$, nous avons les identités suivantes

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}\Big(([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon\Big) \cdot \vec{u}_\epsilon dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \Big(([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon\Big) \cdot \vec{\omega}_\epsilon dx = 0. \qquad (1.2.17)$$

Preuve de la Proposition 1.2.3. Tout d'abord, nous multiplions par $\vec{u}_\epsilon$ l'équation (1.2.5) et en utilisant une intégration par parties et (1.2.17), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_\epsilon|^2dx &= -\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\epsilon|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon)\cdot\vec{u}_\epsilon dx+\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}(\vec{f})\cdot\vec{u}_\epsilon dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\epsilon|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon)\cdot\vec{u}_\epsilon dx+\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}_\epsilon dx, \qquad (1.2.18)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que le projecteur de Leray est un opérateur auto-adjoint et $\mathbb{P}(\vec{u}_\epsilon)=\vec{u}_\epsilon$. Également, en multipliant par $\vec{\omega}_\epsilon$ l'équation (1.2.6), par une intégration par parties et (1.2.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\epsilon|^2dx &= -\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon|^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}(\vec{\omega}_\epsilon)^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\epsilon|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon|^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{div}(\vec{\omega}_\epsilon)^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}_\epsilon|^2dx\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dx. \qquad (1.2.19)\end{aligned}$$

Alors, en additionnant (1.2.18) et (1.2.19), nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2)+2\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2+2\|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}^2+2\|\mathrm{div}(\vec{\omega}_\epsilon)(t,\cdot)\|_{L^2}^2+2\|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2\\ &=\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon)\cdot\vec{u}_\epsilon dx+\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dx+2\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}_\epsilon dx. \qquad (1.2.20)\end{aligned}$$

Observons que par une intégration par parties, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dx+\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon)\cdot\vec{u}_\epsilon dx=2\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dx,$$

et donc en intégrant par rapport à la variable de temps dans (1.2.20) et en injectant l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}&\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2+2\int_0^t\left(\|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2+\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1_x}^2+\|\mathrm{div}(\vec{\omega}_\epsilon)(s,\cdot)\|_{L^2}^2+\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2\right)ds\\ &=2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dxds+2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}_\epsilon dxds+\|\vec{u}_0*\theta_\epsilon\|_{L^2}^2+\|\vec{\omega}_0*\theta_\epsilon\|_{L^2}^2. \qquad (1.2.21)\end{aligned}$$

Étudions maintenant les deux premiers termes du côté de droite de l'expression ci-dessus. Pour le deuxième, comme $\vec{f}\in L^2_t\dot{H}^{-1}_x$ et par l'inégalité de Young, nous avons

$$2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}_\epsilon dxds\leq 2\|\vec{f}\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}}\|\vec{u}_\epsilon\|_{L^2_t\dot{H}^1_x}\leq 4\|\vec{f}\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x}^2+\frac{1}{4}\|\vec{u}_\epsilon\|_{L^2_t\dot{H}^1_x}^2. \qquad (1.2.22)$$

Pour le premier terme du côté de droite de (1.2.21), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dxds\leq 2\left(\int_0^t\|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que comme $\mathrm{div}(\vec{u}_\epsilon)=0$, nous avons $\|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}=\|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}$ (voir le livre [85, Théorème 12.3]) et donc par l'inégalité de Young, on obtient

$$2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}_\epsilon)\cdot\vec{\omega}_\epsilon dxds\leq\frac{3}{4}\int_0^t\|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2ds+\frac{4}{3}\int_0^t\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2ds.$$

Ainsi, comme $\|\vec{u}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2$, $\|\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{\omega}_0\|_{L^2}^2$ et en injectant l'expression précédente et la formule (1.2.22) dans (1.2.21), on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad &+ \quad 2\int_0^t \|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div}(\vec{\omega}_\epsilon)(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq \quad \int_0^t \|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds + \frac{4}{3}\int_0^t \|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds + 4\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \\ &\qquad + \|\vec{u}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

En regroupant les termes ci-dessus, on obtient la relation recherchée

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \frac{2}{3}\|\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\|\operatorname{div}(\vec{\omega}_\epsilon)(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \\ \leq 4\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds + \|\vec{u}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon\|_{L^2}^2, \\ \leq 4\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_0\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

et nous avons fini ainsi la preuve de la Proposition 1.2.3. ■

Maintenant, afin d'étendre le temps d'existence de la solution $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon, \varpi_\epsilon)$, observons que grâce à (1.2.23), nous avons obtenu un contrôle uniforme de la norme $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ des variables $\vec{u}_\epsilon$ et $\vec{\omega}_\epsilon$ en fonction des données initiales et de la force extérieure. Cependant, ceci n'est pas assez pour étendre le temps d'existence, car nous aurons besoin d'un contrôle similaire pour ϖ_ϵ. Pour cela, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.2.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, la variable ϖ_ϵ obtenue dans la Proposition 1.2.1 vérifie l'inégalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned}\|\varpi_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\varpi_\epsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \quad &\leq \quad C(\epsilon)\left(\int_0^t \|\vec{f}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_0\|_{L^2}^2\right)^2 \\ &\qquad + C(\epsilon)\|\vec{\omega}_0\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Preuve. Tout d'abord, rappelons que la variable ϖ_ϵ vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases}\partial_t \varpi_\epsilon = 2\Delta\varpi_\epsilon - \operatorname{div}([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon) - \varpi_\epsilon \\ \varpi_\epsilon(0,x) = \operatorname{div}(\vec{\omega}_0 * \theta_\epsilon)(x),\end{cases}$$

Ainsi, en multipliant par ϖ_ϵ et par une intégration par parties, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} |\varpi_\epsilon|^2(t,x)dx + 2\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\varpi_\epsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\varpi_\epsilon|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon)\varpi_\epsilon dx. \tag{1.2.24}$$

Une nouvelle fois, par une intégration par parties et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon)\varpi_\epsilon dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\varpi_\epsilon dx \\ &\leq \quad \|\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^\infty}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon(s,\cdot)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Ensuite d'après l'inégalité de Young, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^3}\operatorname{div}([\vec{u}_\epsilon*\theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon)\varpi_\epsilon dx &\leq \frac{1}{2}\|\vec{u}_\epsilon*\theta_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^\infty}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}\\ &\leq C(\epsilon)\|\vec{u}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}+\frac{1}{2}\|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Alors, si l'on intègre (1.2.24) par rapport à la variable de temps et en injectant l'estimation précédente, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|\varpi_\epsilon|^2(t,x)dx+4\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon|^2dxds &\leq C(\epsilon)\int_0^t\|\vec{u}_\epsilon\|^2_{L^2}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}_\epsilon\|^2_{L^2}ds+\|\operatorname{div}(\vec{\omega}_0*\theta_\epsilon)\|^2_{L^2}\\ &\leq C(\epsilon)\|\vec{u}_\epsilon\|^2_{L^\infty_tL^2_x}\|\vec{\omega}_\epsilon\|^2_{L^2_t\dot{H}^1_x}+\|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon\|^2_{L^2_tL^2_x}+\|\operatorname{div}(\vec{\omega}_0*\theta_\epsilon)\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Enfin, par (1.2.23), nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|\varpi_\epsilon|^2(t,x)dx+3\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\varpi_\epsilon|^2dxds &\leq C(\epsilon)\left(\int_0^t\|\vec{f}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{-1}}ds+\|\vec{u}_0\|^2_{L^2}+\|\vec{\omega}_0\|^2_{L^2}\right)^2\\ &\quad +C(\epsilon)\|\vec{\omega}_0\|^2_{L^2}, \qquad (1.2.25)\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Ainsi, même si l'estimation (1.2.25) n'est pas uniforme par rapport à ϵ, nous avons un contrôle de l'information $L^\infty_tL^2_x$ de ϖ_ϵ par rapport aux données initiales (rappelons que ϵ est fixe), ce qui, ensemble avec l'inégalité d'énergie (1.2.23), nous permet d'étendre de façon globale le temps d'existence des solutions $(\vec{u}_\epsilon,\vec{\omega}_\epsilon,\varpi_\epsilon)$ obtenues dans la Proposition 1.2.1.

Remarque 1.2.2. *Notons que pour obtenir l'existence de solutions approchées globales en temps des équations* (1.2.5)-(1.2.6)*, l'un des points clés a consisté en une étude détaillée du comportement de la quantité* $\operatorname{div}(\vec{\omega})$ *en ajoutant l'équation* (1.2.7)*. Bien que cela ne soit pas explicitement écrit dans l'énoncé du résultat, l'information obtenue sur ce terme nous permet d'obtenir des estimations utiles. Évidemment, il existe d'autres techniques permettant d'obtenir ces résultats. En effet, dans [69], nous voyons que, puisque l'équation* (1.2.6) *est linéaire et que nous avons les estimations a priori* (1.2.25)*, il est possible d'en déduire l'existence des solutions approchées en utilisant des arguments classiques des équations paraboliques. Ceci a également été remarqué dans [41].*
Cependant, il est important de souligner que l'idée de l'étude de $\operatorname{div}(\vec{\omega})$ *sera récurrente tout au long de cette thèse, notamment dans l'étude de la régularité locale dans le chapitre suivant et même pour l'étude de la régularité et de l'unicité des solutions dans le cas stationnaire, comme nous le verrons dans le Chapitre 4.*

- *Étape 4 : passage à la limite* : Maintenant, nous allons montrer brièvement que la famille $(\vec{u}_\epsilon,\vec{\omega}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge vers la solution $(\vec{u},\vec{\omega})$ du système (1.2.3) et (1.2.4) quand $\epsilon\to 0$.

Observons que par la Proposition 1.2.3, il s'ensuit que la famille $(\vec{u}_\epsilon,\vec{\omega}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans l'espace $L^\infty([0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et donc, par le Théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(\vec{u}_{\epsilon_k},\vec{\omega}_{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$, telle que

$$(\vec{u}_{\epsilon_k},\vec{\omega}_{\epsilon_k})\xrightarrow[k\to+\infty]{*}(\vec{u},\vec{\omega})\in L^\infty([0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)). \qquad (1.2.26)$$

La famille $(\vec{\omega}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ étant bornée dans $L^2(]0,+\infty[L^2(\mathbb{R}^3))$, nous avons par les mêmes arguments

$$\vec{\omega}_{\epsilon_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{*} \vec{\omega} \in L^2(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)). \tag{1.2.27}$$

Rappelons que ces convergences ne sont pas suffisantes pour en déduire que $(\vec{u},\vec{\omega})$ satisfait les équations (1.2.3) et (1.2.4) à cause de la présence des termes non linéaires $\mathbb{P}((\vec{u}_\epsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon)$ et $(\vec{u}_\epsilon\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}_\epsilon$.

Pour surmonter cette limitation, nous avons besoin d'une convergence plus forte pour $\vec{u}_\epsilon$, ce qui peut être obtenu en utilisant le lemme de Rellich-Lions (voir [61, Théorème 12.1]). Donc, nous devons vérifier que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I\times\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\sup_{\epsilon>0} \|\varphi\vec{u}_\epsilon\|_{L^2(]0,+\infty[,H^1(\mathbb{R}^3))} \quad < \quad +\infty, \tag{1.2.28}$$

$$\sup_{\epsilon>0} \|\varphi\partial_t\vec{u}_\epsilon\|_{L^2(]0,+\infty[,H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))} \quad < \quad +\infty. \tag{1.2.29}$$

Comme $(\vec{u}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans l'espace $L^\infty([0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, nous obtenons immédiatement (1.2.28). Maintenant, pour en déduire (1.2.29), rappelons que comme $\vec{u}_\epsilon$ vérifie l'équation (1.2.5), nous avons

$$\partial_t\vec{u}_\epsilon = \Delta\vec{u}_\epsilon - \mathbb{P}\left(([\vec{u}_\epsilon * \theta_\epsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\epsilon\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon + \mathbb{P}(\vec{f}).$$

Alors, nous devons étudier chaque terme de l'expression ci-dessus. Observons que le premier, deuxième et quatrième termes sont déjà connus par la théorie classique des équations de Navier-Stokes. Ainsi, nous devons étudier seulement $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon$. Pour cela, comme $(\vec{\omega}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2_tL^2_x$ et comme $H^{-1}(\mathbb{R}^3)\subset H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, il s'ensuit que la famille $(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est bornée dans $L^2_t\dot{H}^{-\frac{3}{2}}_x$. Donc, il est facile de voir que pour toute fonction $\varphi\in\mathcal{D}(I\times\mathbb{R}^3)$ nous avons

$$\sup_{\epsilon>0}\|\varphi\partial_t\vec{u}_\epsilon\|_{L^2(]0,T[,H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))} < +\infty.$$

Nous pouvons ainsi appliquer le lemme de Rellich-Lions, pour obtenir une sous-suite $(\vec{u}_{\epsilon_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\vec{u}_{\epsilon_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \vec{u} \ \text{ dans } \ (L^2_tL^2_x)_{loc}.$$

Alors, par (1.2.26), (1.2.27) et par la convergence forte dans $(L^2_tL^2_x)_{loc}$, nous sommes en mesure de prendre la limite faible dans (1.2.5) et (1.2.6) et l'on obtient

$$\begin{cases}\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \mathbb{P}(\vec{f}),\\[2mm] \partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}.\end{cases}$$

Rappelons maintenant que la pression p est donnée par

$$p = \frac{1}{(-\Delta)}\left(\mathrm{div}(\mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \mathrm{div}(\vec{f})\right),$$

d'où il est facile à vérifier que p appartient à l'espace $L^2([0,+\infty[,H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ (cf. [16] ou [61]).

Ainsi, nous avons montré qu'il existe au moins une solution faible $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ du système (1.2.1) telle que $\vec{u}\in L^\infty(]0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{\omega}\in L^\infty(]0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,H^1(\mathbb{R}^3))$, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.2.1. ■

1.2.2. Propriétés des solutions faibles de type Leray

Observons qu'à partir du Théorème 1.2.1, nous pouvons facilement déduire les informations suivantes

Corollaire 1.2.1. *Si nous considérons* $\vec{f} = 0$ *dans le système* (1.2.1), *alors la solution* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *des équations micro-polaires* (1.2.1) *obtenue dans le Théorème 1.2.1 vérifie l'inégalité d'énergie suivante*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad &+ \quad \int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\|\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq \quad \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{\omega}_0\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Finissons ce chapitre avec quelques commentaires :

- Rappelons que pour obtenir l'inégalité d'énergie, nous avons réalisé une étude symétrique des variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$, c'est-à-dire, on a considéré qu'elles appartiennent aux mêmes espaces de fonctions.
- Par la structure des équations micro-polaires, en particulier par la présence du terme d'amortissement $\vec{\omega}$ dans la deuxième équation du système (1.2.1), nous avons obtenu une information globale supplémentaire pour cette variable, *i.e.,* $\vec{\omega} \in L^2_{t,x}$.

Les solutions que l'on a obtenues dans le Théorème 1.2.1, seront le point de départ de toutes les théories étudiées au cours de ce travail. Ajoutons néanmoins que, comme pour les équations de Navier-Stokes, l'unicité et la régularité de ces solutions faibles demeurent des problèmes largement ouverts. Par conséquent, dans le prochain chapitre, nous nous concentrerons sur quelques théories de régularité, en tenant compte de la relation entre ces deux variables.

2 | Étude de la régularité locale des équations micro-polaires

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, notre intérêt se porte sur l'étude des propriétés de régularité des solutions faibles des équations micro-polaires qui ont été présentées dans le chapitre précédent. Rappelons ainsi que si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et $\vec{\omega}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ sont deux données initiales, si $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^{-1}_x$ est une force extérieure, alors il existe des fonctions $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ qui vérifient au sens faible les équations

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u}, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \quad \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \quad \vec{\omega}(0, x) = \vec{\omega}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Comme nous pouvons le voir, ce système d'équations repose sur un couplage entre la vitesse $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (dont l'évolution est donnée par les équations de Navier-Stokes avec une force extérieure) et le champ de vitesse de micro-rotation $\vec{\omega} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'évolution est donnée par la deuxième équation.

Ce couplage entre les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ introduira des phénomènes intéressants. En effet, la première équation ci-dessus peut être vue comme une équation de Navier-Stokes classique avec une force extérieure qui donnée par le terme $\frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \vec{f}$, tandis que la deuxième équation du système (2.1.1) est une équation de transport linéaire sur la variable $\vec{\omega}$ dont le terme de transport est donné par $\vec{u}$.

Étant donné qu'il y a une certaine similitude entre les deux équations de (2.1.1), on serait tentés d'attaquer l'étude de la régularité des solutions de ce système en supposant que le comportement des deux variables est totalement similaire *i.e.*, on pourrait imposer les *mêmes* conditions nécessaires sur $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ pour réaliser une étude rigoureusement identique. Cette approche a été réalisée dans l'article [41] par exemple.

Toutefois, comme cela a été noté dans les articles [29], [38] et [106], il est plus judicieux de séparer le comportement de ces deux équations afin d'obtenir des résultats plus précis. En suivant ces idées, le thème général de ce chapitre consiste alors à faire une étude de la régularité locale des solutions faibles du système (2.1.1) en supposant uniquement des conditions supplémentaires sur la variable $\vec{u}$, qui est associée au système non-linéaire de Navier-Stokes. Nous serons alors en mesure d'obtenir un gain d'information sur $\vec{u}$ qui se "transportera" par couplage de la deuxième équation sur la variable

$\vec{\omega}$. Il suffira ainsi d'imposer des conditions uniquement sur $\vec{u}$ pour obtenir un gain de régularité sur les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$.

Ce phénomène de transport d'information de la variable $\vec{u}$ sur $\vec{\omega}$ nous permet d'introduire la notion suivante :

Définition 2.1.1. *On dira que la vitesse $\vec{u}$* domine *les autres variables si l'on peut déduire un gain d'information en termes d'intégrabilité, de régularité, etc., des variables $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ en supposant une hypothèse supplémentaire* uniquement *sur la vitesse.*

Cette propriété du système micro-polaire, bien que connue depuis un certain temps, n'a pas été étudiée de manière rigoureuse et systématique, et c'est ce point de vue que nous allons adopter et développer tout au long de ce chapitre.

Notons que l'hypothèse "supplémentaire" évoquée dans la définition précédente présente une certaine ambiguïté puisque rien n'est précisé à son sujet, ce qui nous laisse plusieurs scénarios possibles. Puisque nous nous intéressons ici à des problèmes de régularité en utilisant les théories bien connues des équations de Navier-Stokes (les critères de Serrin et la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg) nous pouvons avoir une idée de ce que devrait être le comportement imposé à $\vec{u}$ afin d'obtenir un gain de régularité de la solution. Présentons donc un bref rappel de ces deux théories.

Critère de régularité de Serrin

Lorsque nous abordons la question de la régularité locale des solutions faibles des équations de Navier-Stokes, il est naturel de commencer par l'uvre de J. Serrin exposée dans l'article [93]. Considérons donc un ensemble borné $\Omega \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ et une solution faible $(\vec{u}, p)$ des équations de Navier-Stokes avec une force extérieure $\vec{f}$ sur Ω, *i.e.,*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}. \tag{2.1.2}$$

Si nous considérons que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, le critère classique de Serrin nous dit que si l'on suppose en plus que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\Omega)$, alors la solution devient régulière par rapport à la variable spatiale à l'intérieur de Ω. Il est important de remarquer que ce gain dépendra bien évidemment de l'information que nous disposons sur la force, par exemple si $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^k_x(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}$, la meilleure régularité que nous puissions obtenir est $\vec{u} \in L^\infty_t \dot{H}^{k+1}_x(\Omega') \cap L^2_t \dot{H}^{k+2}_x(\Omega')$ pour tout $\Omega' \subset \Omega$ (cf. [61] et [90]).

Ce résultat introduit la notion de points réguliers et singuliers d'une solution faible de Navier-Stokes, que nous rappelons ci-dessous.

Définition 2.1.2. *Soit $(\vec{u}, p)$ une solution faible des équations des Navier-Stokes dans $\Omega \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert et borné. Un point $(t, x) \in \Omega$ est dit un point régulier de $\vec{u}$ s'il existe un voisinage de ce point dans lequel $\vec{u}$ est bornée, autrement dit, il existe $\Omega' \subset \Omega$ avec $(t, x) \in \Omega'$ tel que nous avons $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\Omega')$.*

Cette théorie a été largement étudiée et voici quelques remarques importantes :

- dans l'article [94], Serrin a montré en fait que si la vitesse $\vec{u}$ appartient à $L^p_t L^q_x(\Omega)$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, alors la solution est bornée dans $\Omega' \subset \Omega$ et par conséquent, elle devient régulière.

- Dans les années 90, Struwe dans [95] et Takahashi dans [96] ont montré le cas critique $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1$ avec $2 \leq p < +\infty$, généralisant ainsi le cas précédent.
- Il a fallu presque 13 ans de plus pour traiter le point limite $p=+\infty$ et $q=3$. En effet, Escauriaza, Seregin et Sverak, dans [34] ont réussi à démontrer la régularité locale sous cette condition.
- En ce qui concerne des espaces plus généraux, O'Leary dans son article [79] a généralisé les critères de Serrin pour les espaces de Morrey. Il est important de noter que dans le cas où $\vec{f} \neq 0$, la régularité minimale que l'on doit imposer à la force semble être $L^2_t H^1_x(\Omega)$ (cf. [61, Théorème 13.3]).
- Enfin, d'autres généralisations sont également disponibles, par exemple si l'on considère des espaces de multiplicateurs auxquels nous référons au Chapitre 13 du livre [61].

Bien que cette théorie ait contribué à une meilleure compréhension de la régularité locale des solutions faibles, ces résultats demeurent insuffisants pour déterminer quand un point devient régulier ou singulier, étant donné qu'il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'une solution faible de type Leray satisfasse ces hypothèses supplémentaires. En effet, si $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ est une solution des équations de Navier-Stokes, d'après un argument d'interpolation, nous avons $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\Omega)$ avec $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{3}{2}>1$, ce qui nous permet de visualiser l'écart entre l'information dont nous disposons et celle que nous devons contrôler.

La théorie de régularité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

Dans les années 80, Caffarelli, Kohn et Nirenberg dans l'article [13] ont introduit leur célèbre critère de régularité pour les solutions adaptées des équations de Navier-Stokes. Rappelons d'abord cette notion.

Définition 2.1.3 (Solutions adaptées). *On dira que* $(\vec{u}, p)$ *est une solution* adaptée *des équations de Navier-Stokes* (2.1.2) *sur un ensemble* $\Omega \subset [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ *si* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, *la pression* p *vérifie* $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega)$, *si la force extérieure vérifie* $\vec{f} \in L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\Omega)$ *et si la distribution*

$$\nu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}((|\vec{u}|^2+2p)\vec{u}) + 2\vec{f}\cdot\vec{u},$$

définit une mesure non-négative localement finie sur Ω.

Notons que la mesure ν est bien définie, grâce aux hypothèses supplémentaires sur la pression et la force extérieure. Ainsi, si pour une solution adaptée et un point $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, nous avons en plus le comportement

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^2}\int_{t-r^2}^{t+r^2}\int_{B_{x,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds < \varepsilon, \tag{2.1.3}$$

alors il est possible d'obtenir de la régularité Hölderienne de la solution dans la variable de temps et d'espace autour du point (t,x) et donc le point devient un point régulier dans le sens de la Définition 2.1.2 (cf. [13]). Ce résultat mérite quelques commentaires.

- Dans l'article original [13], il a été considéré d'abord (pour des raisons techniques) que $\vec{f} \in L^q_{t,x}(\Omega)$ avec $q > \frac{5}{2}$. Ces conditions ont été améliorées et dans l'article [57], on voit qu'il est suffisant de supposer que $\vec{f} \in L^2_{t,x}(\Omega)$. En fait, comme il a été remarqué dans [59], l'on peut même prendre des forces $\vec{f} \in L^{\frac{5}{3}}_{t,x}(\Omega)$.

- D'après cette théorie, nous pouvons également obtenir des informations supplémentaires sur ces éventuels points singuliers. En effet, pour $(\vec{u}, p)$ une solution adaptée, si l'on note S l'ensemble de ses points singuliers, on peut montrer que la mesure de Hausdorff parabolique de l'ensemble S est nulle (cf. [13], [61, Chapitre 13]) : il y a donc (s'il y en a) peu de points singuliers.
- En ce qui concerne la démonstration du critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, plusieurs stratégies ont été développées. Par exemple, Lin dans [66] présente une démonstration basée sur un argument de compacité qui permet de réduire les conditions d'intégrabilité requises sur la pression, affaiblissant les hypothèses originales de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. Plus récemment, Vasseur dans [99] obtient également le résultat en utilisant un argument à la Di Giorgi, mais avec $\vec{f} = 0$. De plus, Kukavica dans [57] réalise une démonstration en utilisant un argument itératif dans le cadre d'espaces de Morrey.
- Cette théorie demeure l'un des outils les plus importants pour étudier la régularité et le comportement de la solution autour d'éventuels points singuliers. Par exemple, elle joue un rôle fondamental dans la démonstration du cas limite $(p, q) = (+\infty, 3)$ du critère de Serrin, ainsi que dans l'article [50] pour étudier les estimations de régularité locales des solutions faibles de type Leray. En plus, elle a permis d'obtenir des estimations quantitatives pour l'explosion des normes critiques en des points singuliers, comme décrit dans [7].

Ayant rappelé ces théories de régularité sur les équations de Navier-Stokes, nous allons maintenant passer au sujet principal de ce chapitre.

2.1.1. État de l'art de la régularité des équations micro-polaires

Les équations micro-polaires ont été largement étudiées depuis leur déduction dans les années 60 et pour présenter un panorama complet de létat de lart de la régularité, il est nécessaire de prendre en compte un système plus général. Considérons brièvement les équations magnéto-micro-polaires sans forces extérieures, données par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{b} = \Delta \vec{b} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, & \operatorname{div}(\vec{b}) = 0, \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - \vec{\omega} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u}, & \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \;\; \vec{b}(0, x) = \vec{b}_0(x), \;\; \vec{\omega}(0, x) = \vec{\omega}_0(x) & \text{et } \operatorname{div}(\vec{u}_0) = \operatorname{div}(\vec{b}_0) = 0, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

où $\vec{u}$ représente la vitesse du fluide, $\vec{b}$ le champ magnétique et $\vec{\omega}$ la vitesse de micro-rotation. Remarquons que si $\vec{b} = 0$, on obtient les équations micro-polaires et si $\vec{\omega} = 0$, on obtient les équations de la magnétohydrodynamique (MHD).

Par rapport à la régularité du système (2.1.4), nous pouvons mentionner l'article [80] où les auteurs ont adapté les théories de régularité des équations de Navier-Stokes, telles que les critères de Prodi-Serrin et l'unicité fort-faible, pour en déduire la régularité des solutions faibles en supposant *les mêmes conditions* supplémentaires sur les trois variables $(\vec{u}, \vec{b}, \vec{\omega})$. Ceci reste vrai lorsqu'on examine la régularité pour les équations MHD, c'est-à-dire que nous pouvons obtenir un gain de régularité en supposant certaines conditions pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ (cf. [103], [104]).

Cependant, dans l'article [46], les auteurs ont déduit la régularité des solutions faibles des équations MHD en imposant des conditions seulement sur la vitesse. Il est donc possible d'observer l'effet de domination de la variable $\vec{u}$ décrit dans la Définition 2.1.1.

Ce phénomène a ensuite été étendu au cas des équations magnéto-micro-polaires et en même temps généralisé à divers espaces fonctionnels. En effet, dans l'article de Yuan [106], il a été montré que si pour une solution faible $(\vec{u}, p, \vec{b}, \vec{\omega})$ du système magnéto-micro-polaire, on impose la condition $\vec{u} \in L^p(]0,T[, L^q(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$, alors $(\vec{u}, \vec{b}, \vec{\omega})$ est régulière dans $]0,T] \times \mathbb{R}^3$, *i.e.,* nous avons $\vec{u}, \vec{b}, \vec{\omega} \in \mathcal{C}^\infty(]0,T] \times \mathbb{R}^3)$. Ce résultat a été ensuite généralisé dans [38] au cas où la vitesse $\vec{u}$ appartient à certain espace de Morrey-Campanato.

En considérant seulement les équations micro-polaires *i.e.*, lorsque $\vec{b} = 0$ dans (2.1.4), il existe des résultats similaires qui obtiennent un gain de régularité et qui soulignent ce phénomène de domination de la variable $\vec{u}$. Plus précisément, dans l'article [29], il a été obtenu que si l'on considère seulement que la vitesse appartient aux espaces de Lorentz $L^p(]0,T[, L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$ et $3 < q \leq +\infty$, alors la solution faible $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ des équations micro-polaires devient régulière dans $]0,T] \times \mathbb{R}^3$. Ce résultat a même été adaptée pour le problème de Dirichlet à conditions nulles sur des ensembles bornés dans l'article [68]. En supposant maintenant des conditions de type Besov $\vec{u} \in L^{\frac{2}{1+r}}(]0,T[, B^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $-1 < r < 1$, la régularité des variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans $]0,T] \times \mathbb{R}^3$ a été étudié dans l'article [31], et le cas limite $r = 1$ a été traité dans [29]. De la même manière, nous pouvons mentionner plusieurs articles en considérant des hypothèses supplémentaires sur la pression, comme par exemple [30], [39] et [51]. Finalement, il existe des résultats plus récents qui considèrent des hypothèses supplémentaires sur la dérivée d'une composante de la vitesse comme on peut le voir dans les articles [67] et [83].

Remarque 2.1.1. *Il est très important de remarquer que tous ces résultats sur les équations micro-polaires que l'on vient de présenter, sont obtenus en utilisant un argument d'unicité fort-faible et donc les informations que nous avons sur la solution $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ sont considérées sur tout l'espace $]0,T[\times\mathbb{R}^3$. De plus, nous avons également des conditions supplémentaires sur les données initiales $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}_0$. Dans cette thèse, nous n'imposons aucune condition particulière sur les données initiales et nous travaillerons dans un cadre local.*

Si l'on considère maintenant la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg sur les équations micro-polaires, cet effet de domination de la vitesse est encore plus délicat à traiter et il existe peu de travaux dans cette direction. Mentionnons par exemple l'article [19] où la régularité Höldérienne des solutions adaptées pour le système magnéto-micro-polaire (2.1.4) a été obtenue en supposant la petitesse du gradient pour les trois variables $\vec{u}$, $\vec{b}$ et $\vec{\omega}$, en ajoutant une hypothèse supplémentaire d'intégrabilité sur la variable $\vec{\omega}$ en raison de la structure des équations.

Ainsi, dans les sections suivantes, nous présenterons quelques résultats nouveaux qui nous permettront d'observer la domination de la vitesse $\vec{u}$ par rapport à la variable $\vec{\omega}$ lorsque nous étudions des problèmes de régularité dans un cadre local.

- Dans la Section 2.2, nous montrerons d'abord que, si pour une solution faible $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ des équations micro-polaires sur un ensemble borné Ω, nous supposons que $\mathbb{1}_\Omega \vec{u}$ appartient à un certain espace de Morrey, alors il est possible d'obtenir un gain d'*intégrabilité* pour les deux variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ à l'intérieur de Ω, reflétant ainsi un effet dominant de la vitesse au sens de la Définition 2.1.1. Bien que, dans ce résultat, nous ne revendiquions pas un gain de régularité, il sera très utile par la suite.

- Dans la Section 2.3, nous sommes en mesure d'obtenir un résultat de ε-régularité, de façon similaire à la théorie de la régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, décrite à la page 39. Plus précisément, on montrera que si nous avons uniquement une information de petitesse du gradient de $\vec{u}$, nous pouvons déduire la régularité Höldérienne en variable de temps et d'espace du couple $(\vec{u}, \vec{\omega})$. L'une des principales nouveautés de cette section est l'introduction de la notion de solution *partiellement adaptée*, qui prend seulement en compte l'information associée à la vitesse, ce qui nous a permis de nous débarrasser de toutes les hypothèses sur $\vec{\omega}$, à la différence du travail [19]. En outre, observons que, comme la solution est Hölder continue sur un ensemble borné, alors elle devient bornée et on verra que cette information impliquera que les solutions sont plus régulières.

- En effet, dans la Section 2.4, on montrera que si la vitesse $\vec{u}$ est bornée sur un ensemble Ω, nous pouvons déduire que le couple $(\vec{u}, \vec{\omega})$ est en fait régulier par rapport à la variable spatiale à l'intérieur de Ω. Il est important de mentionner qu'après ces résultats, nous pouvons introduire une notion des *points partiellement réguliers/singuliers* dont certaines propriétés seront présentées à la fin de ce chapitre.

Avant de passer à la démonstration des résultats ci-dessus, nous allons rappeler la définition de quelques objets mathématiques ainsi que des résultats utiles qui seront nécessaires pour mener à bien l'étude que nous nous proposons de faire sur les équations micro-polaires.

2.1.2. Les outils de base : définitions et cadre fonctionnel.

Tout au long de ce chapitre, nous allons considérer l'espace homogène $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \delta, \mu)$, où δ est la distance parabolique donnée par $\delta\big((t,x),(s,y)\big) = |t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|$ et μ est la mesure de Lebesgue usuelle, notée $\mathrm{d}\mu = dxdt$. Le fait de considérer ce cadre de travail provient de la nature parabolique des équations de Navier-Stokes, qui est également présente dans les équations micro-polaires (cf. [61] ou [85]).

En outre, comme nous nous intéressons au comportement local d'une solution $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ des équations micro-polaires dans un voisinage de $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$, nous fixons la notation suivante : pour $r > 0$ tel que $t_0 - r^2 > 0$, nous considérons la boule parabolique :

$$\mathbf{Q}_r(t_0, x_0) =]t_0 - r^2, t_0 + r^2[\times B_{x_0,r}. \tag{2.1.5}$$

On notera seulement $\mathbf{Q}_r$ s'il n'y a aucun risque de confusion.

Les espaces de Morrey paraboliques

Pour $1 < p \leq q < +\infty$, les espaces de Morrey paraboliques $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ sont définis comme l'ensemble des fonctions mesurables $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui appartiennent à l'espace $(L^p_t L^p_x)_{\mathrm{loc}}$ telles que

$$\|\vec{\varphi}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R}, r > 0} \left(\frac{1}{r^{5(1-\frac{p}{q})}} \int_{|t-t_0|<r^2} \int_{B(x_0,r)} |\vec{\varphi}(t,x)|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{2.1.6}$$

Ces espaces sont un outil puissant lors de l'étude de problèmes liés à la régularité dans les équations aux dérivées partielles. Ce fait a été particulièrement souligné dans [61] et [79] pour les équations de Navier-Stokes, car ils fournissent un cadre très naturel, comme nous le verrons plus tard.

Voici quelques propriétés importants de ces espaces qui seront utiles par la suite

Lemme 2.1.1.

1) *Pour tout* $1 < p < q < +\infty$, $L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{q,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.
2) *Pour* $1 < p < +\infty$, *nous avons* $L^p_t L^\infty_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{M}^{p,\frac{5p}{2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Présentons maintenant une version des inégalités de Hölder faciles à vérifier, pour les espaces de Morrey.

Lemme 2.1.2.

1) *Si* $\vec{f},\vec{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *sont deux fonctions telles que* $\vec{f} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *et* $\vec{g} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *alors pour tout* $1 \leq p \leq q < +\infty$, *nous avons* $\|\vec{f}\cdot\vec{g}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\|\vec{g}\|_{L^\infty_{t,x}}$.
2) *Soit* $1 \leq p_0 \leq q_0 < +\infty$, $1 \leq p_1 \leq q_1 < +\infty$ *et* $1 \leq p_2 \leq q_2 < +\infty$. *Si* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_0}$ *et* $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{q_0}$, *alors pour deux fonctions mesurables* $\vec{f},\vec{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *telles que* $\vec{f} \in \mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *et* $\vec{g} \in \mathcal{M}^{p_2,q_2}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *nous avons*
$$\|\vec{f}\cdot\vec{g}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq \|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}\|\vec{g}\|_{\mathcal{M}^{p_2,q_2}_{t,x}}.$$

En utilisant le lemme précédent, nous obtenons le résultat suivant

Lemme 2.1.3 (Localisation)**.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *un ensemble borné. Soit la fonction* $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *qui appartient à l'espace* $\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *avec* $1 \leq p_0 \leq q_0$, $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq q_1$ *et* $q_0 \leq q_1 < +\infty$. *Alors nous avons*
$$\|\mathbb{1}_\Omega\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_\Omega\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

Le potentiel de Riesz parabolique

Pour $0 < \mathfrak{a} < 5$, nous définissons le potentiel de Riesz parabolique $\mathcal{L}_\mathfrak{a}$ d'une fonction localement intégrable $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :
$$\mathcal{L}_\mathfrak{a}(\vec{f})(t,x) = \int_\mathbb{R}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^{5-\mathfrak{a}}}\vec{f}(s,y)dyds. \tag{2.1.7}$$

Énonçons maintenant l'inégalité d'Adams-Hedberg qui nous permet d'obtenir un contrôle de ces opérateurs dans les espaces de Morrey. Ce lemme sera fondamental dans notre étude car il permettra d'obtenir une amélioration de l'information de type Morrey sur la solution de l'équation de la chaleur avec une force extérieure, à condition que cette force appartienne à certains espaces de Morrey.

Lemme 2.1.4 (Inégalité d'Adams-Hedberg)**.** *Si* $0 < \mathfrak{a} < \frac{5}{q}$, $1 < p \leq q < +\infty$ *et* $\vec{f} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *alors pour* $\lambda = 1 - \frac{\mathfrak{a}q}{5}$ *nous avons*
$$\|\mathcal{L}_\mathfrak{a}(\vec{f})\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

La preuve de ce lemme se trouve dans [61, Corollary 5.1]. Comme il a été remarqué dans [23], nous pouvons obtenir également des contrôles plus fins du potentiel de Riesz parabolique lorsque nous sommes dans un cadre local, en effet on a

Corollaire 2.1.1. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *un ensemble borné. Soit* $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable telle que* $\mathbb{1}_\Omega\vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *avec* $2 < p \leq q$, $5 < q$. *Alors, nous avons les deux points suivants*

1) $\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}_1(\vec{f}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{p}{\nu},\frac{q}{\nu}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *avec* $\nu = 1 - \frac{q-5}{5q}$ *(remarquons que* $0<\nu<1$*).*

2) $\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}_1(\vec{f}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *où* $\sigma = \min\{\frac{p}{\nu}, q\}$.

Corollaire 2.1.2. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ *un ensemble borné. Soit* $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable telle que* $\mathbb{1}_\Omega \vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, *avec* $2 < p \leq q$, $5 < q$. *Alors, nous avons*

$$\mathbb{1}_\Omega \mathcal{L}_2(\mathbb{1}_\Omega \vec{f}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

où $\sigma = \min\{\frac{p}{\nu}, q\}$ *avec* $\nu = 1 - \frac{q-5}{5q}$.

Espaces de Hölder paraboliques et le Lemme de Ladyzhenskaya

Nous définissons les espaces homogènes paraboliques de Hölder $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ avec $0<\alpha<1$ en utilisant la condition habituelle pour $\vec{\varphi} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\|\vec{\varphi}\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \sup_{(t,x)\neq(s,y)} \frac{|\vec{\varphi}(t,x) - \vec{\varphi}(s,y)|}{\left(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|\right)^\alpha} < +\infty.$$

Ces espaces de Hölder mesurent la régularité dans les variables de temps et d'espace simultanément et nous aurons l'occasion de nous en servir de façon intensive dans les pages qui suivent. En effet, le lien entre ces espaces de Hölder paraboliques et les espaces de Morrey paraboliques avec l'équation de la chaleur est donnée par le lemme qui suit :

Lemme 2.1.5 (Ladyzhenskaya)**.** *Soient* $\vec{\Phi} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *et* $h \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *avec* $1 \leq \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0$, $\frac{1}{\mathfrak{q}_0} = \frac{2-\alpha}{5}$, $\frac{1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{1-\alpha}{5}$ *et* $0<\alpha<\frac{1}{3}$. *Nous définissons* $\sigma(D)$ *comme un multiplicateur de Fourier où* σ *est une fonction lisse sur* $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, *homogène d'exposant 1. Alors la fonction* $\vec{v}$ *égale à* 0 *pour* $t\leq 0$ *et*

$$\vec{v}(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\Phi}(s,\cdot) + \sigma(D)h(s,\cdot))ds,$$

pour $t>0$, *est Hölderienne d'exposant* α *en la variable de temps et d'espace.*

Nous renvoyons à [61, Proposition 13.4] pour une démonstration de ce lemme.

* * *

Avec tous ces outils introduits, nous sommes prêts à présenter nos résultats. Comme mentionné précédemment, nous commençons par un premier résultat qui permet d'observer l'interdépendance des variables des équations micro-polaires.

2.2. Un premier résultat de domination locale de la vitesse sur la micro-rotation

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat de domination de la vitesse $\vec{u}$ au sens de la Définition 2.1.1 dans le cadre des espaces de Morrey. Rappelons ci-dessous le système micro-polaire :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Remarquons que comme l'on a l'équation suivante pour la pression

$$-\Delta p = \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})) - \operatorname{div}(\vec{f}),$$

on se concentrera seulement sur les deux variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$.

Avant de nous lancer dans nos calculs, fixons la notion suivante.

Définition 2.2.1. *Nous dirons que* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *est une solution faible des équations micro-polaires* (2.2.1) *sur* $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ *un ensemble ouvert et bornée, si* $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ *et elles vérifient au sens faible les équations micro-polaires sur* Ω*, i.e., pour tout* $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in \mathcal{D}_{t,x}(\Omega)$ *telle que* $\operatorname{div}(\vec{\varphi}) = 0$ *nous avons*

$$\begin{cases} \langle \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f} | \vec{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0, \\ \langle \partial_t \vec{\omega} - \Delta\vec{\omega} - \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u} | \vec{\psi}\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0. \end{cases}$$

Remarquons que tout au long de ce chapitre nous allons travailler avec cette notion de solution faible dans un cadre local.

Énonçons, maintenant le théorème principal de cette section tel que présenté dans notre article [18].

Théorème 2.2.1. *Soit* $\mathbf{Q}_R \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ *une boule parabolique de type* (2.1.5) *pour un certain* $R > 0$*. Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible des équations micro-polaires* (2.2.1) *sur* $\mathbf{Q}_R$ *avec une force extérieure* $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$*. Supposons en plus que*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \textit{avec}\ \ 2 < p_0 \le q_0,\ 5 < q_0 \le 6. \tag{2.2.2}$$

Alors, nous avons les points suivants :

1) *sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_{R_1}$*, avec* $0 < R_1 < R$ *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \tag{2.2.3}$$

2) *et sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_{R_2}$*, avec* $0 < R_2 < R_1 < R$ *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.2.4}$$

Ce théorème, qui joue un rôle central dans l'étude de la théorie de la régularité partielle qui sera abordée dans la prochaine section, est inspiré du résultat dO'Leary dans [79]. Il est important de noter qu'à partir de l'hypothèse (2.2.2) qui est sous-critique par rapport au changement d'échelle (2) page 9, nous pouvons déduire les contrôles (2.2.3) et (2.2.4), qui sont également sous-critique et satisfont la condition d'intégrabilité de Serrin $L^p_t L^q_x$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \le 1$. Nous obtenons ainsi un raffinement de l'information sous-critique qui, *a priori*, pourrait impliquer la régularité de la solution. Néanmoins, notre intérêt se porte pour linstant sur le gain d'intégrabilité. L'étude de la régularité sera traitée plus en détail dans la Section 2.4.

Observons de plus que nous n'imposons qu'une condition de type Morrey sur la variable $\vec{u}$ et que nous ne supposons aucune autre hypothèse sur $\vec{\omega}$. En effet, avec seulement l'information $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$, nous pouvons effectuer nos calculs pour $\vec{u}$ et obtenir un gain local d'intégrabilité sur cette variable $\vec{u}$, et une fois que nous disposons de cette information sur $\vec{u}$, nous pouvons alors étudier l'intégrabilité de la variable $\vec{\omega}$. Cette procédure en deux étapes montre que, lors de l'étude du problème de gain d'intégrabilité, le champ de vitesse $\vec{u}$ "domine" la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Remarquons en outre que la pression p est un objet très général, car nous considérons seulement que $p \in \mathcal{D}'(\mathbf{Q}_R)$, ce qui est une caractéristique de la théorie de régularité de Serrin. Notons également que l'hypothèse sur la force extérieure $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$ est suffisante pour obtenir ce gain d'intégrabilité, mais il est clair que si nous envisageons d'obtenir plus de régularité sur la solution $(\vec{u}, \vec{\omega})$, nous devrons ajouter des conditions supplémentaires sur $\vec{f}$.

Enfin, il convient de noter ici que la borne supérieure pour le paramètre q_0 dans (2.2.2), c'est-à-dire que l'intervalle $5 < q_0 \leq 6$ est principalement technique et est liée à l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$.

Démonstration du Théorème 2.2.1. Pour montrer ce résultat, nous division la preuve en deux étapes. Nous étudierons d'abord la vitesse $\vec{u}$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse (2.2.2) nous allons montrer que pour certain $0 < r_1 < R$, nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ avec $\sigma_0 > p_0$, ce qui représente un petit gain d'intégrabilité par rapport au premier indice d'espace de Morrey de l'hypothèse initiale $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Ensuite, en itérant ce processus, nous pourrons déduire que pour $0 < R_1 < \cdots < r_1 < R$, nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{q_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) = L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Ce argument itératif est résumé dans le dessin suivant :

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{q_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \quad (2.2.5)$$

Remarquons que même si les termes $\frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ et $\vec{f}$, qui peuvent être vues comme des forces externes de l'équation liée à $\vec{u}$, appartiennent à $L^2_{t,x}$, le gain d'intégrabilité de chaque étape ne dépend pas de cette information et donc nous pouvons effectuer le processus itératif ci-dessus sans problème (voir Remarque 2.2.1).

Dans une deuxième partie, nous étudierons la vitesse $\vec{\omega}$ pour laquelle nous allons suivre la même stratégie qu'auparavant. Cependant, le point de départ de l'itération est l'information *a priori* dont nous disposons sur cette variable. En effet, comme $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$ par hypothèse, en utilisant un argument d'interpolation, nous observons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\omega} \in L^{\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{\frac{10}{3}, \frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Ainsi, en utilisant l'information obtenue pour la vitesse $\vec{u}$, nous sommes en mesure d'obtenir une amélioration de l'information de type Morrey sur $\vec{\omega}$. Ces idées sont résumées dans le dessin ci-dessous.

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\omega} \in \mathcal{M}^{\frac{10}{3}, \frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \\ + \\ \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{\omega} \in L^{q_1}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad \text{avec} \quad \frac{10}{3} < q_1 \leq q_0.$$

Remarquons que le fait que $\operatorname{div}(\vec{\omega}) \neq 0$, implique certaines considérations supplémentaires comme nous le verrons plus tard. Ayant précisé ces idées, commençons par la première étape.

2.2.1. Gain d'intégrabilité pour la vitesse $\vec{u}$.

Pour obtenir le premier gain de l'information de type Morrey pour la vitesse $\vec{u}$, nous considérons un paramètre $\nu_0 > 0$ tel que

$$\nu_0 = 1 - \frac{q_0 - 5}{5 q_0} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \min\left\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\right\}. \quad (2.2.6)$$

Observons ainsi que $0 < \nu_0 < 1$ et donc $\sigma_0 > p_0$. Nous allons montrer alors que pour $\mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{Q}_R$ nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \quad (2.2.7)$$

ce qui correspond à un gain d'intégrabilité par rapport à l'hypothèse (2.2.2). Pour cela, on considère ψ et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions qui appartiennent à l'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ telles que pour $0 < r_1 < r_0 < R$ nous avons

$$\begin{aligned} &\psi \equiv 1 \ \text{ sur } \quad \mathbf{Q}_{r_0} \quad \text{et} \quad \text{supp}(\psi) \subset \mathbf{Q}_R, \\ &\phi \equiv 1 \ \text{ sur } \ \mathbf{Q}_{r_1} \quad \text{et} \quad \text{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_{r_0}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Il est clair que $\phi(0, \cdot) = \psi(0, \cdot) = 0$ car $\mathbf{Q}_R \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et nous avons en plus l'identité $\psi\phi = \phi$ dans tout l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Maintenant, nous définissons $\vec{U} = \phi\vec{u}$ et pour déduire (2.2.7) nous allons montrer que

$$\vec{U} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0, q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.2.9}$$

Ainsi, en utilisant les propriétés des fonctions ϕ et ψ, nous avons dans $\mathcal{S}'$ l'identité

$$\vec{U} = \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} \Delta(\phi\vec{u}) \right),$$

qui peut être reformulée comme suit

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi\Delta\vec{u} - (\Delta\phi)\vec{u} + 2\sum_{i=1}^{3} \partial_i\big((\partial_i\phi)\vec{u}\big) \right) \right) \\ &= \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} (\phi\Delta\vec{u}) \right) - \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} ((\Delta\phi)\vec{u}) \right) + 2\sum_{i=1}^{3} \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} \partial_i\big((\partial_i\phi)\vec{u}\big) \right) \\ &= \vec{U}_1 - \vec{U}_2 + \vec{U}_3. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Nous allons alors démontrer que chaque terme $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ de l'expression ci-dessus appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0, q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ ce qui impliquera (2.2.9). Étudions d'abord les termes $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$.

Proposition 2.2.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, nous avons*

$$\vec{U}_2, \vec{U}_3 \in L^6_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Preuve. En utilisant les inégalités de Hölder, nous pouvons écrire

$$\|(\Delta\phi)\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^{\frac{6}{5}}} \leq \|\Delta\phi\|_{L_t^\infty L_x^3} \|\mathbb{1}_{\text{supp}(\phi)}\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} < +\infty,$$

où nous avons utilisé le fait que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\mathbf{Q}_R) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\mathbf{Q}_R)$. Ensuite, en utilisant l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$(\Delta\phi)\vec{u} \in L^\infty([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)). \tag{2.2.11}$$

D'un autre côté, comme pour tout $1 \leq i \leq 3$, nous avons $(\partial_i\phi)\vec{u} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{3} \partial_i((\partial_i\phi)\vec{u}) \in L^\infty([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)). \tag{2.2.12}$$

Ainsi, avec les informations (2.2.11) et (2.2.12) ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{U}_2 &= \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} ((\Delta\phi)\vec{u}) \right) \in L^\infty([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \\ \vec{U}_3 &= 2\sum_{i=1}^{3} \psi \left(\frac{1}{(-\Delta)} \partial_i\left((\partial_i\phi)\vec{u}\right) \right) \in L^\infty([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

Doù, après une nouvelle utilisation de l'injection $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, l'on a

$$\vec{U}_2, \vec{U}_3 \in L^\infty([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \subset L^\infty([0,+\infty[, L^6(\mathbb{R}^3)).$$

Remarquons maintenant que grâce aux propriétés de la fonction auxiliaire ψ, nous avons $\text{supp}(\vec{U}_2), \text{supp}(\vec{U}_3) \subset \mathbf{Q}_R$ et comme $\mathbf{Q}_R$ est un ensemble borné, il s'ensuit que

$$\vec{U}_2, \vec{U}_3 \in L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{6,6}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 2.2.1. ■

En revenant à la preuve du Théorème 2.2.1, notons que comme $\text{supp}(\vec{U}_2) \subset \mathbf{Q}_R$ et $\text{supp}(\vec{U}_3) \subset \mathbf{Q}_R$, par le Lemme 2.1.1 et la proposition précédente, nous avons pour $i = 2, 3$,

$$\|\vec{U}_i\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq \|\vec{U}_i\|_{\mathcal{M}^{q_0,q_0}_{t,x}} = \|\vec{U}_i\|_{L^{q_0}_t L^{q_0}_x} < \|\vec{U}_i\|_{L^6_t L^6_x} < +\infty. \tag{2.2.13}$$

Remarquons que par l'estimation précédente, les termes $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ vérifient directement la conclusion (2.2.3) et donc l'argument itératif (2.2.5) sera appliqué seulement sur le terme $\vec{U}_1$. La première itération est donnée dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.2. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1, nous avons*

$$\vec{U}_1 \in \mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

où $\vec{U}_1 = \left(\frac{1}{(-\Delta)}(\phi\Delta\vec{u})\right)$ *est donné dans* (2.2.10), $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ *et* $\nu_0 = 1 - \frac{q_0-5}{5q_0}$ *avec* $2 < p_0 \leq q_0$ *et* $5 < q_0 \leq 6$.

Preuve. L'idée consiste à étudier l'évolution de la variable $\vec{U}_1$ qui est liée à celle de $\vec{u}$. Observons que dans l'équation satisfaite par $\vec{u}$ dans (2.2.1), la pression p est supposée être une distribution, et donc, pour se débarrasser de cette variable dans un cadre local, nous pouvons appliquer l'opérateur rotationnel. Plus précisément, nous allons utiliser l'identité suivante

Lemme 2.2.1. *Soient ϕ, ψ des fonctions test données dans* (2.2.8). *Si $\vec{v}$ est un champ de vecteurs suffisamment régulier, alors nous avons*

$$\psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}(\phi\Delta\vec{v})\right) = -\psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi(\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{v}])\right)\right) + \psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi(\vec{\nabla}\,\text{div}(\vec{v}))\right)\right).$$

Preuve. Il est facile de voir que

$$\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{v}] = \psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) + \vec{\nabla}\psi\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = \psi(\vec{\nabla}\,\text{div}(\vec{v}) - \Delta\vec{v}) + \vec{\nabla}\psi\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}).$$

En plus, par les propriétés du support de ϕ et ψ nous avons $\phi\vec{\nabla}\psi \equiv 0$ et $\psi\phi = \phi$. Alors, en multipliant l'expression ci-dessus par ϕ, le deuxième terme de l'identité s'annule car $\phi\vec{\nabla}\psi = 0$ et l'on obtient

$$-\phi\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{v}] + \phi\vec{\nabla}\,\text{div}(\vec{v}) = \phi\Delta\vec{v},$$

et à partir de cette identité, nous avons le résultat souhaité. ■

En revenant à la preuve de la Proposition 2.2.2, comme $\text{div}(\vec{u}) = 0$ et en utilisant le lemme précédent, nous avons

$$\vec{U}_1 = \psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}(\phi\Delta\vec{u})\right) = -\psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi(\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}])\right)\right).$$

Définissons maintenant la quantité suivante

$$\vec{\mathcal{U}} = \vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}]. \tag{2.2.14}$$

Il est clair que si nous obtenons un gain d'intégrabilité sur $\vec{\mathcal{U}}$, il serait possible d'en déduire les informations Morrey souhaitées pour $\vec{U}_1$, car nous avons la formule suivante

$$\vec{U}_1 = \psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\mathcal{U}}\right)\right). \tag{2.2.15}$$

Déduisons ainsi la dynamique de $\vec{\mathcal{U}}$. En appliquant l'opérateur rotationnel à la première équation de (2.1.1) et étant donné que nous avons l'identité $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}p \equiv 0$, nous obtenons

$$\partial_t(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) = \Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - \vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \vec{\nabla}\wedge\vec{f}.$$

Nous introduisons maintenant la fonction de localisation ψ, et à partir de l'équation précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_t[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}] &= (\partial_t\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \psi\,\partial_t(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\\
&= (\partial_t\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \psi\big[\Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - \psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \tfrac{\psi}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \psi\vec{\nabla}\wedge\vec{f}.
\end{aligned}$$

Étant donné que $\psi\Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) = \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + (\Delta\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u} - 2\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)$, nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus comme

$$\begin{aligned}
\partial_t[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}] &= \Delta(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + (\partial_t\psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)\\
&\quad -\psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\psi}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \psi\vec{\nabla}\wedge\vec{f}.
\end{aligned}$$

En appliquant, encore une fois l'opérateur rotationnel, on obtient

$$\begin{aligned}
\partial_t(\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}]) &= \Delta(\vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}]) + \vec{\nabla}\wedge\Big[(\partial_t\psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\Big] - 2\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)\right]\\
&\quad -\vec{\nabla}\wedge\Big[\psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\Big] + \vec{\nabla}\wedge\Big[\tfrac{\psi}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \psi\vec{\nabla}\wedge\vec{f}\Big],
\end{aligned}$$

et comme $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\nabla}\wedge[\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}]$ par (2.2.14), nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_t\vec{\mathcal{U}} &= \Delta\vec{\mathcal{U}} + \vec{\nabla}\wedge\Big[(\partial_t\psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\Big] - 2\vec{\nabla}\wedge\left[\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\psi)\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)\right] - \vec{\nabla}\wedge\Big[\psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\Big]\\
&\quad +\vec{\nabla}\wedge\Big[\tfrac{\psi}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \psi\vec{\nabla}\wedge\vec{f}\Big],
\end{aligned}$$

et alors nous avons l'équation suivante

$$\partial_t \vec{\mathcal{U}} = \Delta \vec{\mathcal{U}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{R}, \tag{2.2.16}$$

où le vecteur $\vec{R}$ est donné par

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (\partial_t \psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) - 2\sum_{j=1}^{3} \partial_j \left((\partial_j \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) \\ &\quad + \tfrac{\psi}{2}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) + \psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f} - \psi \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Pour traiter le terme non linéaire ci-dessus, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.2. *Supposons que* $\vec{b}, \vec{c} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *sont deux champs de vecteurs tel que* $\operatorname{div}(\vec{b}) = 0$ *et soit* $\overline{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ *une fonction test. Alors, nous avons l'identité vectorielle suivante*

$$\overline{\varphi}\vec{\nabla} \wedge (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c} = \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\overline{\varphi} b_j \vec{c}) - \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} (\partial_i \overline{\varphi}) b_j \vec{c} - \sum_{j=1}^{3} \partial_j (\vec{\nabla}\overline{\varphi} \wedge (b_j \vec{c})) + \sum_{j=1}^{3} (\partial_j \vec{\nabla} \overline{\varphi}) \wedge (b_j \vec{c}).$$

Preuve. Nous commençons par la formule $\overline{\varphi}\vec{\nabla} \wedge (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c} = \vec{\nabla} \wedge \left(\overline{\varphi}(\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c}\right) - \vec{\nabla}\overline{\varphi} \wedge \left((\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c}\right)$ qui peut être réécrite sous la forme

$$\overline{\varphi}\vec{\nabla} \wedge (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c} = \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\overline{\varphi} b_j \vec{c}) - \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\overline{\varphi} b_j)\vec{c} - \sum_{j=1}^{3} \vec{\nabla}\overline{\varphi} \wedge b_j \partial_j \vec{c}.$$

En utilisant maintenant le fait que $\operatorname{div}(\vec{b}) = 0$ dans le deuxième et troisième terme ci-dessus, nous obtenons que

$$\overline{\varphi}\vec{\nabla} \wedge (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{c} = \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\overline{\varphi} b_j \vec{c}) - \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} (\partial_i \overline{\varphi}) b_j \vec{c} - \sum_{j=1}^{3} \partial_j (\vec{\nabla}\overline{\varphi} \wedge (b_j \vec{c})) + \sum_{j=1}^{3} (\partial_j \vec{\nabla} \overline{\varphi}) \wedge (b_j \vec{c}),$$

ce qui termine la preuve du lemme. ■

Ainsi, en utilisant le lemme précédent, nous pouvons réécrire le vecteur $\vec{R}$ dans (2.2.17) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (\partial_t \psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) - 2\sum_{j=1}^{3} \partial_j \left((\partial_j \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) + \tfrac{\psi}{2}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) + \psi \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \\ &\quad -\vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} \partial_j(\psi u_j \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3} (\partial_j \psi) u_j \vec{u} + \sum_{j=1}^{3} \partial_j (\vec{\nabla}\psi \wedge (u_j \vec{u})) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{3} (\partial_j \vec{\nabla}\psi) \wedge (u_j \vec{u}). \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Observons que par (2.2.8), nous avons $\operatorname{supp}(\psi) \subset \mathbf{Q}_R \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$, et donc

$$\vec{\mathcal{U}}(0, x) = \vec{\nabla} \wedge [\psi(0, x)\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(0, x)] = 0,$$

donc par l'équation (2.2.16), nous pouvons considérer le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{\mathcal{U}} = \Delta \vec{\mathcal{U}} + \vec{\nabla} \wedge \vec{R}, \\ \vec{\mathcal{U}}(0,x) = 0. \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel, nous pouvons écrire à présent

$$\vec{\mathcal{U}}(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla} \wedge \vec{R})(s,x)ds = \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{R}(s,x)ds,$$

et par (2.2.15), nous obtenons

$$\vec{U}_1 = \psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\mathcal{U}}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{R}(s,x)ds\right)\right).$$

Ainsi, en utilisant l'identité (2.2.18) pour $\vec{R}$, nous avons alors l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\vec{U}_1 \quad = \quad & \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\partial_t\psi + \Delta\psi)(\vec{\nabla} \wedge \vec{u})ds\right)}_{(U_{1,a})} \\
- \quad & \underbrace{2\,\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right)ds\right)}_{(U_{1,b})} + \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\frac{\psi}{2}\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})ds\right)}_{(U_{1,c})} \\
+ \quad & \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{f}ds\right)}_{(U_{1,d})} - \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\psi u_j\vec{u})ds\right)}_{(U_{1,e})} \\
+ \quad & \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla} \wedge \sum_{j=1}^{3}(\partial_j\psi)u_j\vec{u}ds\right)}_{(U_{1,f})} + \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sum_{j=1}^{3}\partial_j(\vec{\nabla}\psi \wedge (u_j\vec{u}))ds\right)}_{(U_{1,g})} \\
- \quad & \underbrace{\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\vec{\nabla}\psi) \wedge (u_j\vec{u})ds\right)}_{(U_{1,h})}. \qquad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que chacun des termes précédents appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ ce qui impliquera bien sûr que $\vec{U}_1 \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Dans notre étude nous regrouperons les termes qui ont une structure similaire.

- Pour étudier les termes $U_{1,a}$ et $U_{1,d}$ nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2.3. *Soient la boule parabolique* $\mathbf{Q}_R$ *et* $\vec{A}$ *une fonction dans* $L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$. *Supposons que* ψ *et* ϕ *sont les fonctions localisantes données dans* (2.2.8). *Considérons* Φ *une fonction lisse à support dans* $\mathbf{Q}_R$. *Alors, pour* $1 < p \leq q \leq 6$, *nous avons*

$$\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot)ds\right) \in \mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Pour simplicité définissons $\vec{\mathcal{A}} = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}ds$. Puisque $p \leq q \leq 6$, par la propriété de localisation donnée dans le Lemme 2.1.3, page 43 et par l'identification de l'espace $\mathcal{M}_{t,x}^{p,p} = L_{t,x}^p$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot)ds\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}} &= \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}}\\ \leq C\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{6,6}} &\leq C\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right)\right\|_{L_{t,x}^6}\\ &\leq C\|\psi\|_{L_t^\infty L_x^\infty}\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right)\right\|_{L_t^6L_x^6}.\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Maintenant, en utilisant l'injection $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot)ds\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}} &\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right\|_{L_t^6\dot{H}_x^1} \leq C\left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right\|_{L_t^6\dot{H}_x^{-1}}\\ &\leq C\left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right\|_{L_t^6L_x^{\frac{6}{5}}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, comme la fonction ϕ est supportée dans la boule parabolique $\mathbf{Q}_R$, nous obtenons par l'inégalité de Hölder dans la variable d'espace, l'estimation

$$\left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right\|_{L_t^6L_x^{\frac{6}{5}}} \leq C\left\|\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right\|_{L_t^\infty L_x^{\frac{6}{5}}} \leq C\|\phi\|_{L_t^\infty L_x^3}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\|_{L_t^\infty L_x^2}.$$

Ainsi, par la définition de $\vec{\mathcal{A}}$, et les propriétés classiques du noyau de la chaleur [1] nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\|_{L_t^\infty L_x^2} &= \sup_{t>0}\left\|\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot))ds\right\|_{L^2} \leq C\sup_{t>0}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot))ds\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\leq C\|\Phi\vec{A}\|_{L_{t,x}^2}.\end{aligned}$$

Enfin, il suffit de rappeler que la fonction Φ est supportée dans la boule parabolique $\mathbf{Q}_R$ et alors $\|\Phi\vec{A}\|_{L_{t,x}^2} \leq C\|\vec{A}\|_{L_{t,x}^2(\mathbf{Q}_R)} < +\infty$. Nous avons donc prouvé

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Phi\vec{A}(s,\cdot)ds\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}} &= \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{A}}\right)\right)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}}\\ &\leq \|\Phi\vec{A}\|_{L_{t,x}^2} \leq C\|\vec{A}\|_{L_{t,x}^2(\mathbf{Q}_R)} < +\infty,\end{aligned}$$

et la preuve du Lemme 2.2.3 est terminée. ∎

Maintenant, nous pouvons traiter les termes $U_{1,a}$ et $U_{1,d}$ dans (2.2.19). En effet, pour le terme $U_{1,a}$ comme $\vec{\nabla}\wedge\vec{u} \in L_{t,x}^2(\mathbf{Q}_R)$, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $1 < \sigma_0 \leq q_0 \leq 6$, $\Phi = (\partial_t + \Delta)\psi$ et $\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}$ et pour le terme $U_{1,d}$ comme $\vec{\nabla}\wedge\vec{f} \in L_{t,x}^2(\mathbf{Q}_R)$ par hypothèse, nous utilisons $\Phi = \psi$ et $\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{f}$. Nous avons alors prouvé que

$$U_{1,a} + U_{1,d} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

1. Nous avons $\displaystyle\sup_{t>0}\left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{f}(s,\cdot)ds\right\|_{\dot{H}^1} \leq C\|\vec{f}\|_{L_{t,x}^2}$ (voir [61, Lemme 7.2]).

- Pour traiter le terme $U_{1,b}$ dans (2.2.19) nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.2.4. *Sous les hypothèses générales du Théorème 2.2.1 nous avons pour* $1 < p \leq q \leq 6$

$$\psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sum_{j=1}^{3} \partial_j \left((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) ds \right) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.2.21}$$

Preuve. Définissons $\vec{\mathcal{B}} = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sum_{j=1}^{3} \partial_j \left((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) ds$. Comme $1 < p \leq q \leq 6$, et en utilisant la propriété de localisation donnée dans le Lemme 2.1.3 et l'identification de l'espace $\mathcal{M}^{p,p}_{t,x} = L^p_{t,x}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sum_{j=1}^{3} \partial_j \left((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right) ds \right) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}} &= \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} (\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}} \\ \leq C \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} (\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) \right\|_{\mathcal{M}^{6,6}_{t,x}} &= C \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} (\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) \right\|_{L^6_{t,x}}. \end{aligned}$$

Définissons maintenant $\Delta \vec{\mathbb{B}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}$, où $\vec{\mathbb{B}} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \partial_j \big((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \big)(s, \cdot) \, ds$. En utilisant l'identité $\phi(\Delta \vec{\mathbb{B}}) = \Delta(\phi \vec{\mathbb{B}}) + (\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} - 2 \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \partial_i ((\partial_i \phi) \vec{\mathbb{B}})$ nous obtenons

$$\psi \Big(\frac{1}{(-\Delta)} \big(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} \big) \Big) \;=\; \psi \phi \vec{\mathbb{B}} + \psi \frac{1}{(-\Delta)} \Big((\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} \Big) - 2 \sum_{j=1}^{3} \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)} \Big((\partial_j \phi) \, \vec{\mathbb{B}} \Big). \tag{2.2.22}$$

Nous allons maintenant prouver que chacun des termes de la partie de droite de (2.2.22) appartient à l'espace $L^6_{t,x}$. Pour le premier terme, en utilisant les propriétés du support des fonctions ψ et ϕ données dans (2.2.8), par l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, par des estimations classiques du noyau de la chaleur, et le fait que les transformées de Riesz sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \| \psi \phi \vec{\mathbb{B}} \|_{L^6_{t,x}} &\leq C \| \vec{\mathbb{B}} \|_{L^\infty_t L^6_x} \leq C \| \vec{\mathbb{B}} \|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \\ &\leq C \sum_{j=1}^{3} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \left(\frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \partial_j \big((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \big) \right) (s, \cdot) \, ds \right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \\ &\leq C \sum_{j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \partial_j \big((\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \big) \right\|_{L^2_{t,x}} \leq C \sum_{j=1}^{3} \| (\partial_j \psi) \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \|_{L^2_{t,x}} \\ &\leq C \| \vec{u} \|_{L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Pour le deuxième terme de la partie de droite de (2.2.22), nous avons par les injections de Sobolev et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^3)$,

$$\left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} \right) \right\|_{L^6_{t,x}} \leq C \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \left((\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} \right) \right\|_{L^6_t \dot{H}^1_x} \leq C \left\| (\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_t \dot{H}^{-1}_x} \leq C \left\| (\Delta \phi) \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_t L^{\frac{6}{5}}_x}.$$

Maintenant, comme $\text{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_R$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Hölder ($\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$), et nous avons

$$\left\| (\Delta\phi) \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_t L^{\frac{6}{5}}_x} \leq C \left\| (\Delta\phi) \right\|_{L^\infty_t L^3_x} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_t L^2_x} \leq C \|\vec{\mathbb{B}}\|_{L^\infty_t L^6_x}.$$

Alors, par les mêmes arguments présentés dans (2.2.23) nous obtenons

$$\left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\Delta\phi) \vec{\mathbb{B}} \right) \right\|_{L^6_{t,x}} \leq C \|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty.$$

Pour le dernier terme de (2.2.22), par l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, l'inégalité de Hölder et les inégalités (2.2.23), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=j}^{3} \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)} \left((\partial_j \phi) \vec{\mathbb{B}} \right) \right\|_{L^6_{t,x}} &\leq C \sum_{j=1}^{3} \left\| \frac{\partial_j}{(-\Delta)} \left((\partial_j \phi) \vec{\mathbb{B}} \right) \right\|_{L^6_t \dot{H}^1_x} \leq C \sum_{j=1}^{3} \left\| (\partial_j \phi) \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_t L^2_x} \\
&\leq C \sum_{j=1}^{3} \|\partial_j \phi\|_{L^\infty_t L^3_x} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\mathbb{B}} \right\|_{L^6_{t,x}} \\
&\leq C \|\vec{\mathbb{B}}\|_{L^\infty_t L^6_x} \leq C \|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons finalement que $\psi \frac{1}{(-\Delta)} (\phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}})) \in \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, ce qui est le résultat souhaité. ■

Nous avons montré alors que pour $1 < \sigma_0 \leq q_0 \leq 6$, on a

$$U_{1,b} \in \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

- Le terme $U_{1,c}$ dans (2.2.19) peut être étudié avec les résultats précédents. En effet, nous utilisons la formule vectorielle $\psi \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) = \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) - (\vec{\nabla} \psi) \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \psi \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) ds \right) &= \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) ds \right) \\
&- \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\vec{\nabla} \psi) \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) ds \right). \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Rappelons que par hypothèse nous avons $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \in L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$, donc le premier terme de la partie de droite ci-dessus peut être traité à l'aide du Lemme 2.2.4 puisque cette expression partage la même structure que la formule (2.2.21). Le deuxième terme de l'identité précédente peut être étudié avec le Lemme 2.2.3, et nous obtenons finalement pour $1 < \sigma_0 \leq q_0 \leq 6$

$$U_{1,c} \quad \in \quad \mathcal{M}^{\sigma_0, q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Remarque 2.2.1. *Observons que, par les lemmes précédents, les termes $U_{1,c}$ et $U_{1,d}$ qui sont liés à $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ et $\vec{f}$ respectivement, appartiennent directement à $L^6_{t,x}$ et donc, ils vérifient la conclusion* (2.2.3). *Ainsi, l'information $\vec{f} \in L^2_{t,x}$ et $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_x \dot{H}^1_x$ est suffisante pour obtenir le gain d'intégrabilité annoncé pour $\vec{u}$.*

- Pour le terme $U_{1,e}$ de (2.2.19), nous utiliserons l'énoncé général suivant.

Lemme 2.2.5. *Considérons les fonctions auxiliaires ψ et ϕ définies dans* (2.2.8). *Si $\vec{A}, \vec{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux champs de vecteurs tels que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_0,q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_0,q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ avec $2 < p_0 \leq q_0, 5 < q_0 \leq 6$. alors pour $1 \leq j \leq 3$ nous avons*

$$\psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \wedge \partial_j(\psi A_j \vec{B}) ds \right) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

avec $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ où ν_0 est donné dans (2.2.6).

Preuve. Considérons la fonction $\vec{\mathcal{C}} = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \wedge \partial_j(\psi A_j \vec{B}) ds$ et nous définissons $\mathbb{C}$ par la formule

$$\vec{\mathbb{C}} = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \partial_j(\psi A_j \vec{B}) ds.$$

Comme $\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{C}} = \Delta \vec{\mathbb{C}}$, par l'identité classique $\phi \Delta \vec{\mathbb{C}} = \Delta(\phi \vec{\mathbb{C}}) - (\Delta\phi)\vec{\mathbb{C}} + 2\sum_{j=1}^3 \partial_j((\partial_j \phi)\vec{\mathcal{C}})$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\phi \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{C}} \right) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}} \leq \left\| \psi \phi \vec{\mathbb{C}} \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}} + \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)} ((\Delta\phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}} \\ + 2\sum_{j=1}^{3} \left\| \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)} ((\partial_j \phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}}. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Pour le premier terme ci-dessus, en utilisant les propriétés du noyau de la chaleur et la définition du potentiel de Riesz parabolique donnée dans (2.1.7), page 43, nous écrivons

$$\begin{aligned} |\psi \phi \vec{\mathbb{C}}(t,x)| &= \left| \psi \phi \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \partial_j(\psi A_j \vec{B}) ds \right| \\ &\leq |(\psi\phi)(t,x)| \left| \int_0^t (\partial_j e^{(t-s)\Delta}) \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) ds \right| \\ &\leq C|(\psi\phi)(t,x)| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|)^4} \left| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) \right| (s,y) dy ds \\ &\leq C|(\psi\phi)(t,x)| \mathcal{L}_1 \left(\left| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) \right| \right) (t,x), \end{aligned}$$

et en utilisant les propriétés du support des fonctions ψ et ϕ (voir (2.2.8)), nous avons

$$\left\| \psi \phi \vec{\mathbb{C}} \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}} \leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \mathcal{L}_1 \left(\left| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}}. \tag{2.2.26}$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le deuxième point du Corollaire 2.1.1, page 43 avec $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ et $5 < q_0 \leq 6$. Donc, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \mathcal{L}_1 \left(\left| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}} &\leq C \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\psi A_j \vec{B}) \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{p_0}{2},\frac{q_0}{2}}} \\ &\leq C \left\| \psi A_j \vec{B} \right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{p_0}{2},\frac{q_0}{2}}}, \end{aligned}$$

où, dans la dernière estimation ci-dessus, nous avons utilisé le fait que les transformées de Riesz sont bornées dans les espaces de Morrey. Maintenant, en utilisant les inégalités de Hölder, comme $\text{supp}(\psi) \subset \mathbf{Q}_R$, nous obtenons

$$\left\| \psi\phi\vec{\mathbb{C}} \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{A} \right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{B} \right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} < +\infty. \tag{2.2.27}$$

Pour les deuxième et troisième termes de (2.2.25), rappelons d'abord que les opérateurs $\frac{1}{(-\Delta)}$ et $\frac{\partial_j}{(-\Delta)}$ sont donnés par convolution avec les noyaux $\frac{1}{|x-y|}$ et $\frac{x_j-y_j}{|x-y|^3}$ et nous définissons alors les opérateurs $T_1(\vec{\mathbb{C}})$ et $T_{2,j}(\vec{\mathbb{C}})$ pour $1 \leq j \leq 3$, par

$$T_1(\vec{\mathbb{C}})(t,x) = \psi \frac{1}{(-\Delta)}((\Delta\phi)\vec{\mathbb{C}})(t,x) = \psi(t,x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \Delta\phi(t,y)\vec{\mathbb{C}}(t,y)dy \tag{2.2.28}$$

$$T_{2,j}(\vec{\mathbb{C}})(t,x) = \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)}((\partial_j\phi)\vec{\mathbb{C}})(t,x) = \psi(t,x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_j-y_j}{|x-y|^3} \partial_j\phi(t,y)\vec{\mathbb{C}}(t,y)dy. \tag{2.2.29}$$

Nous remarquons que les noyaux associés aux opérateurs T_1 et $T_{2,j}$ sont bornés dans $L^1(\mathbb{R}^3)$ en raison des propriétés du support des fonctions ψ et ϕ. En effet, pour T_1, observons que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\psi(t,x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \Delta\phi(t,y)dy = \psi(t,x) \int_{Q} \frac{1}{|x-y|} \Delta\phi(t,y)dy \leq C.$$

De façon similaire nous avons pour presque tout $y \in \mathbb{R}^3$,

$$\Delta\phi(t,y) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \psi(t,x)dx = \Delta\phi(t,y) \int_{Q} \frac{1}{|x-y|} \psi(t,x)dx \leq C.$$

Ainsi, par le test de Schur (cf. [45, Appendice A]), on obtient que $\|T_1\|_{L^1\to L^1} \leq C$. De façon similaire, nous avons $\|T_{2,j}\|_{L^1\to L^1} \leq C$ pour $1 \leq j \leq 3$. Donc, comme la norme de $\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ est invariante par translation, nous en déduisons (en tenant compte de la propriété $\text{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_R$) :

$$\begin{aligned} \|T_1(\vec{\mathbb{C}})\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &= \|T_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathbb{C}})\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathbb{C}}\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \\ \|T_{2,j}(\vec{\mathbb{C}})\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &= \|T_{2,j}(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathbb{C}})\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathbb{C}}\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}. \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

En conséquence, pour les deux derniers termes de (2.2.25), nous pouvons écrire

$$\left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)}((\Delta\phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} + 2\sum_{j=1}^{3} \left\| \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)}((\partial_j\phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathbb{C}}\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

Il suffit à présent d'appliquer les calculs effectués dans (2.2.26)-(2.2.27) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left\| \psi \frac{1}{(-\Delta)}((\Delta\phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} + 2\sum_{j=1}^{3} \left\| \psi \frac{\partial_j}{(-\Delta)}((\partial_j\phi)\vec{\mathbb{C}}) \right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &\leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A} \right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B} \right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

ce qui met fin à la preuve du Lemme 2.2.5. ■

Nous pouvons appliquer ce résultat au terme $U_{1,e}$ de (2.2.19) car nous avons par hypothèse l'information $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $2 < p_0 \leq q_0$ $5 < q_0 \leq 6$. Nous avons alors prouvé que

$$U_{1,e} \in \mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

- Le terme $U_{1,f}$ de (2.2.19) sera traité à l'aide du lemme suivant :

Lemme 2.2.6. *Considérons les fonctions ψ et ϕ données dans* (2.2.8). *Si $\vec{A}, \vec{B} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux champs de vecteurs tels que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $2 < p_0 \leq q_0, 5 < q_0 \leq 6$, alors pour $1 \leq j \leq 3$ nous avons*

$$\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds\right) \in \mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

avec $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ où ν_0 est donné dans (2.2.6).

Preuve. Écrivons $\vec{\mathcal{D}}_j(t,x) = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds$. Par les propriétés du noyau de la chaleur, nous avons

$$\begin{aligned} |\vec{\mathcal{D}}_j(t,x)| &\leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}|(\partial_j\psi)A_j\vec{B}(s,y)|dyds \\ &\leq C\mathcal{L}_1(|(\partial_j\psi)A_j\vec{B}|)(t,x), \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

où $\mathcal{L}_1$ est le potentiel de Riesz parabolique défini dans (2.1.7). Observons en plus que nous avons

$$\begin{aligned} \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &= \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{D}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \\ &\leq \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{\mathcal{D}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} + \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\mathcal{D}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}. \end{aligned}$$

À ce stade, nous remarquons que l'opérateur $\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge(\cdot)$ dans le premier terme ci-dessus est de la même structure que l'opérateur défini dans (2.2.29) tandis que l'opérateur $\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\cdot\right)$ donné dans le deuxième terme est de la même nature que l'opérateur donné dans (2.2.28), ainsi par les mêmes arguments utilisées dans (2.2.30), nous obtenons (en tenant compte des propriétés du support de la fonction ϕ) :

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

Maintenant, à l'aide de l'estimation ponctuelle (2.2.31) et par les propriétés du support de la fonction $(\partial_j\psi)$ nous avons

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}A_j\vec{B}|)\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

Nous appliquons maintenant le deuxième point du Corollaire 2.1.1, page 43 avec $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ et $\nu_0 = 1 - \frac{q_0-5}{5q_0}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\psi)A_j\vec{B}ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}A_j\vec{B}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p_0}{2},\frac{q_0}{2}}_{t,x}} \\ &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

où, dans la dernière ligne ci-dessus, nous avons utilisé l'inégalité de Hölder dans les espaces de Morrey. La preuve du Lemme 2.2.6 est donc terminée. ■

Puisque par hypothèse nous avons $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} < +\infty$, nous pouvons appliquer le lemme précédent aux cas où $\vec{A} = \vec{u}$ et $\vec{B} = \vec{u}$, et nous avons prouvé que

$$U_{1,f} \in \mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

- Pour le terme $U_{1,g}$ de (2.2.19), nous utilisons le résultat générique suivant.

Lemme 2.2.7. *Si $\vec{A},\vec{B} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux champs de vecteurs tels que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $2 < p_0 \leq q_0, 5 < q_0 \leq 6$, alors pour $1 \leq j \leq 3$ nous avons*

$$\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_j(\vec{\nabla}\psi\wedge(A_i\vec{B}))ds\right) \in \mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

avec $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ où ν_0 est donné dans (2.2.6).

Preuve. Considérons le champ de vecteurs $\vec{\mathcal{E}} = \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_j(\vec{\nabla}\psi\wedge(A_i\vec{B}))ds$. Par les propriétés de décroissance du noyau de la chaleur nous avons

$$\begin{aligned}\left|\vec{\mathcal{E}}(t,x)\right| &\leq \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\left|\partial_j e^{(t-s)\Delta}[\vec{\nabla}\psi\wedge(A_i\vec{B})(s,y)]\right|dyds\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}\left|\vec{\nabla}\psi\wedge(A_i\vec{B})(s,y)\right|dyds.\end{aligned}$$

En utilisant la définition du potentiel de Riesz donnée dans (2.1.7) et par les propriétés de la fonction test ψ définie dans (2.2.8), nous obtenons l'estimation ponctuelle :

$$|\vec{\mathcal{E}}(t,x)| \leq C\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{\nabla}\psi\wedge(A_i\vec{B})(t,x)|) \leq C\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}(t,x)\otimes\vec{B}(t,x)|). \quad (2.2.32)$$

En utilisant l'identité $\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}} = \vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{\mathcal{E}}\right) - \vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\mathcal{E}}$, nous avons

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{\mathcal{E}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} + \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

Rappelons que l'opérateur $\psi\frac{1}{(-\Delta)}\partial_i(\phi\ \cdot)$ est borné dans les espaces de Morrey comme il a été remarqué dans (2.2.30), et donc nous avons

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{\mathcal{E}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

D'une façon similaire, comme l'opérateur $\psi\frac{1}{(-\Delta)}(\phi\ \cdot)$ est borné dans les espaces de Morrey par (2.2.30), on a

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}.$$

Il s'ensuit que

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathcal{E}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}\otimes\vec{B}|)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}},$$

où nous avons utilisé l'estimation (2.2.32) ci-dessus. Ainsi, en utilisant le deuxième point du Corollaire 2.1.1, page 43, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{E}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &\leq \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}\otimes\vec{B}|)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \\ &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}\otimes\vec{B}|\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{p_0}{2},\frac{q_0}{2}}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} < +\infty,\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

où nous avons appliqué l'inégalité de Hölder dans le cadre des espaces de Morrey. Avec cette estimation, la preuve du Lemme 2.2.7 est terminée. ■

Encore une fois, comme par hypothèse nous avons $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} < +\infty$, nous pouvons appliquer le lemme précédent aux cas où $\vec{A}=\vec{u}$ et $\vec{B}=\vec{u}$ et il s'ensuit donc

$$U_{1,g}\in\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

- Pour le terme $U_{1,h}$ de (2.2.19), nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 2.2.8. *Si $\vec{A},\vec{B}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ sont deux champs de vecteurs tels que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A}\in\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B}\in\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $2<p_0\leq q_0, 5<q_0\leq 6$, alors pour $1\leq j\leq 3$, nous avons*

$$\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\partial_j\vec{\nabla}\psi)\wedge A_j\vec{B}ds\right)\in\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

avec $\sigma_0=\min\{\frac{p_0}{\nu_0},q_0\}$ où ν_0 est donné dans (2.2.6).

Preuve. Définissons $\vec{\mathcal{F}}=\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\partial_j\psi)\wedge A_j\vec{B}ds$. En utilisant les propriétés de décroissance du noyau de la chaleur et la définition du potentiel parabolique de Riesz $\mathcal{L}_2$ donnée dans (2.1.7), nous obtenons l'estimation suivante

$$|\vec{\mathcal{F}}(t,x)|\leq C\mathcal{L}_2(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|(\vec{\nabla}\partial_j\psi)\wedge A_j\vec{B}(t,x)|)\leq C\mathcal{L}_2(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}(|\vec{A}(t,x)\otimes\vec{B}(t,x)|)). \tag{2.2.34}$$

Ainsi, avec les mêmes arguments que ceux présentés dans le lemme précédent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{F}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} &\leq \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\left(\phi\vec{\mathcal{F}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}+\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\mathcal{F}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}} \\ &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\mathcal{F}}\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}},\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{F}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_2(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}\otimes\vec{B}|)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}. \tag{2.2.35}$$

Nous invoquons maintenant le Corollaire 2.1.2 pour estimer le terme ci-dessus et nous pouvons écrire

$$\left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\phi\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{F}}\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\sigma_0,q_0}_{t,x}}\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}|\vec{A}\otimes\vec{B}|\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{p_0}{2},\frac{q_0}{2}}_{t,x}}\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{A}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{B}\right\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}<+\infty,$$

et ceci termine la preuve du Lemme 2.2.8. ■

Comme précédemment, nous pouvons appliquer ce lemme aux cas où $\vec{A} = \vec{u}$ et $\vec{B} = \vec{u}$ et nous avons prouvé que
$$U_{1,h} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Fin de la preuve de la Proposition 2.2.2. Avec tous les lemmes précédents, nous avons prouvé que tous les termes de (2.2.19) appartiennent à l'espace de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et donc la fonction $\vec{U}_1$ appartient aussi à $\mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et ceci met fin à la preuve de la Proposition 2.2.2. ■

En revenant à la démonstration du Théorème 2.2.1, rappelons que l'on veut montrer que
$$\vec{U} = \vec{U}_1 - \vec{U}_2 + \vec{U}_3 \in L_{t,x}^{q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$
et pour cela nous allons appliquer un argument itératif. D'abord, observons que par la Proposition 2.2.1 on a $\vec{U}_2, \vec{U}_3 \in L_t^6 L_x^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et en particulier pour $\sigma_0 = \min\{\frac{p_0}{\nu_0}, q_0\}$ et (2.2.13), nous avons
$$\vec{U}_2, \vec{U}_3 \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.2.36}$$
D'autre part, en utilisant la Proposition 2.2.2, nous avons $\vec{U}_1 \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, et donc par (2.2.36) on obtient $\vec{U} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et comme $\vec{U} = \phi\vec{u}$ et $\phi \equiv 1$ sur $\mathbf{Q}_{r_1}$, il s'ensuit que
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$
Observons ainsi que nous avons obtenu une amélioration de l'information de type Morrey donnée dans l'hypothèse initiale (2.2.2) sur un ensemble plus petit. Maintenant, pour $0 < r_2 < r_1 < R$, l'on considère $\bar{\phi}$ une fonction test telle que $\bar{\phi} \equiv 1$ sur $\mathbf{Q}_{r_2}$ et $\operatorname{supp}(\bar{\phi}) \subset \mathbf{Q}_{r_1}$ et nous définissons $\vec{\mathfrak{U}} = \bar{\phi}\vec{u}$. En utilisant les mêmes idées que dans (2.2.10), nous pouvons réécrire de la même façon $\vec{\mathfrak{U}} = \vec{\mathfrak{U}}_1 - \vec{\mathfrak{U}}_2 + \vec{\mathfrak{U}}_3$. Observons que par la Proposition 2.2.2, nous avons $\vec{\mathfrak{U}}_1 \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0',q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ mais cette fois avec $\sigma_0' = \min\{\frac{\sigma_0}{\nu_0}, q_0\} = \min\{\frac{p_0}{\nu_0^2}, q_0\}$. De plus, par l'estimation 2.2.13, nous avons $\vec{\mathfrak{U}}_2, \vec{\mathfrak{U}}_3 \in L_{t,x}^{q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et donc nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\sigma_0',q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p_0}{\nu_0^n} = +\infty$, il s'ensuit que pour certain $0 < R_1 < R$ et $5 < q_0 \leq 6$ nous avons
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{q_0,q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = L_{t,x}^{q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$
et cette conclusion correspond au premier point (2.2.3) du Théorème 2.2.1. On a donc obtenu le gain d'intégrabilité souhaité pour la variable $\vec{u}$.

Étudions maintenant la vitesse de micro-rotation $\vec{\omega}$.

2.2.2. Gain d'intégrabilité pour la variable $\vec{\omega}$

Rappelons que dans l'étape précédente, nous avons montré que pour $0 < R_1 < R$, nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in L_{t,x}^{q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $5 < q_0 \leq 6$. Nous allons maintenant utiliser cette information pour étudier les propriétés d'intégrabilité de $\vec{\omega}$. Rappelons d'abord que la dynamique de $\vec{\omega}$ est donnée par la deuxième équation de (2.2.1) *i.e.*,
$$\partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}.$$

Notons que comme par hypothèse $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$, nous pouvons appliquer un argument d'interpolation et nous observons que

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\omega} \in L^{\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{\frac{10}{3},\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.2.37}$$

Ainsi, en utilisant ces informations sur $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, nous allons prouver qu'un gain d'intégrabilité pour $\vec{\omega}$ est possible. Pour cela, nous introduisons deux fonctions test $\varphi, \Psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour des boules paraboliques $\mathbf{Q}_{\rho_1}, \mathbf{Q}_{\rho_2}$ telles que $\mathbf{Q}_{\rho_2} \subset \mathbf{Q}_{\rho_1} \subset \mathbf{Q}_{R_1}$, nous avons

$$\varphi \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{Q}_{\rho_1} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbf{Q}_{R_1}, \tag{2.2.38}$$

$$\Psi \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{Q}_{\rho_2} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(\Psi) \subset \mathbf{Q}_{\rho_1}. \tag{2.2.39}$$

Rappelons que, par construction, nous avons $\varphi(0,\cdot) = \Psi(0,\cdot) = 0$ et que nous avons l'identité $\varphi\Psi = \Psi$ dans tout l'espace. Dans la proposition suivante, nous montrerons comment obtenir un premier gain d'intégrabilité sur $\vec{\omega}$:

Proposition 2.2.3. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.1 et en considérant le cadre local énoncé ci-dessus dans* (2.2.38)-(2.2.39)*, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\rho_2}}\vec{\omega} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \textit{avec} \qquad \frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}. \tag{2.2.40}$$

Remarque 2.2.2. *La borne supérieure $q \leq \frac{15}{4}$ est essentiellement technique et elle est liée à l'information que nous avons sur $\vec{\omega}$ comme nous le verrons plus tard. Néanmoins remarquons que* (2.2.40) *représente déjà une amélioration de l'information donnée dans* (2.2.37)*.*

Preuve. Définissons $\vec{W} = \Psi\vec{\omega}$ et nous allons prouver que $\vec{W} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ ce qui implique (2.2.40). Par les propriétés des fonctions φ et Ψ données dans (2.2.38) et (2.2.39), nous avons l'identité suivante

$$\begin{aligned}
\vec{W} = \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Delta(\Psi\vec{\omega})\right) &= \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}(\Psi\Delta\vec{\omega})\right) - \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}((\Delta\Psi)\vec{\omega})\right)\\
&\quad +2\sum_{i=1}^{3}\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\partial_i\big((\partial_i\Psi)\vec{\omega}\big)\right)\\
&= \vec{W}_1 - \vec{W}_2 + \vec{W}_3.
\end{aligned}$$

Comme nous avons $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$ et en suivant les mêmes arguments donnés dans la Proposition 2.2.1 nous obtenons que $\vec{W}_2, \vec{W}_3 \in L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{6,6}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ ce qui est le résultat attendu. Nous avons donc besoin de traiter uniquement le terme $\vec{W}_1$.

Pour cela, en utilisant le Lemme 2.2.1, page 48, nous pouvons réécrire le champ de vecteurs $\vec{W}_1$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{W}_1 &= \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Delta(\Psi\vec{\omega})\right) = -\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\Psi(\vec{\nabla}\wedge[\varphi\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}])\right)\right) + \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\Psi(\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right)\right)\\
&= \underbrace{-\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\Psi(\vec{\nabla}\wedge[\varphi\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}])\right)\right)}_{(\vec{W}_{1,a})} + \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}(\Psi\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right)\right)}_{(\vec{W}_{1,b})}\\
&\quad \underbrace{-\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left((\vec{\nabla}\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega})\right)\right)}_{(\vec{W}_{1,c})},
\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

où dans la dernière ligne nous avons utilisé l'identité vectorielle

$$\Psi(\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})) = \vec{\nabla}(\Psi\operatorname{div}(\vec{\omega})) - (\vec{\nabla}\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega}).$$

Nous allons maintenant prouver que chaque terme $\vec{W}_{1,a}$, $\vec{W}_{1,b}$ et $\vec{W}_{1,c}$ appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$. Pour traiter le terme $\vec{W}_{1,a}$ de (2.2.41), nous introduisons la variable

$$\vec{\mathcal{W}}_a = \varphi\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}, \tag{2.2.42}$$

et donc nous avons $\vec{W}_{1,a} = \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\Psi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{W}}_a)\right)\right)$.

Notons que par les propriétés de localisation de la fonction φ nous avons $\vec{\mathcal{W}}_a(0,\cdot) = 0$. Étudions alors la dynamique de cette variable $\vec{\mathcal{W}}_a$. Ainsi, en appliquant l'opérateur rotationnel à la deuxième équation du système micro-polaire (puisque nous avons l'identité vectorielle $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) = 0$), nous obtenons :

$$\partial_t(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) = \Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) - \vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}\right) - \vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}).$$

En introduisant la fonction de localisation φ définie dans (2.2.38) dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\partial_t[\varphi\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}] = \partial_t\varphi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \varphi\left(\Delta(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) - \vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} - \vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}\right) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right).$$

Par la définition de la variable $\vec{\mathcal{W}}_a$ donnée dans (2.2.42), nous avons

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{\mathcal{W}}_a &= \Delta\vec{\mathcal{W}}_a + (\partial_t\varphi + \Delta\varphi - \varphi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\varphi)\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right)\\ &\quad -\varphi\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}\right) + \frac{1}{2}\varphi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}).\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 2.2.2, page 50 (rappelons que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$), nous pouvons modifier le terme $\varphi\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}\right)$ et on obtient

$$\varphi\vec{\nabla}\wedge(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}\partial_j(\varphi u_j\vec{\omega}) - \vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\varphi)u_j\vec{\omega} - \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\vec{\nabla}\varphi\wedge u_j\vec{\omega}) + \sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}\partial_j\varphi)\wedge u_j\vec{\omega}.$$

Ainsi, avec cette formule, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{\mathcal{W}}_a &= \Delta\vec{\mathcal{W}}_a + (\partial_t\varphi + \Delta\varphi - \varphi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\varphi)\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right) - \vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}\partial_j(\varphi u_j\vec{\omega})\\ &\quad +\vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\varphi)u_j\vec{\omega} + \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\vec{\nabla}\varphi\wedge u_j\vec{\omega}) - \sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}\partial_j\varphi)\wedge u_j\vec{\omega} + \frac{1}{2}\varphi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}),\end{aligned}$$

et puisque par construction nous avons $\vec{\mathcal{W}}_a(0,\cdot) = 0$, en utilisant la formule de Duhamel nous obtenons

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{W}}_a &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Bigg((\partial_t\varphi + \Delta\varphi - \varphi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) - 2\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left((\partial_j\varphi)\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right) + \frac{1}{2}\varphi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\\ &\quad -\vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}\partial_j(\varphi u_j\vec{\omega}) + \vec{\nabla}\wedge\sum_{j=1}^{3}(\partial_j\varphi)u_j\vec{\omega} + \sum_{j=1}^{3}\partial_j(\vec{\nabla}\varphi\wedge u_j\vec{\omega}) + \sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}\partial_j\varphi)\wedge u_j\vec{\omega}\Bigg)ds.\end{aligned}$$

En injectant cette expression dans la définition de la variable $\vec{W}_{1,a} = \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\Psi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{W}}_a)\right)\right)$, nous obtenons la formule suivante

$$\vec{W}_{1,a} = \underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\partial_t\varphi+\Delta\varphi-\varphi)(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})ds\right)}_{(1)} \tag{2.2.43}$$
$$-2\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_j\left((\partial_j\varphi)\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right)ds\right)}_{(2)}+\frac{1}{2}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\varphi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})ds\right)}_{(3)}$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge\partial_j(\varphi u_j\vec{\omega})ds\right)}_{(4)}+\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\varphi)u_j\vec{\omega}ds\right)}_{(5)}$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_j(\vec{\nabla}\varphi\wedge u_j\vec{\omega})ds\right)}_{(6)}-\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\partial_j\varphi)\wedge u_j\vec{\omega}ds\right)}_{(7)}.$$

Dans les prochains points nous allons donc prouver que tous les termes précédents appartiennent à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$.

- Pour le terme (1) de (2.2.43) comme $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\in L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ nous pouvons utiliser le Lemme 2.2.3 avec $p=q=6$ et donc on obtient que le terme (1) appartiennent à l'espace $L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ (voir l'estimation (2.2.20) ci-dessus) et grâce aux propriétés de localisation de la fonction φ données dans (2.2.38), nous en déduisons par le Lemme 2.1.3, page 43, que $(1)\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$.

- Pour le terme (2) de (2.2.43), puisque $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\in L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.4 page 53, et donc nous avons que le terme (2) appartient à l'espace $L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, d'où nous obtenons $(2)\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$.

- Le terme (3) de (2.2.43) peut être traité comme dans la formule (2.2.24) et puisque $\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\in L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ nous obtenons $(3)\in\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$.

- En suivant les mêmes idées que celles données dans le Lemme 2.2.5 (voir en particulier les estimations (2.2.26)-(2.2.30), nous pouvons traiter le terme (4) de (2.2.43). Ainsi par les propriétés du support des fonctions φ et Ψ nous avons

$$\begin{aligned}&\left\|\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge\partial_j(\varphi u_j\vec{\omega})ds\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}\\ &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1\left(\left|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{u}\otimes\vec{\omega})\right|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Maintenant, considérons le paramètre $q_1>0$ tel que

$$\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_0}+\frac{3}{10}. \tag{2.2.45}$$

Notons que $2 < q_1 \leq \frac{15}{7}$ puisque $5 < q_0 \leq 6$, en plus, en définissant $\nu_1 = 1 - \frac{q_1}{5}$ et comme $1 < \frac{5}{q_1}$, nous avons

$$\frac{10}{3} < \frac{q_1}{\nu_1} \leq \frac{15}{4}. \tag{2.2.46}$$

Ainsi, comme $\frac{10}{3} < q \leq \frac{15}{4}$ nous pouvons fixer q_1 tel que $q \leq \frac{q_1}{\nu_1}$ et donc par le Lemme 2.1.3, page 43, nous avons

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1\left(\left|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{u}\vec{\omega})\right|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1\left(\left|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{u}\otimes\vec{\omega})\right|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{q_1}{\nu_1},\frac{q_1}{\nu_1}}_{t,x}}.$$

Ensuite, en utilisant le Lemme 2.1.4, page 43, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1\left(\left|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{u}\otimes\vec{\omega})\right|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{q_1}{\nu_1},\frac{q_1}{\nu_1}}_{t,x}} &\leq \left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge(\varphi\vec{u}\otimes\vec{\omega})\right\|_{\mathcal{M}^{q_1,q_1}_{t,x}}\\ &\leq \|\varphi\vec{u}\otimes\vec{\omega}\|_{L^{q_1}_tL^{q_1}_x},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identification entre les espaces de Morrey et de Lebesgue, le fait que les transformées de Riesz sont bornées dans les espaces de Lebesgue. Ainsi, comme $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_0} + \frac{3}{10}$ et par les inégalités de Hölder habituelles, nous obtenons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\otimes\vec{\omega}\|_{L^{q_1}_tL^{q_1}_x} \leq \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{L^{q_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\omega}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}} < +\infty, \tag{2.2.47}$$

qui est une quantité finie puisque nous avons déjà prouvé $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{L^{q_0}_{t,x}} < +\infty$ et par (2.2.37) nous avons l'information $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\omega}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}} < +\infty$. On obtient donc que $(4) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

Remarque 2.2.3. *Observons que l'intervalle $\frac{10}{3} < q \leq \frac{15}{4}$ est déterminé par* (2.2.46)*, ce qui découle de l'application du Lemme 2.1.4. Bien que nous n'avons pas une grande marge pour les valeurs de q, celles-ci représentent déjà une amélioration de l'intégrabilité de $\vec{\omega}$ car $q > \frac{10}{3}$.*

- Pour le terme (5) de (2.2.43), par les mêmes arguments que ceux présentés dans le Lemme 2.2.7 (voir l'inégalité (2.2.33)), nous obtenons l'estimation suivante

$$\left\|\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\partial_j\varphi)u_j\vec{\omega}ds\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}|\vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}, \tag{2.2.48}$$

en suivant les idées du point précédent (voir la formule (2.2.47)), nous pouvons écrire

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}|\vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq \left\|\mathcal{L}_1(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}|\vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{q_1}{\nu_1},\frac{q_1}{\nu_1}}_{t,x}} \leq \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{L^{q_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{\omega}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}} < +\infty,$$

et nous avons prouvé $(5) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

- Comme le terme (6) de (2.2.43) partage la même structure que le terme (5) par les mêmes arguments, nous obtenons $(6) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.
- Pour le terme (7) de (2.2.43), en suivant les mêmes idées que celles exposées dans la preuve du Lemme 2.2.8 (voir en particulier les estimations (2.2.34)-(2.2.35)), on peut écrire

$$\left\|\varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\Psi\vec{\nabla}\wedge\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\partial_j\varphi)\wedge u_j\vec{\omega}ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}. \tag{2.2.49}$$

Encore une fois, puisque $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$ et $2 < q_1 \leq \frac{15}{7}$, nous avons $2 < \frac{5}{q_1}$ et si l'on définit $\nu_1 = 1 - \frac{2q_1}{5}$ alors on a $10 < \frac{q_1}{\nu_1} \leq 15$. Ainsi par le Lemme 2.1.3 et par le Lemme 2.1.4 on a

$$\begin{aligned} C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq C\|\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u}\otimes\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{q_1}{\nu_1},\frac{q_1}{\nu_1}}_{t,x}} \\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u}\otimes\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{q_1,q_1}_{t,x}} = C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u}\otimes\vec{\omega}\|_{L^{q_1}_t L^{q_1}_x}, \end{aligned}$$

et une fois avec cette estimation, en rappelant les inégalités (2.2.47), nous pouvons conclure que $(7) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

Avec les estimations pour les termes (1)-(7) de (2.2.43), nous avons prouvé que le terme $\vec{W}_{1,a}$ donné dans (2.2.41) appartient à l'espace $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

Nous étudions maintenant le terme $\vec{W}_{1,b}$ défini dans (2.2.41) et pour cela nous définissons la variable

$$\mathcal{W}_b = \Psi\,\mathrm{div}(\vec{\omega}),$$

qui satisfait le système suivant (dérivé de la deuxième équation de (2.3.1)) :

$$\partial_t \mathcal{W}_b = 2\Delta\mathcal{W}_b + (\partial_t\Psi + 2\Delta\Psi - \Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - 4\sum_{j=1}^{3}\partial_j((\partial_j\Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})) - \Psi\,\mathrm{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}),$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathrm{div}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) = 0$. En utilisant les propriétés du support de la fonction Ψ (voir (2.2.39)), on a $\mathcal{W}_b(0,\cdot) = 0$, et on peut écrire par la formule de Duhamel :

$$\mathcal{W}_b = \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big((\partial_t\Psi + 2\Delta\Psi - \Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - 4\sum_{j=1}^{3}\partial_j((\partial_j\Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})) - \Psi\,\mathrm{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega})\Big)ds,$$

et comme $\vec{W}_{1,b} = \varphi\left(\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\mathcal{W}_b\right)\right)$ nous avons

$$\begin{aligned} \vec{W}_{1,b} &= \underbrace{\Psi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big((\partial_t\Psi + 2\Delta\Psi - \Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\Big)ds}_{(1)} \\ &\quad -4\sum_{j=1}^{3}\underbrace{\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\partial_j((\partial_j\Psi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}))\Big)ds}_{(2)} \\ &\quad \underbrace{-\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\Psi\,\mathrm{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega})\Big)ds}_{(3)}. \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

Nous montrerons maintenant que chaque terme ci-dessus appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec les indices $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

- Pour le premier terme de (2.2.50), fixons $\phi = (\partial_t\Psi + 2\Delta\Psi - \Psi)$. Puisque nous avons $p \leq q \leq \frac{15}{4} < 6$, par le Lemme 2.1.3, page 43, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\,\mathrm{div}(\vec{\omega})ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq \left\|\psi\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\,\mathrm{div}(\vec{\omega})ds\right)\right\|_{L^6_tL^6_x} \\ &\leq \|\psi\|_{L^6_tL^\infty_x}\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\,\mathrm{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_tL^6_x}, \end{aligned}$$

et par l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\psi \frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi)\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right)\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\left(\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right)\right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}\\
&\leq C\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les propriétés du noyau de la chaleur, l'injection $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$, l'inégalité de Hölder et les propriétés de la fonction ϕ, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\phi\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x} &\leq C\|\phi\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} \leq C\|\phi\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_t L^{\frac{6}{5}}_x}\\
&\leq C\|\phi\|_{L^\infty_t L^3_x}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_t L^2_x} < +\infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que la quantité (1) de (2.2.50) appartient à l'espace souhaité $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

- Pour le deuxième terme de (2.2.50), par les mêmes arguments ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\partial_j((\partial_j\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega}))\Big)ds\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq C\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\partial_j((\partial_j\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega}))\Big)ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x}\\
&\leq C\left\|\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}(\partial_j\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega})ds\right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}\\
&\leq C\|(\partial_j\Psi)\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_{t,x}}\\
&\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2_t L^2_x} < +\infty,
\end{aligned}$$

et donc $(2) \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

- Pour le dernier terme de (2.2.50), nous allons étudier la quantité

$$\left\|\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\Psi\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega})\Big)ds\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}. \tag{2.2.51}$$

Observons que comme $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ nous pouvons écrire $\Psi\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}) = \Psi\operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}))$. Ainsi, il est suffisant d'étudier les termes de la forme $\Psi\partial_i(\partial_j(u_k w_\ell))$ pour $1 \leq i,j,k, \leq 3$, que l'on peut réécrire de la manière suivante

$$\Psi\partial_i(\partial_j(u_k w_\ell)) = \partial_i(\partial_j(\Psi u_k w_\ell)) - \partial_i((\partial_j\Psi)u_k w_\ell) - \partial_j((\partial_i\Psi)u_k w_\ell) - (\partial_i\partial_j\Psi)u_k w_\ell. \tag{2.2.52}$$

Étudions ainsi chaque terme de l'expression ci-dessous. D'abord, nous avons

$$\left\|\varphi\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i(\partial_j(\Psi u_k w_\ell))ds\right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Notons que cette expression a la même forme que le côté gauche de la formule (2.2.44) et donc, par les mêmes arguments que ceux présentés dans (2.2.44)-(2.2.47), nous obtenons que cette quantité est bornée dans l'espace de Morrey souhaité $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Comme le deuxième et troisième terme de (2.2.52) ont la même structure, nous n'étudions qu'un seul d'entre eux. Donc, si nous écrivons

$$\left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} \partial_i ((\partial_j \varphi) u_k w_\ell) ds \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}},$$

il s'ensuit que ce terme peut être traité comme le côté gauche de (2.2.48) et donc nous obtenons que cette quantité est bornée. Enfin, pour le dernier terme de (2.2.52), nous écrivons

$$\left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \int_0^t e^{2(t-s)\Delta} (\partial_i \partial_j \varphi) u_k w_\ell ds \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}},$$

et en suivant les calculs effectués dans (2.2.49), nous obtenons également que cette quantité est bornée dans l'espace de Morrey correspondant. Nous avons étudié tous les termes de (2.2.52) et nous en déduisons que la quantité (2.2.51) appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

Nous avons montré ainsi que $\vec{W}_{1,b}$ défini dans (2.2.41) appartient à $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3} < p \leq q \leq \frac{15}{4}$.

Étudions maintenant le dernier terme de (2.2.41) :

$$\|\vec{W}_{1,c}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \Big((\vec{\nabla} \Psi) \operatorname{div}(\vec{\omega}) \Big) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Introduisons la fonction $\vec{\phi} = \vec{\nabla}\Psi$, et par l'identité $\phi_j \partial_k (w_\ell) = \partial_k (\phi_j w_\ell) - (\partial_k \phi_j) w_\ell$, il suffit de considérer les quantités

$$\left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\partial_k (\phi_j w_\ell)\right) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}, \qquad \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\partial_k \phi_j) w_\ell\right) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}, \tag{2.2.53}$$

pour tout $1 \leq j, k \leq 3$. Pour le premier terme ci-dessus, en utilisant les propriétés du support de la fonction φ, le fait que $p \leq q < 6$ et l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\partial_k (\phi_j w_\ell)\right) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq C \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left(\partial_k (\phi_j w_\ell)\right) \right\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \left(\partial_k (\phi_j w_\ell)\right) \right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq C \|\phi_j w_\ell\|_{L^\infty_t L^2_x} < +\infty, \end{aligned}$$

puisque nous avons $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x} < +\infty$. Pour le deuxième terme de (2.2.53), nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\partial_k \phi_j) w_\ell\right) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} &\leq C \left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\partial_k \phi_j) w_\ell\right) \right\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \left((\partial_k \phi_j) w_\ell\right) \right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq C \|(\partial_k \phi_j) w_\ell\|_{L^\infty_t \dot{H}^{-1}_x}, \end{aligned}$$

et par l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, nous pouvons écrire

$$\left\| \varphi \frac{1}{(-\Delta)} \left((\partial_k \phi_j) w_\ell\right) \right\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \leq C \|(\partial_k \phi_j) w_\ell\|_{L^\infty_t L^{\frac{6}{5}}_x} \leq \|\partial_k \phi_i\|_{L^\infty_t L^3_x} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} w_\ell\|_{L^\infty_t L^2_x} < +\infty.$$

Nous avons prouvé que tous les termes de (2.2.53) appartiennent à l'espace de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$ et donc nous avons que $\vec{W}_{1,c}\in\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Enfin, comme tous les termes de l'expression (2.2.41) appartiennent à l'espace de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, nous avons $\vec{W}\in\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et comme $\vec{W}=\Psi\vec{\omega}$, et $\Psi\equiv 1$ dans $\mathbf{Q}_{\rho_2}$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\rho_2}}\vec{\omega}\in\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\quad\text{avec}\qquad\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4},$$

et ceci met fin à la preuve de la Proposition 2.2.3. ■

Fin de la démonstration du Théorème 2.2.1. Nous avons obtenu jusqu'à présent l'information locale $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\in\mathcal{M}_{t,x}^{p,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ pour tout $\frac{10}{3}<p\leq q\leq\frac{15}{4}$ et en particulier quand $p=q$, grâce au Lemme 2.1.3 et à l'identification des espaces de Morrey et de Lebesgue, on a $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\in\mathcal{M}_{t,x}^{q,q}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)=L_t^qL_x^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{10}{3}<q\leq\frac{15}{4}$ ce qui est un gain d'information par rapport à (2.2.37).

Il suffit alors de replacer cette information dans les arguments précédents en modifiant le paramètre (2.2.45) et en réduisant si nécessaire le support des fonctions auxiliaires pour obtenir un contrôle d'intégrabilité supérieur, et par des itérations appropriées on obtient finalement que pour certain $0<R_2<R$ et pour $5<q_0\leq 6$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\in L_{t,x}^{q_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

ce qui correspond à l'estimation souhaitée (2.2.4), et donc la démonstration du Théorème 2.2.1 est terminée. ■

Observons alors que, grâce au Théorème 2.2.1, nous pouvons voir comment l'information de type Morrey sur la vitesse $\vec{u}$ implique un gain d'intégrabilité assez fort sur $\vec{u}$ mais aussi sur $\vec{\omega}$, reflétant ainsi le rôle dominant de cette variable. Bien que nous n'ayons pas encore obtenu de gain de régularité pour la solution $(\vec{u},\vec{\omega})$, nous étudierons dans la prochaine section, l'interdépendance entre $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ dans le cadre de la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, où le Théorème 2.2.1 jouera un rôle fondamental.

2.3. Régularité Höldérienne des équations micro-polaires

Dans cette section, nous allons étudier la régularité Höldérienne des solutions faibles des équations micro-polaires. Ce système est donné par

$$\begin{cases}\partial_t\vec{u}=\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u})-\vec{\nabla}p+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}+\vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u})=0,\\[2mm] \partial_t\vec{\omega}=\Delta\vec{\omega}+\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega})-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}-\vec{\omega}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}.\end{cases}\tag{2.3.1}$$

Rappelons qu'une première approche sur ce sujet a été réalisée dans l'article [19], où il a été montré que si nous faisons un traitement complètement symétrique des variables $(\vec{u},\vec{\omega})$, il est possible d'adapter la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg décrite à la page 39. En effet, si l'on suppose un contrôle de petitesse du gradient de $(\vec{u},\vec{\omega})$ et une information d'intégrabilité additionnelle sur $\vec{\omega}$, nous pouvons en déduire la régularité Höldérienne des solutions complètement adaptées. Cette notion de solution est donnée par la définition suivante.

Définition 2.3.1 (Solutions complètement adaptées). *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible des équations micro-polaires* (2.3.1) *sur $\mathbf{Q}_R$ au sens de la Définition 2, page 9 telle que $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ et $\vec{f} \in L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$. On dira que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une* solution complètement adaptée *si la distribution*

$$\begin{aligned} \mu \;=\; & -\partial_t(|\vec{u}|^2 + |\vec{\omega}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2 + |\vec{\omega}|^2) - 2(|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 + |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2) + 2\vec{f} \cdot \vec{u} \\ & -\operatorname{div}\left((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u} + |\vec{u}|^2\vec{\omega}\right) + 2\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} - 2|\vec{\omega}|^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot \vec{\omega}, \end{aligned}$$

est une mesure non-négative localement finie sur $\mathbf{Q}_R$.

L'idée de considérer ce type de solution vient du fait que, pour adapter la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, nous avons besoin d'une inégalité d'énergie locale qui soit vérifiée pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$. Toutefois, ceci conduira à ajouter des conditions supplémentaires d'intégrabilité sur $\vec{\omega}$.

Cependant, dans les pages qui suivent, nous allons voir qu'il est possible de se débarrasser de toutes les hypothèses sur $\vec{\omega}$ et d'obtenir la régularité höldérienne des équations micro-polaires en reflétant l'effet de domination de la vitesse $\vec{u}$ décrit dans la Définition 2.1.1. En effet, nous pouvons obtenir la régularité souhaitée en supposant uniquement une condition de petitesse sur le gradient de la vitesse $\vec{u}$.

Pour cela, et comme nous nous intéressons à une séparation des informations entre les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, nous aurons besoin d'une inégalité d'énergie qui soit vérifiée uniquement pour la vitesse $\vec{u}$, ce qui nous a amenés à introduire un nouveau concept de solution.

2.3.1. Des solutions partiellement adaptées

La définition suivante sera fondamentale tout au long du développement de cette section et du Chapitre 3 et elle constitue l'une des principales nouveautés de notre travail.

Définition 2.3.2 (Solutions partiellement adaptées). *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible des équations micro-polaires* (2.3.1) *sur la boule parabolique $\mathbf{Q}_R$ au sens de la Définition 2, page 9 telle que $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ et $\vec{f} \in L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$. Nous dirons que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une* solution partiellement adaptée *sur $\mathbf{Q}_R$ si la distribution μ donnée par*

$$\mu \;= -\partial_t(|\vec{u}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2) - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - \operatorname{div}((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot \vec{u} + 2\vec{f} \cdot \vec{u},$$

est une mesure non-négative localement finie sur $\mathbf{Q}_R$.

Observons que le fait que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \in L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ (rappelons que $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$) et les hypothèses sur la force et sur la pression font que la mesure μ est bien définie.

De plus, nous pouvons voir que si $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée, alors elle vérifie l'inégalité d'énergie suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{Q}_R)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \phi(t,y)dy + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi dyds \le \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi + \Delta\phi)|\vec{u}|^2 dyds + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi)dyds \\ & + \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\phi dyds + \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\phi\vec{u})dyds + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot (\phi\vec{u})dyds. \end{aligned}$$

Il est important remarquer que si l'on réalise une comparaison entre les solutions complètement adaptées et la notion ci-dessus, il est clair que nous avons moins de termes à gérer et ce qui nous a amène à ne pas ajouter des conditions supplémentaires sur $\vec{\omega}$ comme il a été fait dans [19]. De plus, nous constaterons que si nous travaillons dans le cadre des solutions *partiellement adaptées*, nous sommes en mesure d'obtenir un résultat plus favorable qui met en évidence la domination de la vitesse $\vec{u}$ par rapport aux autres variables.

2.3.2. Le critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Le théorème principal de cette section, tel que présenté dans [21], est le suivant

Théorème 2.3.1. *Soient $R>0$ et $(t_0,x_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ et nous considérons la boule parabolique $\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)=]t_0-R^2,t_0+R^2[\times B_{x_0,R}$. Soit $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée des équations micro-polaires* (2.3.1) *sur $\mathbf{Q}_R$ au sens de la Définition 2.3.2 . Supposons que pour certain $0<\alpha<\frac{1}{24}$ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f}\in L^2_t\dot{H}^1_x\cap\mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_a}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ pour $\tau_a>\frac{5}{2-\alpha}$. S'il existe une constante $0<\varepsilon\ll 1$ telle que*

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds<\varepsilon, \tag{2.3.2}$$

alors la solution $(\vec{u},\vec{\omega})$ est Hölder continue d'exposant $\alpha>0$ en variable de temps et d'espace dans un voisinage du point (t_0,x_0).

Il est important de noter qu'il est possible d'obtenir la régularité Höldérienne en variable de temps et d'espace pour les deux champs vectoriels $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en n'imposant que des conditions locales sur la vitesse $\vec{u}$, et donc nous obtenons un phénomène de domination, au sens de la Définition 2.1.1. Toutefois, la borne supérieure pour l'indice de régularité höldérienne $0<\alpha<\frac{1}{24}$ est de nature technique. Elle est liée aux estimations obtenues, qui nous permettent d'appliquer le Lemme 2.1.5. Remarquons que nous ne revendiquons aucune optimalité de cette borne.

D'autre part, il est intéressant de remarquer que, comme la solution est höldérienne sur un ensemble borné, nous pouvons également déduire que la solution est bornée autour des points (t_0,x_0) qui satisfont l'hypothèse (2.3.2). Ceci, comme nous le verrons dans la section suivante, impliquera que la solution est en fait assez régulière (en fonction de l'information que nous avons sur la force extérieure).

Parlons maintenant de la démonstration du Théorème 2.3.1. Pour cela, inspirés du travail de Kukavica dans [57], la stratégie est basée sur un argument itératif qui permet d'obtenir un gain d'information de type Morrey pour la vitesse $\vec{u}$ à partir de l'hypothèse de petitesse du gradient. Puis, en utilisant le Théorème 2.2.1, obtenu dans la section précédente, on peut déduire un gain d'intégrabilité pour les deux variables $(\vec{u},\vec{\omega})$. Ensuite, en appliquant le Lemme 2.1.5, page 44, nous en déduirons la régularité souhaitée.

Remarque 2.3.1. *L'hypothèse sur la force extérieure $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f}\in L^2_t\dot{H}^1_x$, provient du fait que nous allons appliquer le Théorème 2.2.1 pour lequel cette condition est nécessaire.*

Démonstration du Théorème 2.3.1. Soit le point $(t_0,x_0)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ tel que nous avons l'hypothèse (2.1.3) *i.e.*,

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds<\varepsilon.$$

Soit la fonction $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $\psi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\operatorname{supp}(\psi)\subset]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[\times B_{0,\frac{1}{2}}$ et $\psi\equiv 1$ sur $]-\frac{1}{16},\frac{1}{16}[\times B_{0,\frac{1}{4}}$. Considérons $0<\mathfrak{R}<\min\left\{\frac{\sqrt{t_0}}{2},\frac{R}{2},\frac{1}{2}\right\}$, et la fonction test $\eta(t,x)=\psi\left(\frac{t-t_0}{\mathfrak{R}^2},\frac{x-x_0}{\mathfrak{R}}\right)$, et nous définissons la fonction

$$\vec{\mathcal{U}}=\eta(\vec{u}+\vec{\omega}).$$

Maintenant, afin d'obtenir la régularité Hölderienne de $(\vec{u}, \vec{\omega})$, observons qu'il suffit de montrer que $\vec{\mathcal{U}}$ est Hölder continue. En effet, comme la stratégie consiste à appliquer le Lemme 2.1.5, page 2.1.5, à l'équation vérifiée par $\vec{\mathcal{U}}$, nous pouvons réaliser une étude exactement identique pour les fonctions $\vec{\mathcal{U}}_1 = \eta\vec{u}$ et $\vec{\mathcal{U}}_2 = \eta\vec{\omega}$. Ensuite, comme $\eta \equiv 1$ sur $\mathbf{Q}_{\frac{\mathfrak{R}}{2}}$, nous déduisons que les fonctions $(\vec{u}, \vec{\omega})$ sont Hölder continues sur une petite boule parabolique centrée en (t_0, x_0).

Montrons ainsi que $\vec{\mathcal{U}}$ est Hölderienne. Comme $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution des équations micro-polaires (2.1.1), nous avons

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{\mathcal{U}} &= (\partial_t\eta)(\vec{u}+\vec{\omega}) + \eta\Delta(\vec{u}+\vec{\omega}) - \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \eta\vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\eta\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\\ &\quad +\eta\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \eta\vec{\omega} - \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\eta\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \eta\vec{f}.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant l'identité $\eta\Delta(\vec{u}+\vec{\omega}) = \Delta\vec{\mathcal{U}} - \Delta\eta(\vec{u}+\vec{\omega}) - 2\sum_{i=1}^{3}(\partial_i\eta)(\partial_i(\vec{u}+\vec{\omega}))$, nous obtenons l'équation suivante

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{\mathcal{U}} &= \Delta\vec{\mathcal{U}} + (\partial_t\eta - \Delta\eta)(\vec{u}+\vec{\omega}) - 2\sum_{i=1}^{3}(\partial_i\eta)(\partial_i(\vec{u}+\vec{\omega})) - \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \eta\vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\eta\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\\ &\quad +\eta\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \eta\vec{\omega} - \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\eta\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \eta\vec{f}.\end{aligned}$$

Étant donné que nous avons les identités

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(\partial_i\eta)(\partial_i(\vec{u}+\vec{\omega})) &= \sum_{i=1}^{3}\partial_i((\partial_i\eta)(\vec{u}+\vec{\omega})) - (\Delta\eta)(\vec{u}+\vec{\omega}),\\ \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) &= \operatorname{div}(\eta\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{u}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta,\\ \eta\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} &= \vec{\nabla}\wedge(\eta\vec{\omega}) - (\vec{\nabla}\eta)\wedge\vec{\omega},\\ \eta\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) &= \vec{\nabla}(\eta\operatorname{div}(\vec{\omega})) - (\vec{\nabla}\eta)\operatorname{div}(\vec{\omega}),\\ \eta((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}) &= \eta\operatorname{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}) = \operatorname{div}(\eta\vec{\omega}\otimes\vec{u}) - \vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta,\\ \text{et } \eta\vec{\nabla}\wedge\vec{u} &= \vec{\nabla}\wedge(\eta\vec{u}) - (\vec{\nabla}\eta)\wedge\vec{u},\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\partial_t\vec{\mathcal{U}} &= \Delta\vec{\mathcal{U}} + (\partial_t\eta + \Delta\eta)(\vec{u}+\vec{\omega}) - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i((\partial_i\eta)(\vec{u}+\vec{\omega})) - \operatorname{div}(\eta\vec{u}\otimes\vec{u}) + \vec{u}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta\\ &\quad -\eta\vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge(\eta\vec{\omega}) - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta)\wedge\vec{\omega} + \vec{\nabla}(\eta\operatorname{div}(\vec{\omega})) - (\vec{\nabla}\eta)\operatorname{div}(\vec{\omega})\\ &\quad -\eta\vec{\omega} - \operatorname{div}(\eta\vec{\omega}\otimes\vec{u}) + \vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge(\eta\vec{u}) - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta)\wedge\vec{u} + \eta\vec{f}.\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\operatorname{supp}(\eta) \subset \mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}(t_0, x_0) \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$, on a $\vec{\mathcal{U}}(0, x) = 0$, et donc

$$\begin{cases}\partial_t\vec{\mathcal{U}} = \Delta\vec{\mathcal{U}} + \vec{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{3}\partial_i\vec{\mathcal{B}}_i + \vec{\nabla}\mathcal{C} + \vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{D}} + \operatorname{div}\mathbb{E} + \eta\vec{f},\\ \vec{\mathcal{U}}(0, x) = 0,\end{cases} \tag{2.3.3}$$

où le vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ est donné par

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{A}} &= (\partial_t \eta + \Delta\eta)(\vec{u} + \vec{\omega}) + \vec{u} \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\eta - \eta\vec{\nabla}p - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta) \wedge \vec{\omega} \\ & -(\vec{\nabla}\eta)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - \eta\vec{\omega} + \vec{\omega} \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\eta, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

le vecteur $\vec{\mathcal{B}}_i$ (pour $1 \leq i \leq 3$) est donné par

$$\vec{\mathcal{B}}_i = 2(\partial_i \eta)(\vec{u} + \vec{\omega}), \tag{2.3.5}$$

la fonction scalaire $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\mathcal{C} = \eta\,\mathrm{div}(\vec{\omega}), \tag{2.3.6}$$

le vecteur $\vec{\mathcal{D}}$ est donné par

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\eta(\vec{\omega} + \vec{u}), \tag{2.3.7}$$

et enfin, le tenseur $\mathbb{E}$ est défini par l'expression

$$\mathbb{E} = -\eta(\vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{\omega} \otimes \vec{u}). \tag{2.3.8}$$

Par la formule de Duhamel, la solution de l'équation (2.3.3) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{\mathcal{U}}(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\vec{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{3} \partial_i \vec{\mathcal{B}}_i + \vec{\nabla}\mathcal{C} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{D}} + \mathrm{div}\,\mathbb{E} + \eta\vec{f}\right) ds. \tag{2.3.9}$$

Donc, pour déduire la régularité Höldérienne de $\vec{\mathcal{U}}$, il suffit d'appliquer le Lemme 2.1.5, page 44, à l'expression précédente et alors nous devons vérifier que pour $1 < \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < \mathfrak{q}_1$ avec $\frac{1}{\mathfrak{q}_0} = \frac{2-\alpha}{5}$, $\frac{1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{1-\alpha}{5}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{24}$, nous avons $\eta\vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et

$$\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}}_i, \mathcal{C}, \vec{\mathcal{D}}, \mathbb{E} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.3.10}$$

Observons que, comme par hypothèse $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ avec $\mathfrak{q}_0 = \frac{5}{2-\alpha} \leq \tau_a$ et $\mathrm{supp}(\eta) \subset \mathbf{Q}_R$ nous avons directement $\eta\vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Cependant, la déduction de (2.3.10) est loin d'être anodine et il faut suivre plusieurs étapes assez techniques pour obtenir cette information. Pour ce faire, nous réaliserons une étude séparée de chaque variable qui est résumée dans les étapes suivantes :

A) Un premier gain d'information de type Morrey de $\vec{u}$ [Proposition 2.3.1 & Corollaire 2.3.1].

B) Un gain d'intégrabilité pour $\vec{\omega}$ [Proposition 2.3.2].

C) Une amélioration de l'information de type Morrey pour $\vec{u}$ [Proposition 2.3.3].

D) Un gain d'intégrabilité pour $\mathrm{div}(\vec{\omega})$ [Proposition 2.3.4].

E) Déduction de la régularité Höldérienne de $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en utilisant le Lemme 2.1.5 de Ladyzhenskaya [Proposition 2.3.5].

Les idées ci-dessus sont résumées dans le schéma suivant,

$$\left.\begin{array}{c}(2.3.2) \Longrightarrow \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\\ \Big\Downarrow \\ \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\sigma}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\\ \text{avec } \sigma > \tau_0\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},p}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\\ \Big\Downarrow \\ \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}}(\vec{u}+\vec{\omega}) \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),\end{array}$$

avec $0 < \mathfrak{R} < R_4 < R_3 < R_2 < R_1 < R$.

Commençons alors par la première étape.

A) Un premier gain d'information de type Morrey de $\vec{u}$

Proposition 2.3.1. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 des équations micro-polaires sur $\mathbf{Q}_R$. Supposons que pour certain $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $\tau_a > \frac{5}{2-\alpha}$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour un point $(t_0, x_0) \in \mathbf{Q}_R$, nous avons*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds < \varepsilon, \tag{2.3.11}$$

alors, il existe $0 < R_1 < \frac{R}{2}$ et $\tau_0 > 0$ avec $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ tel que

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Preuve. En utilisant la définition des espaces de Morrey (voir (2.1.6), page 42), observons que l'on doit montrer que pour tout $0 < r < R_1$ et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_{R_1}(t_0,x_0)$ nous avons le contrôle suivant :

$$\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds \leq C r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}. \tag{2.3.12}$$

Pour obtenir cette estimation, nous allons utiliser les quantités critiques suivantes : pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$,

$$\begin{array}{ll}\mathcal{A}_r(t,x) = \displaystyle\sup_{t-r^2<s<t+r^2} \frac{1}{r}\int_{B_{x,r}} |\vec{u}(s,y)|^2 dy & \alpha_r(t,x) = \displaystyle\frac{1}{r}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,y)|^2 dyds\\ \lambda_r(t,x) = \displaystyle\frac{1}{r^2}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}(s,y)|^3 dyds & \mathcal{F}_r(t,x) = \displaystyle\frac{1}{r^{\frac{5}{7}}}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{f}(s,y)|^{\frac{10}{7}} dyds\\ \mathcal{P}_r(t,x) = \displaystyle\frac{1}{r^2}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |p(s,y)|^{\frac{3}{2}} dyds. & \end{array} \tag{2.3.13}$$

Observons rapidement une première relation entre les variables introduites ci-dessus

Lemme 2.3.1. *Pour tout $0 < r < R$, il existe une constante universelle $C > 0$, telle que*

$$\lambda_r^{\frac{1}{3}} \leq C(\mathcal{A}_r + \alpha_r)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Par la définition de λ_r donnée dans (2.3.13) et par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\lambda_r^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{r^{\frac{2}{3}}}\|\vec{u}\|_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_r)} \leq \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbf{Q}_r)}.$$

Par un argument d'interpolation, on a $\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{10}{3}}(B_{x,r})} \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{2}{5}}_{L^2(B_{x,r})}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{3}{5}}_{L^6(B_{x,r})}$, ce qui implique $\|\vec{u}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbf{Q}_r)} \leq \|\vec{u}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)}\|\vec{u}\|^{\frac{3}{5}}_{L^2_t L^6_x(\mathbf{Q}_r)}$. En utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (cf. [12]) nous avons $\|\vec{u}\|_{L^2_t L^6_x(\mathbf{Q}_r)} \leq C\big(\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)} + \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)}\big)$. Ainsi, par les inégalités de Young on a

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{10}{3}}_{t,x}(\mathbf{Q}_r)} &\leq C\|\vec{u}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)}\big(\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^{\frac{3}{5}}_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)} + \|\vec{u}\|^{\frac{3}{5}}_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)}\big)\\ &\leq C\big(\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)} + \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)}\big). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Étant donné que $\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)} = r^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}_r^{\frac{1}{2}}$ et $\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_r)} = r^{\frac{1}{2}}\alpha_r^{\frac{1}{2}}$, on obtient l'estimation souhaitée et donc la preuve du lemme est terminée. ■

Ainsi, afin d'obtenir l'estimation (2.3.12), observons que grâce au lemme précédent nous avons

$$\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds = r^2\lambda_r(t,x) \leq r^2(\mathcal{A}_r(t,x)+\alpha_r(t,x))^{\frac{3}{2}},$$

et donc, il est suffit de montrer que pour tout $0<r<R_1$, et pour tout $(t,x)\in\mathbf{Q}_{R_1}$, on a

$$\mathcal{A}_r(t,x)+\alpha_r(t,x) \leq Cr^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}.$$

Pour cela, nous avons besoin de deux estimations : la première, qui est donnée dans le lemme suivant, est liée à l'inégalité locale d'énergie et une deuxième estimation liée à la pression.

Lemme 2.3.2. *Soit $0<\rho\leq R$. Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.1, pour tout $0<r<\frac{\rho}{2}$ nous avons*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r+\alpha_r \leq\ & C\frac{r^2}{\rho^2}\mathcal{A}_\rho + C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac{1}{2}} + C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac{1}{2}} + C\frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}\\ &+C\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{\rho}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + C\frac{\rho}{r}\mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pour démontrer ce lemme, l'idée consiste à choisir une fonction test particulière dans l'inégalité d'énergie locale. Cette fonction a été introduite dans les travaux de Scheffer dans [88] (voir également [57], [61]) et nous la rappelons ci-dessous.

Lemme 2.3.3. *Soient $0<\rho\leq R$ et $0<r<\frac{\rho}{2}$. Considérons ϕ la fonction suivante*

$$\phi(s,y) = r^2\mathfrak{f}\left(\frac{s-t}{\rho^2},\frac{y-x}{\rho}\right)\theta\left(\frac{s-t}{r^2}\right)\mathfrak{g}_{(4r^2+t-s)}(x-y),$$

où $\mathfrak{f}\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ est une fonction positive supportée sur $\mathbf{Q}_R(0,0)$ et qui vaut 1 sur $\mathbf{Q}_{\frac{1}{2}}(0,0)$, θ est une fonction lisse positive telle que $\theta=1$ sur $]-\infty,1[$ et $\theta=0$ sur $]2,+\infty[$ et $\mathfrak{g}_t(\cdot)$ est le noyau de la chaleur. Alors, nous avons les points suivants :

1) *la fonction ϕ est une fonction non négative bornée, et son support est contenu dans la boule parabolique $\mathbf{Q}_\rho(t,x)$, et pour tout $(s,y)\in\mathbf{Q}_r(t,x)$, on a la borne inférieure $\phi\geq\frac{C}{r}$,*
2) *pour tout $(s,y)\in\mathbf{Q}_\rho(t,x)$, nous avons $\phi(s,y)\leq\frac{C}{r}$,*
3) *pour tout $(s,y)\in\mathbf{Q}_\rho(t,x)$, nous avons $|\vec{\nabla}\phi(s,y)|\leq\frac{C}{r^2}$,*

4) *pour tout* $(s,y) \in \mathbf{Q}_\rho(t,x)$, *nous avons* $|(\partial_s + \Delta)\phi(s,y)| \leq C\frac{r^2}{\rho^5}$.

Preuve du Lemme 2.3.2. Tout d'abord, rappelons que comme $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2, elle vérifie l'inégalité d'énergie locale *i.e.*, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \psi(t,x)dy + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \psi dyds \leq \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \psi + \Delta\psi)|\vec{u}|^2 dyds + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\psi)dyds$$
$$+ \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\psi dyds + \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\psi\vec{u})dyds + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot(\psi\vec{u})dyds.$$

Ainsi, en prenant la fonction test donnée dans le Lemme 2.3.3 dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r + \alpha_r \leq\ & \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t\phi + \Delta\phi)|\vec{u}|^2 dyds}_{(i)} + 2\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds}_{(ii)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds}_{(iii)} \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})dyds}_{(iv)} + 2\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot(\phi\vec{u})dyds}_{(v)}. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Nous allons maintenant étudier chaque terme de l'expression ci-dessus. Concernant le premier terme, en utilisant le quatrième point du Lemme 2.3.3 et comme $\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}$ par (2.3.13), nous avons

$$\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} (\partial_t\phi + \Delta\phi)|\vec{u}|^2 dyds \leq \frac{r^2}{\rho^5}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}|^2 dyds \leq C\frac{r^2}{\rho^2}\mathcal{A}_\rho. \tag{2.3.16}$$

Pour le deuxième terme (ii) de (2.3.15), d'après le troisième point du Lemme 2.3.3, l'inégalité de Hölder, comme $\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)} = \lambda_\rho^{\frac{4}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}$, $\|\vec{u}\|_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}$ par (2.3.13) et le Lemme 2.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |p\cdot(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)|dyds &\leq \frac{C}{r^2}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |p||\vec{u}|dyds \leq \frac{C}{r^2}\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{u}\|_{L^3(\mathbf{Q}_\rho)} \\ &\leq C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}} \leq C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Pour traiter le terme (iii) de (2.3.15), nous introduisons la quantité $(|\vec{u}|^2)_\rho$, donnée par $(|\vec{u}|^2)_\rho = \dfrac{1}{|B_{x,\rho}|}\displaystyle\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}(t,y)|^2 dy$. Comme $\vec{u}$ est à divergence nulle, pour tout fonction test ψ telle que $\text{supp}(\psi) \subset B_{x,\rho}$, on a

$$\int_{B_{x,\rho}} (|\vec{u}|^2)_\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\psi dy = 0.$$

Alors, d'après le Lemme 2.3.3 et l'inégalité de Hölder, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds &= \int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} [|\vec{u}|^2 - (|\vec{u}|^2)_\rho](\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds \\ &\leq \frac{C}{r^2}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} \left||\vec{u}|^2 - (|\vec{u}|^2)_\rho\right| |\vec{u}|dyds \\ &\leq \frac{C}{r^2}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2} \||\vec{u}|^2 - (|\vec{u}|^2)_\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^3}ds. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Hölder dans la variable de temps, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds &\leq \frac{C}{r^2}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2} \|\vec{\nabla}(|\vec{u}(s,\cdot)|^2)\|_{L^1}\|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^3}ds\\ &\leq \frac{C}{r^2}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2} \|\vec{u}\|_{L^2(B_{x,\rho})}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2(B_{x,\rho})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^3(B_{x,\rho})}ds\\ &\leq \frac{C}{r^2}\|\vec{u}\|_{L^6_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{u}\|_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}.\end{aligned}$$

Observons que comme $\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}$ par (2.3.13), nous avons

$$\|\vec{u}\|_{L^6_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} \leq C\rho^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} \leq C\rho^{\frac{5}{6}}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}.$$

En plus, comme $\|\vec{u}\|_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}$ et $\|\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{1}{2}}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}$ par (2.3.13) et en utilisant le Lemme 2.3.1 et l'estimation ci-dessus, nous avons

$$\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds \leq C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, en utilisant l'inégalité de Young, nous avons

$$\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds \leq C\frac{\rho^2}{r^2}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho). \tag{2.3.18}$$

Étudions maintenant le terme (iv) dans (2.3.15). Par les propriétés de la fonction test ϕ et l'inégalité de Hölder $(1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})$ on a

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})|dyds &\leq \frac{C}{r}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\cdot\vec{u}|dyds\\ &\leq C\frac{\rho}{r}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_x(B_{x,\rho})}\|\vec{u}\|_{L^6_x(B_{x,\rho})}ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la variable de temps, on obtient

$$\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})|dyds \leq C\frac{\rho}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\|\vec{u}\|_{L^2_tL^6_x(\mathbf{Q}_\rho)}.$$

Par l'injection de Sobolev $H^1(B_{x,\rho}) \subset L^6(B_{x,\rho})$, on a

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})|dyds &\leq C\frac{\rho}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}(\|\vec{u}\|_{L^2_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)}+\|\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_\rho)})\\ &\leq C\frac{\rho}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}(\rho\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)}+\|\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_\rho)}).\end{aligned}$$

Comme $\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}$ et $\|\vec{u}\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_\rho)} = \rho^{\frac{1}{2}}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}$, par (2.3.13) nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t-\rho^2}^{t+\rho^2}\int_{B_{x,\rho}} |(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})|dyds \quad&\leq\quad C\frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}\\ &\quad+C\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Pour le terme (v) dans (2.3.15), en utilisant les propriétés de la fonction test ϕ et l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot(\phi\vec{u})dyds \leq \frac{C}{r}\int_{\mathbf{Q}_\rho} \vec{f}\cdot\vec{u}dyds \leq \frac{C}{r}\|\vec{f}\|_{L^{\frac{10}{7}}_t L^{\frac{10}{7}}_x(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{10}{3}}_t L^{\frac{10}{3}}_x(\mathbf{Q}_\rho)}.$$

Maintenant, par l'estimation (2.3.14) et les définitions des quantités données dans (2.3.13), nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}\cdot(\phi\vec{u})dyds &\leq \frac{C}{r}\|\vec{f}\|_{L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\left(\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_\rho)} + \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_\rho)}\right)\\ &= C\frac{\rho}{r}\mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}}(\mathcal{A}_\rho^{\frac12}+\alpha_\rho^{\frac12}) \leq C\frac{\rho}{r}\mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Ainsi, en rassemblant les contrôles (2.3.16)-(2.3.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r+\alpha_r \leq\; & C\frac{r^2}{\rho^2}\mathcal{A}_\rho + C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac23}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac12} + C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac23}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac12}\\ &+ C\frac{\rho^{\frac52}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\mathcal{A}_\rho^{\frac12} + C\frac{\rho^{\frac32}}{\rho}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\alpha_\rho^{\frac12} + C\frac{\rho}{r}\mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}}(\mathcal{A}_\rho+\alpha_\rho)^{\frac12},\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du Lemme 2.3.2. ■

La deuxième estimation dont nous avons besoin repose sur une étude détaillée des propriétés de la pression. On aura donc besoin du résultat auxiliaire ci-dessous

Lemme 2.3.4. *Fixons $0 \leq \sigma \leq \frac12$, et $\mathbf{Q}_\sigma$ une boule parabolique. Soit p la solution de $\Delta p = -\sum_{i,j=1}^3 \partial_i\partial_j(u_iu_j)$ dans $\mathbf{Q}_\sigma$, avec $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)\cap L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_1)$. Si $p\in L^{\frac32}_{t,x}(\mathbf{Q}_1)$, alors il existe une constante $C>0$ telle que nous avons le contrôle suivant*

$$\|p\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\left(\sigma^{\frac13}\left(\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}\right) + \sigma^2\|p\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_1)}\right).$$

Preuve. Soit $\overline{\psi}:\mathbb{R}^3\longrightarrow[0,1]$ une fonction test telle que $\overline{\psi}\equiv 1$ sur $B_{x,\frac35}$ et $\overline{\psi}\equiv 0$ dehors $B_{x,\frac45}$. Observons que comme $\sigma\leq\frac12$, nous avons sur $\mathbf{Q}_\sigma$ l'identité, $p=\overline{\psi}p$. Ensuite, comme

$$-\Delta(\overline{\psi}p) = -\overline{\psi}\Delta p + (\Delta\overline{\psi})p - 2\sum_{i=1}^3\partial_i((\partial_i\overline{\psi})p),$$

on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\|p\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} = \|\overline{\psi}p\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq\; & \underbrace{\left\|\frac{(-\overline{\psi}\Delta p)}{(-\Delta)}\right\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_a)} + \underbrace{\left\|\frac{(\Delta\overline{\psi})p}{(-\Delta)}\right\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_b)}\\ &+2\sum_{i=1}^3\underbrace{\left\|\frac{\partial_i((\partial_i\overline{\psi})p)}{(-\Delta)}\right\|_{L^{\frac32}_t L^{\frac32}_x(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_c)}.\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Étudions maintenant chaque terme de l'expression ci-dessus. Pour le premier terme (p_a) dans (2.3.78), en définissant $N_{i,j}=u_i(u_j-(u_j)_1)$ où $(u_j)_1$ est le moyenne de u_j sur la boule de rayon 1, et comme

$\vec{u}$ est à divergence nulle, nous avons $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j(u_iu_j) = \sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j N_{i,j}$. En plus, comme par hypothèse $\Delta p = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j(u_iu_j)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
(p_a) &= \left\|\frac{\big(-\overline{\psi}\Delta p\big)}{(-\Delta)}\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\Big(\overline{\psi}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j N_{i,j}\Big)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \\
&\leq C\sum_{i,j=1}^{3}\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\left(\partial_i\partial_j(\overline{\psi}N_{i,j}) - \partial_i\big((\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\big) - \partial_j\big((\partial_i\overline{\psi})N_{i,j}\big) + 2(\partial_i\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\right)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)}.
\end{aligned} \tag{2.3.22}
$$

Dénotons par $\mathcal{R}_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\Delta}}$ les transformées de Riesz habituelles sur $\mathbb{R}^3$. Comme ces opérateurs sont bornés dans les espaces de Lebesgue et en utilisant les propriétés de support de la fonction auxiliaire $\overline{\psi}$, nous avons pour le premier terme ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\overline{\psi}N_{i,j}(t,\cdot)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x,\sigma})} &\leq \|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\overline{\psi}N_{i,j})(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\overline{\psi}N_{i,j}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x,1})} \\
&\leq C\|u_i(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})}\|u_j(t,\cdot)-(u_j)_1\|_{L^6(B_{x,1})} \\
&\leq C\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})},
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé les inégalités de Hölder et de Poincaré dans la dernière ligne. En prenant maintenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans la variable du temps, nous obtenons

$$
\left\|\frac{\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\overline{\psi}N_{i,j}\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.23}
$$

Les termes restants de (2.3.22) peuvent être étudiés de manière similaire. En effet, comme $\partial_i\overline{\psi}$ s'annule sur $B_{x,\frac{3}{5}}\cup B^c_{x,\frac{4}{5}}$ et comme $B_{x,\sigma}\subset B_{x,\frac{1}{2}}\subset B_{x,\frac{3}{5}}$, en utilisant la représentation intégrale de l'opérateur $\frac{\partial_i}{(-\Delta)}$ nous avons pour le deuxième terme de (2.3.22) l'estimation suivante

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x,\sigma})} &\leq C\sigma^2\left\|\frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\big)(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(B_{x,\sigma})} \\
&\leq C\,\sigma^2\left\|\int_{\{\frac{3}{5}<|y|<\frac{4}{5}\}}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}\big((\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\big)(t,y)\,dy\right\|_{L^\infty(B_{x,\sigma})} \\
&\leq C\,\sigma^2\|N_{i,j}(t,\cdot)\|_{L^1(B_{x,1})} \\
&\leq C\,\sigma^2\|u_i(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})}\|u_j(t,\cdot)-(u_j)_1\|_{L^2(B_{x,1})} \\
&\leq C\,\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x,1})},
\end{aligned} \tag{2.3.24}
$$

où nous avons utilisé les mêmes idées que pour le terme $\overline{\psi}N_{i,j}$ et le fait que $0<\sigma<\frac{1}{2}$. Par les mêmes arguments que dans (2.3.23), en prenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans la variable du temps, nous obtenons

$$
\left\|\frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}\big)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.25}
$$

Un argument symétrique implique

$$
\left\|\frac{\partial_j}{(-\Delta)}\big((\partial_i\overline{\psi})N_{i,j}\big)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.26}
$$

Comme le noyau de convolution associé à l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ est $\frac{C}{|x|}$, en suivant les mêmes idées que le dernier terme de (2.3.22), nous avons l'inégalité

$$\left\|\frac{(\partial_i\partial_j\overline{\psi})N_{i,j}}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbf{Q}_R)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L_t^2L_x^2(\mathbf{Q}_R)}. \tag{2.3.27}$$

Par conséquent, en injectant les estimations (2.3.23), (2.3.25), (2.3.26) et (2.3.27) dans (2.3.22), nous avons

$$(p_a) = \left\|\frac{(-\overline{\psi}\Delta p)}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\left(\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L_t^2L_x^2(\mathbf{Q}_1)}\right). \tag{2.3.28}$$

Étudions maintenant le terme (p_b) de l'expression (2.3.21). Pour cela, nous considérons d'abord la variable spatiale. En rappelant les propriétés de support de la fonction auxiliaire $\overline{\psi}$ et les propriétés du noyau de convolution associé à l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$, nous pouvons écrire comme précédemment (voir (2.3.24))

$$\left\|\frac{(\Delta\overline{\psi})p(t,\cdot)}{(-\Delta)}\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,\sigma})} \leq C\sigma^2\|p(t,\cdot)\|_{L^1(B_{x,1})} \leq C\sigma^2\|p(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x,1})},$$

et donc, en prenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans la variable du temps, nous obtenons

$$(p_b) = \left\|\frac{(\Delta\overline{\psi})p}{(-\Delta)}\right\|_{L_{t,x}^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^2\|p\|_{L_t^{q_0}L_x^{q_0}(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.29}$$

Pour le dernier terme de l'expression (2.3.21), en suivant les mêmes idées que celles développées dans (2.3.24), nous pouvons écrire

$$\left\|\frac{\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_i\overline{\psi})p(t,\cdot)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,\sigma})} \leq C\sigma^2\|p(t,\cdot)\|_{L^1(B_{x,1})} \leq C\sigma^2\|p(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x,1})},$$

et nous avons

$$(p_c) = \left\|\frac{\partial_i((\partial_i\overline{\psi})p)}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\sigma^2\|p\|_{L_{t,x}^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.30}$$

En regroupant les estimations (2.3.28), (2.3.29) et (2.3.30), nous obtenons l'inégalité

$$\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\left(\sigma^{\frac{1}{3}}\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbf{Q}_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L_t^2L_x^2(\mathbf{Q}_1)} + \sigma^2\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_1)}\right),$$

et ceci termine la preuve du Lemme 2.3.7. ■

Maintenant, nous pouvons obtenir la deuxième estimation dont nous avons besoin. Pour $0 < r \leq \frac{\rho}{2}$, nous fixons le paramètre $\sigma = \frac{r}{\rho}$. En utilisant les fonctions $p_\rho(t,x) = p(\rho^2t,\rho x), \vec{u}_\rho(t,x) = \vec{u}(\rho^2t,\rho x)$ dans le Lemme 2.3.7 et après un changement de variable, nous obtenons

$$\rho^{-\frac{10}{3}}\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_r)} \leq C\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\rho^{-\frac{3}{2}}\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(\mathbf{Q}_\rho)}\rho^{-\frac{3}{2}}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L_{t,x}^2(\mathbf{Q}_\rho)}\right) + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2\rho^{-\frac{10}{3}}\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\rho)}\right).$$

En utilisant l'inégalité de Young, le fait que $\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_r)} = r^{\frac{4}{3}}\mathcal{P}_r^{\frac{2}{3}}$, et les quantités données dans (2.3.13) nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r^{\frac{2}{3}} &\leq C\frac{\rho^{\frac{10}{3}}}{r^{\frac{4}{3}}}\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\left((\rho^{-\frac{3}{2}}\rho^{\frac{1}{2}})\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}(\rho^{-\frac{3}{2}}\rho^{\frac{1}{2}})\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2\rho^{-\frac{10}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\right)\\ &\leq C\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)(\mathcal{A}_\rho\alpha_\rho)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\right).\end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Une fois obtenu les estimations (2.3.15) et (2.3.31), nous pouvons réaliser l'argument inductif afin d'obtenir l'information de type Morrey de la variable $\vec{u}$.

Fin de la preuve de la Proposition 2.3.1. Rappelons que, nous voulons montrer qu'il existe $0 < R_1 < \frac{R}{2}$ tel que pour tout $0 < r < R_1$, et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_{R_1}$, et pour $\tau_0 > 0$ avec $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$, nous avons

$$\mathcal{A}_r(t,x) + \alpha_r(t,x) \leq C r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}. \tag{2.3.32}$$

Introduisons les quantités suivantes pour simplifier les notations,

$$\mathbf{A}_r(t,x) = \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}(\mathcal{A}_r(t,x) + \alpha_r(t,x)) \qquad \mathbf{P}_r(t,x) = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}}\mathcal{P}_r(t,x). \tag{2.3.33}$$

Ainsi, afin d'obtenir (2.3.32), nous allons appliquer un argument itératif à l'expression suivante :

$$\mathbf{\Theta}_r(t,x) = \mathbf{A}_r(t,s) + \left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{15}{\tau_0}-\frac{15}{2}} \mathbf{P}_r(t,x)\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{2.3.34}$$

Pour cela, nous devons obtenir des estimations qui nous permettent de contrôler l'information sur des boules plus petites par rapport aux plus grandes des termes données dans (2.3.33). Pour le terme $\mathbf{A}_r$, observons que, par le Lemme 2.3.2, page 74, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_r = \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}(\mathcal{A}_r + \alpha_r) \leq \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\Bigg(& C \underbrace{\frac{r^2}{\rho^2}\mathcal{A}_\rho}_{(I)} + C \underbrace{\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}}_{(II)} + C \underbrace{\frac{\rho^2}{r^2}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)}_{(III)} \\ & + C \underbrace{\frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(IV)} + C \underbrace{\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(V)} + C \underbrace{\frac{\rho}{r}\mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}}_{(VI)}\Bigg).\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Nous allons estimer chaque terme ci-dessus par rapport à $\mathbf{A}_\rho$.

- Pour le terme (I) ci-dessus, nous avons

$$\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{r^2}{\rho^2}\mathcal{A}_\rho\right) = \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{r^2}{\rho^2}\rho^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}\mathbf{A}_\rho = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho.$$

- Pour le deuxième terme (II) de (2.3.35), en utilisant la définition de $\mathbf{A}_\rho$ et $\mathbf{P}_\rho$, l'on obtient

$$\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^{4-\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}.$$

- Pour le terme (III) dans (2.3.35), en utilisant la définition de $\mathbf{A}_\rho$ donnée dans (2.3.33), nous avons

$$\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho^2}{r^2}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)\right) = \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho^2}{r^2}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}\mathbf{A}_\rho\right) = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{4-\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}.$$

- Observons que pour le terme (IV) de (2.3.35), par la définition de $\mathbf{A}_\rho$, et comme $\mathbf{Q}_\rho \subset \mathbf{Q}_R$ et $\vec{\omega} \in L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R(t_0,x_0))$ l'on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\mathcal{A}_\rho^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{\rho^{\frac{5}{2}}}{r}\rho^{1-\frac{5}{\tau_0}}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}}\rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}. \\ &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}}\rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}}\rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

- Pour le terme (V) de (2.3.35) comme $\mathbf{Q}_\rho \subset \mathbf{Q}_R$ on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\dfrac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r} \|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} \alpha_\rho^{\frac{1}{2}} \right) & = & \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \rho^{\frac{10}{\tau_0}-3} \rho^{\frac{3}{2}} \alpha_\rho^{\frac{1}{2}} \|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} \\ & \leq & C \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \rho^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{3}{2}} \alpha_\rho^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

- Pour le terme (6) dans (2.3.35), par la définition de $\mathbf{A}_\rho$ nous avons

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\dfrac{\rho}{r} \mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}} (\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}} \right) & = & \dfrac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}} \dfrac{\rho}{r} \rho^{-1+\frac{5}{\tau_0}} \mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \\ & = & \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \rho^{-1+\frac{5}{\tau_0}} \mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

  Observons que par la définition de $\mathcal{F}_\rho$ donnée dans (2.3.13), nous avons

$$\begin{aligned} \rho^{-1+\frac{5}{\tau_0}} \mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}} &= \rho^{-1+\frac{5}{\tau_0}} \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbf{Q}_\rho(t,x)} |\vec{f}(s,y)|^{\frac{10}{7}} dyds = \rho^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{\tau_0}} \frac{\rho^{5(1-\frac{10}{7\tau_a})}}{\rho^{5(1-\frac{10}{7\tau_a})}} \int_{\mathbf{Q}_\rho(t,x)} |\vec{f}(s,y)|^{\frac{10}{7}} dyds \\ &= \frac{\rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}}}{\rho^{5(1-\frac{10}{7\tau_0})}} \int_{\mathbf{Q}_\rho(t,x)} |\vec{f}(s,y)|^{\frac{10}{7}} dyds \leq \rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{f}\|^{\frac{10}{7}}_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}}. \end{aligned}$$

  Ainsi, comme par hypothèse $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\frac{\rho}{r} \mathcal{F}_\rho^{\frac{7}{10}} (\mathcal{A}_\rho + \alpha_\rho)^{\frac{1}{2}} \right) \leq C \rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}.$$

En rassemblant les estimations précédents, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_r \leq\; & C \Bigg(\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{10}{\tau_0}} \mathbf{A}_\rho + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{4-\frac{10}{\tau_0}} \mathbf{P}_\rho^{\frac{2}{3}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{4-\frac{10}{\tau_0}} \mathbf{A}_\rho \alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \\ & + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \rho^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{3}{2}} \alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{10}{\tau_0}} \mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \Bigg). \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

D'autre part, si l'on considère le terme $\mathbf{P}_r(t,x)$ dans (2.3.33), d'après l'estimation (2.3.31), nous obtenons

$$\mathbf{P}_r = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}} \mathcal{P}_r \leq \frac{C}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{A}_\rho^{\frac{3}{4}} \alpha_\rho^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{r}{\rho}\right) \mathcal{P}_\rho \right).$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Young et la définition de $\mathbf{A}_\rho$, on déduit que

$$\frac{1}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \mathcal{A}_\rho^{\frac{3}{4}} \alpha_\rho^{\frac{3}{4}} \leq \frac{1}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})} (\mathbf{A}_\rho \alpha_\rho)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{15}{2\tau_0}} (\mathbf{A}_\rho \alpha_\rho)^{\frac{3}{4}}.$$

Comme $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\frac{r}{\rho}\right) \mathcal{P}_\rho = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{15}{2\tau_0}} \mathbf{P}_\rho$, nous avons

$$\mathbf{P}_r \leq C \left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{3-\frac{15}{2\tau_0}} (\mathbf{A}_\rho \alpha_\rho)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{15}{2\tau_0}} \mathbf{P}_\rho \right). \tag{2.3.37}$$

Ainsi, avec les estimations (2.3.36) et (2.3.37), nous sommes prêts à appliquer un argument itératif à l'expression (2.3.34). En effet, la première itération est donnée dans le lemme suivant. Remarquons que pour le moment, nous nous centrons autour du point (t_0, x_0), et le cas $(t,x) \in \mathbf{Q}_\rho(t_0, x_0)$ sera traité postérieurement.

Lemme 2.3.5. *Soit* $0 < \kappa \ll 1$ *une constant fixe (cf.* (2.3.40)*). Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.1, il existe* $0 < \rho_1 < R$ *et* $0 < \varepsilon^* = \varepsilon^*(\kappa, \rho_1) < 1$ *tels que pour tout* $0 < \rho \leq \rho_1$*, nous avons*

$$\mathbf{\Theta}_{\kappa\rho}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{2}\mathbf{\Theta}_\rho(t_0, x_0) + \varepsilon^*.$$

Preuve. Soient $0 < \rho < R$ et $r = \kappa\rho$ avec $0 < \kappa \ll 1$ un certain paramètre fixe qui sera défini plus tard. En utilisant les estimations (2.3.36) et (2.3.37), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Theta}_r &= \mathbf{A}_r + \left(\kappa^{\frac{15}{2\tau_0}-1}\mathbf{P}_r\right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq C\Bigg(\underbrace{\kappa^{\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\mathbf{A}_\rho\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(1)} + \underbrace{\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\mathbf{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(2)} + \underbrace{\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(3)} \\
&\quad + \underbrace{\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\rho^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{3}{2}}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(4)} + \underbrace{\rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}}\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}}_{(5)}\Bigg) + C\underbrace{\left(\kappa^{\frac{45}{2\tau_0}-\frac{21}{2}}(\mathbf{A}_\rho\alpha_\rho)^{\frac{3}{4}} + \kappa^{\frac{45}{2\tau_0}-8}\mathbf{P}_\rho\right)^{\frac{4}{3}}}_{(6)}.
\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

Étudions plus en détail chaque terme de la dernière expression ci-dessus.

- Pour le premier terme comme $\mathbf{A}_\rho \leq \mathbf{\Theta}_\rho$, nous avons
$$\kappa^{\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\mathbf{A}_\rho\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \kappa^{\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{\Theta}_\rho + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\mathbf{\Theta}_\rho\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}.$$
- Pour le deuxième terme de (2.3.38), en appliquant l'inégalité de Young nous obtenons
$$\begin{aligned}
\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\mathbf{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} &= \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\left(\kappa^{5(\frac{1}{\tau_0}-\frac{1}{2})}\mathbf{P}_\rho^{\frac{2}{3}} \times \kappa^{5(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_0})}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}}\right) \leq \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\left(\kappa^{10(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_0})}\mathbf{A}_\rho + \kappa^{10(\frac{1}{\tau_0}-\frac{1}{2})}\mathbf{P}_\rho^{\frac{4}{3}}\right) \\
&= \kappa\left(\mathbf{A}_\rho + \left(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}-\frac{15}{2})}\mathbf{P}_\rho\right)^{\frac{4}{3}}\right) \leq \kappa\mathbf{\Theta}_\rho.
\end{aligned}$$
- Pour le terme (3) dans (2.3.38), par l'inégalité de Young, nous avons
$$\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\rho^{\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \kappa^{-6}\rho^{\frac{10}{\tau_0}} + \rho\kappa^{\frac{20}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho.$$
Comme $\mathbf{A}_\rho \leq \mathbf{\Theta}_\rho$ et $\rho < 1$, on a
$$\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\rho^{\frac{5}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \kappa^{-6}\rho^{\frac{10}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{20}{\tau_0}}\mathbf{\Theta}_\rho.$$
- Étudions maintenant le terme (4) dans (2.3.38). Comme $5 < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\rho < 1$, nous avons
$$\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\rho^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{3}{2}}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}.$$
- Pour le terme (5) dans (2.3.38) par l'inégalité de Young, nous avons
$$\rho^{\frac{7}{2}+\frac{5}{\tau_0}-\frac{50}{7\tau_a}}\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\mathbf{A}_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \kappa^{-6}\rho^{7+\frac{10}{\tau_0}-\frac{100}{7\tau_a}} + \kappa^{\frac{20}{\tau_0}}\mathbf{A}_\rho \leq \kappa^{-6}\rho^{7-\frac{30}{7\tau_0}} + \kappa^{\frac{20}{\tau_0}}\mathbf{\Theta}_\rho.$$
- Pour le dernier terme de (2.3.38), comme $\left(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}-\frac{15}{2}}\mathbf{P}_\rho\right)^{\frac{4}{3}} \leq \mathbf{\Theta}_\rho$ et $\mathbf{A}_\rho \leq \mathbf{\Theta}_\rho$ on a

$$\begin{aligned}
\left(\kappa^{\frac{45}{2\tau_0}-\frac{21}{2}}(\mathbf{A}_\rho\alpha_\rho)^{\frac{3}{4}} + \kappa^{\frac{45}{2\tau_0}-8}\mathbf{P}_\rho\right)^{\frac{4}{3}} &\leq C\left(\kappa^{\frac{30}{\tau_0}-14}\mathbf{\Theta}_\rho\alpha_\rho + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{2}{3}}\mathbf{\Theta}_\rho\right) \\
&\leq C\left(\kappa^{\frac{30}{\tau_0}-14}\mathbf{\Theta}_\rho\alpha_\rho + \kappa^{\frac{30-2\tau_0}{3\tau_0}}\mathbf{\Theta}_\rho\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, en ajoutant les estimations ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{\Theta}_r &\leq C\left(\kappa^{\frac{10}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \kappa + \kappa^{\frac{20}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{30}{\tau_0}-14}\alpha_\rho + \kappa^{\frac{30-2\tau_0}{3\tau_0}}\right)\mathbf{\Theta}_\rho \\ &\quad + \left(\kappa^{-6}\rho^{7+\frac{10}{\tau_0}-\frac{100}{7\tau_a}} + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \kappa^{-6}\rho^{7-\frac{30}{7\tau_0}}\right). \end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Nous allons maintenant étudier chaque terme de l'expression ci-dessus. Pour cela, nous fixons le paramètre $\kappa > 0$ comme suit

$$\kappa \leq \frac{1}{C\left(12^{\frac{3\tau_0}{30-2\tau_0}}\right)}. \tag{2.3.40}$$

Rappelons aussi que comme par hypothèse, il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que $\limsup\limits_{\rho\to 0}\alpha_\rho = \limsup\limits_{\rho\to 0}\dfrac{1}{\rho^2}\displaystyle\int_{\mathbf{Q}_\rho(t_0,x_0)}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds < \varepsilon$. Alors, il existe $\rho_1 > 0$ tel que

$$\text{pour tout} \quad 0 < \bar{\rho} < \rho_1 \quad \text{nous avons} \quad \alpha_{\bar{\rho}} < \varepsilon.$$

Ainsi, si l'on considère en plus que $0 < \rho < \rho_1$, et comme κ est fixé, les termes avec la structure $\kappa^{-c}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}}$ et $\kappa^{-c}\alpha_\rho$ avec $c > 0$ peuvent être considérés assez petits. En effet, si nous prenons $\epsilon < \min\{\frac{\kappa^{8-\frac{20}{\tau_0}}}{(12)^2}, \frac{\kappa^{14-\frac{30}{\tau_0}}}{12}\}$ il s'ensuit que

$$C\kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad C\kappa^{\frac{30}{\tau_0}-14}\alpha_\rho \leq \frac{1}{12}.$$

Alors, nous pouvons déduire que

$$C\left(\kappa^{\frac{10}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-4}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \kappa + \rho\kappa^{\frac{20}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{30}{\tau_0}-14}\alpha_\rho + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-\frac{2}{3}}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Maintenant pour étudier le deuxième terme du (2.3.39), remarquons que par les mêmes arguments qu'auparavant, les termes ayant la structure $\kappa^{-c}\rho^a$ avec $a, c > 0$ peuvent être considérerais assez petits. Ainsi, comme $\frac{100}{7\tau_a} < \frac{40}{7}$ parce que $\frac{1}{\tau_a} < \frac{2}{5}$, nous avons $7 + \frac{10}{\tau_0} - \frac{100}{7\tau_a} > 0$ et donc on peut trouver $0 < \varepsilon^* < 1$ tel que

$$\left(\kappa^{-6}\rho^{\frac{10}{\tau_0}} + \kappa^{\frac{10}{\tau_0}-3}\alpha_\rho^{\frac{1}{2}} + \kappa^{-6}\rho^{7-\frac{30}{7\tau_0}}\right) < \varepsilon^*.$$

Alors, par les deux estimations précédentes nous obtenons que $\mathbf{\Theta}_r \leq \frac{1}{2}\mathbf{\Theta}_\rho + \varepsilon^*$, ce qui termine la preuve du Lemme 2.3.5. ■

Fin de la preuve de la Proposition 2.3.1. Considérons $0 < \rho < R$ donné dans le Lemme 2.3.5. Observons d'abord que les quantités $\mathbf{A}_\rho$ et $\mathbf{P}_\rho$ sont finies parce que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_\rho)$ et $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)$, et il s'ensuit que $\mathbf{\Theta}_\rho$ est aussi finie. Rappelons que pour $0 < \kappa \ll 1$ donné dans (2.3.40) et par le Lemme 2.3.5, il existe $\rho_1 > 0$ et $0 < \varepsilon^* < 1$ tel que pour $\rho < \rho_1$, nous avons

$$\mathbf{\Theta}_{\kappa\rho}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{2}\mathbf{\Theta}_\rho(t_0, x_0) + \varepsilon^*.$$

Ainsi, comme nous pouvons itérer ce processus, nous avons pour tout $n > 1$,

$$\mathbf{\Theta}_{\kappa^n\rho}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{2^n}\mathbf{\Theta}_\rho(t_0, x_0) + \varepsilon^* \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j}.$$

Alors, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N, \mathbf{\Theta}_{\kappa^n\rho}(t_0, x_0) \leq 4\varepsilon^*$, ce qui implique par la définition de $\mathbf{\Theta}_\rho$ dans (2.3.34) qu'en particulier nous avons $\mathbf{A}_{\kappa^n\rho}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{8}$ et $\mathbf{P}_{\kappa^n\rho}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{32}$.

Si l'on considère $R_1 = \kappa^N\rho$, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{A}_{\kappa^n R_1}(t_0, x_0) \leq C,$$

qui est l'estimation (2.3.32) mais centrée autour du point (t_0, x_0). Pour traiter le cas général $(t, x) \in \mathbf{Q}_{R_1}(t_0, x_0)$, observons que l'on a

$$\mathbf{A}_{R_1}(t, x) \leq 2^{3-\frac{10}{\tau_0}}\mathbf{A}_{2R_1}(t_0, x_0) \leq 8\mathbf{A}_{2R_1}(t_0, x_0) = 8\mathbf{A}_{2\kappa^N\rho}(t_0, x_0) \leq 1,$$

et $\mathbf{P}_{R_1}(t, x) \leq 2^{5-\frac{3}{2}(1+\frac{5}{\tau_0})}\mathbf{P}_{2R_1}(t_0, x_0) \leq 32\mathbf{P}_{2R_1}(t_0, x_0) \leq 8\mathbf{P}_{\kappa^N\rho}(t_0, x_0) < C$, et donc il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $(t, x) \in \mathbf{Q}_{R_1}(t_0, x_0)$,

$$\mathbf{A}_{\kappa^n R_1}(t, x) \leq C.$$

Enfin, comme nous avons mentionné au début de la preuve, l'information ci-dessus est équivalente à dire que pour tout $0 < r < R_1$, et pour tout $(t, x) \in \mathbf{Q}_{R_1}$, on a

$$\frac{1}{r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}}\mathcal{A}_r(t, x) + \alpha_r(t, x) \leq C, \tag{2.3.41}$$

et ceci implique par (2.3.12), que l'on a

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} \leq C,$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 2.3.1. ■

Observons en plus qu'à partir de ce lemme nous pouvons déduire un peu d'information de type Morrey sur le gradient de $\vec{u}$.

Corollaire 2.3.1. *Avec les hypothèses de la Proposition 2.3.1, pour* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$*.nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

Preuve. Rappelons que, par (2.3.13), nous avons $\displaystyle\frac{1}{r}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds = \alpha_r(t, x)$, et par la définition du terme $\mathbf{A}_r(t, x)$ donnée dans (2.3.33) nous obtenons

$$\frac{1}{r}\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyd \leq r^{2(1-\frac{5}{\tau_0})}\mathbf{A}_r(t, x).$$

Mais comme par (2.3.41) nous avons $\mathbf{A}_r(t, x) \leq C$ pour tout $0 < r < R_1$, et pour tout $(t, x) \in \mathbf{Q}_{R_1}(t_0, x_0)$ avec R_1 donnée dans la Proposition 2.3.1, il s'ensuit que

$$\iint_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds \leq Cr^{3-\frac{10}{\tau_0}} = Cr^{5(1-\frac{2}{\tau_1})},$$

où $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$. Ce que implique par la définition des espaces de Morrey que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, et donc la preuve du Corollaire 2.3.1 est terminé.

■

Ayant obtenu le premier gain d'information de type Morrey pour la vitesse $\vec{u}$, passons maintenant à la variable $\vec{\omega}$

B) Un gain d'intégrabilité pour $\vec{\omega}$

En récapitulant, par la Proposition 2.3.1 et le Corollaire 2.3.1, nous avons montré qu'il existe $0 < R_1 < R$ tel que pour $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Nous allons voir maintenant comment à partir de cette information nous pouvons obtenir un gain d'intégrabilité pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en appliquant le Théorème 2.2.1, page 45. En effet, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.3.2. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée des équations micro-polaires sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$ au sens de la Définition 2.3.2. Considérons en plus que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^1 \cap \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ pour $\tau_a > \frac{5}{2-\alpha}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{24}$. Supposons qu'il existe $R_1 > 0$ avec $0 < R_1 < R$ et tel que $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Alors, pour tout $0 < R_2 < R_1$, on a

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Remarque 2.3.2. *Observons que nous avons remplacé l'hypothèse de petitesse du gradient* (2.3.11) *du Théorème 2.3.1 par un contrôle de type Morrey.*

Preuve. Par la Définition 2.3.2 des solutions partiellement adaptées, nous avons aussi que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution faible sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$. Ainsi, comme la force $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^1$ et il existe $0 < R_1 < R$ tel que pour $\tau_0 > 5$

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

nous pouvons alors appliquer le Théorème 2.2.1, et donc pour $R_2 > 0$ tel que $0 < R_2 < R_1$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 2.3.2. ■

C) Une amélioration de l'information de type Morrey de $\vec{u}$

Dans cette partie nous allons déduire que si l'on réinjecte toute l'information obtenue jusqu'à maintenant sur $(\vec{u}, \vec{\omega})$, il est possible d'obtenir une amélioration de l'information de type Morrey de $\vec{u}$. Cependant, il est clair alors que le gain d'intégrabilité que l'on obtient dépendra de l'intégrabilité que nous avons sur $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ et $\vec{f}$, qui peuvent être vues comme des forces extérieurs.

Proposition 2.3.3. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 des équations micro-polaires sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$. Supposons que pour certain $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^1 \cap \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ pour $\tau_a > \frac{5}{2-\alpha}$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifies :*

1) *il existe $R_1 > 0$ avec $0 < R_1 < R$ tel que pour $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.3.42}$$

2) *Pour* $R_2 > 0$ *tel que* $0 < R_2 < R_1 < R$, *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega} \in L^{\tau_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.3.43}$$

Alors, il existe un rayon $R_3 > 0$ *avec* $0 < R_3 < R_2 < R_1 < R$ *tel que*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,60}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Tout d'abord, nous allons voir comment, à partir des hypothèses 1) et 2) ci-dessus, il est possible d'en déduire que pour certain $0 < r_1 < R_2 < R_1 < R$, et pour certain $\sigma > \tau_0$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Ceci représente, déjà une amélioration de l'information de type Morrey (2.3.42) que l'on a sur $\vec{u}$. Ensuite, en itérant ce processus mais en utilisant la nouvelle information nous pouvons arriver à $\sigma = 60$ qui suffira largement à nos besoins.

Pour obtenir le premier gain d'intégrabilité, fixons les paramètres

$$0 < r_1 < \widetilde{r} < \widehat{r} < R_2 < R_1,$$

avec les boules paraboliques associées $\mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}} \subset \mathbf{Q}_{\widehat{r}} \subset \mathbf{Q}_{R_2}$ (toutes les boules sont centrées sur le point (t_0, x_0)). Considérons maintenant $\phi, \psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions positives telles que $\phi, \psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et

$$\phi \equiv 1 \ \text{ sur } \ \mathbf{Q}_{r_1}, \ \ \text{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}} \quad \text{et} \quad \psi \equiv 1 \ \text{ sur } \ \mathbf{Q}_{\widetilde{r}}, \ \ \text{supp}(\psi) \subset \mathbf{Q}_{\widehat{r}}. \tag{2.3.44}$$

Définissons maintenant $\vec{V} = \phi\,\vec{u}$. Observons que par les propriétés de la fonction ϕ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V} = \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{u}$ et donc si nous montrons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V} \in \mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, nous pouvons conclure que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Pour cela, nous allons étudier l'évolution de $\vec{V}$ qui est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t\vec{V} = \Delta\vec{V} + \mathbb{V}, \\ \vec{V}(0,\cdot) = 0, \end{cases} \tag{2.3.45}$$

où nous avons posé

$$\mathbb{V} = (\partial_t\phi - \Delta\phi)\vec{u} + 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i(\partial_i\phi\vec{u}) - \phi(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \phi\vec{\nabla}p + \frac{\phi}{2}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \phi(\vec{f}). \tag{2.3.46}$$

Pour étudier plus en détail l'expression ci-dessus, nous devons réécrire le terme $\phi\vec{\nabla}p$, afin d'éviter une dérivée directe sur la pression. Ainsi comme nous avons l'identité $p = \psi p$ sur $\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}$, alors sur la plus petite boule $\mathbf{Q}_{r_1}$ (en rappelant que $\psi = 1$ sur $\mathbf{Q}_{r_1}$ par (2.3.44) puisque $\mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}}$), nous pouvons écrire $-\Delta(\psi p) = -\psi\Delta p + (\Delta\psi)p - 2\sum\limits_{i=1}^{3}\partial_i((\partial_i\psi)p)$ d'où l'on déduit l'identité

$$\phi\vec{\nabla}p = \phi\frac{\vec{\nabla}(-\psi\Delta p)}{(-\Delta)} + \phi\frac{\vec{\nabla}((\Delta\psi)p)}{(-\Delta)} - 2\sum_{i=1}^{3}\phi\frac{\vec{\nabla}(\partial_i((\partial_i\psi)p))}{(-\Delta)}. \tag{2.3.47}$$

Rappelons que l'on a $\Delta p = -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \partial_i \partial_j (u_i u_j)$ et donc, le premier terme de la partie de droite de la formule précédente peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\vec{\nabla}(-\psi \Delta p)}{(-\Delta)} &= \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \psi \big(\partial_i \partial_j u_i u_j\big) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big(\partial_i \partial_j (\psi u_i u_j) \Big) - \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big(\partial_i ((\partial_j \psi) u_i u_j) \Big) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big(\partial_j ((\partial_i \psi) u_i u_j) \Big) - \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big((\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \Big).
\end{aligned}$$

Par les propriétés des fonctions auxiliaires ϕ, ψ données dans (2.3.44) nous avons l'identité $\phi\psi = \phi$, et donc nous pouvons écrire pour le premier terme ci-dessus comme suit :

$$\phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \partial_i \partial_j (\psi u_i u_j) = \left[\phi, \frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) + \frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} (\phi u_i u_j).$$

Ainsi, nous obtenons finalement l'expression suivante pour (2.3.47) :

$$\begin{aligned}
\phi \vec{\nabla} p &= \sum_{i,j=1}^{3} \left[\phi, \frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} (\phi u_i u_j) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big(\partial_i ((\partial_j \psi) u_i u_j) \Big) + \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big(\partial_j ((\partial_i \psi) u_i u_j) \Big) \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \Big((\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \Big) + \phi \frac{\vec{\nabla}((\Delta \psi) p)}{(-\Delta)} - 2 \sum_{i=1}^{3} \phi \frac{\vec{\nabla}(\partial_i ((\partial_i \psi) p))}{(-\Delta)}.
\end{aligned}$$

Avec l'expression ci-dessus, nous obtenons la formule suivante pour (2.3.46) :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{V}} &= \underbrace{(\partial_t \phi - \Delta \phi) \vec{u}}_{(1)} + 2 \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\partial_i (\partial_i \phi \vec{u})}_{(2)} - \underbrace{\phi (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{3} - \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\left[\phi, \frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j)}_{(4)} + \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\frac{\vec{\nabla} \partial_i \partial_j}{(-\Delta)} (\phi u_i u_j)}_{(5)} \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\frac{\phi \vec{\nabla}}{(-\Delta)} \partial_i ((\partial_j \psi) u_i u_j)}_{(6)} + \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\frac{\phi \vec{\nabla}}{(-\Delta)} \partial_j ((\partial_i \psi) u_i u_j)}_{(7)} - \sum_{i,j=1}^{3} \underbrace{\frac{\phi \vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j)}_{(8)} \\
&\quad + 2 \underbrace{\phi \frac{\vec{\nabla}((\Delta \psi) p)}{(-\Delta)}}_{(9)} - 2 \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\phi \frac{\vec{\nabla}(\partial_i ((\partial_i \psi) p))}{(-\Delta)}}_{(10)} + \underbrace{\frac{\phi}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})}_{(11)} + \underbrace{\phi(\vec{f})}_{(12)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, par la formule de Duhamel, la solution $\vec{V}$ de l'équation (2.3.45) est donnée par

$$\vec{V} = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\mathbb{V}}(s, \cdot) ds = \sum_{k=1}^{12} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{\mathbb{V}}_k(s, \cdot) ds = \sum_{k=1}^{12} \vec{V}_k. \tag{2.3.48}$$

Montrons maintenant que pour tout $1 \leq k \leq 12$, $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{V}_k$ appartient à $\mathcal{M}_{t,x}^{3,\sigma}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

- Pour le premier terme $\vec{V}_1$ dans (2.3.48) nous avons

$$|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_1(t,x)| = \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[(\partial_t\phi - \Delta\phi)\vec{u}](s,x)ds\right|. \tag{2.3.49}$$

Comme le noyau de convolution associé à $e^{(t-s)\Delta}$ est le noyau de la chaleur $\mathfrak{g}_{t-s}$, comme $\text{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}}$ (voir (2.3.44)) et grâce aux propriétés de décroissance de ce noyau, nous avons l'estimation suivante

$$|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_1(t,x)| \leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^3}\,|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}(s,y)|\;dy\,ds.$$

Maintenant, en rappelant la définition du potentiel parabolique de Riesz donnée dans (2.1.7) et puisque $\mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}}$ nous obtenons l'estimation ponctuelle

$$|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_1(t,x)| \leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}|)(t,x). \tag{2.3.50}$$

Ainsi, en prenant la norme Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ nous obtenons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_1(t,x)\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}|)\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}}.$$

Considérons $\sigma > 0$ tel que pour $2 < q < \frac{5}{2}$

$$\sigma \leq \frac{q}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = 1 - \frac{2q}{5}.$$

Observons que comme $q < \frac{5}{2} < \tau_0$, nous avons que $\lambda < 1$. Alors, comme $3 \leq \frac{3}{\lambda}$, en utilisant les Lemmes 2.1.3 et 2.1.4 données dans la page 43 et comme $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ par hypothèse, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}|)\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C\|\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}}\\
&\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,q}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} < +\infty,
\end{aligned}$$

et nous avons obtenu que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_1 \in \mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Par des arguments similaires nous avons aussi $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_{12} \in \mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

- Pour le terme $\vec{V}_2$ dans (2.3.48), nous avons

$$|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_2(t,x)| \leq \sum_{i=1}^{3}\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_i\big((\partial_i\phi)\vec{u}\big)ds\right|.$$

Observons que par les propriétés du noyau de la chaleur et par la définition du potentiel de Riesz $\mathcal{L}_1$ (voir (2.1.7)), nous obtenons pour tout $1 \leq i \leq 3$

$$\begin{aligned}
A_i = \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\partial_i\big((\partial_i\phi)\vec{u}\big)ds\right| &= \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\partial_i\mathfrak{g}_{t-s}(x-y)(\partial_i\phi)\vec{u}(s,y)dyds\right|\\
&\leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds\\
&\leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}\vec{u}|))(t,x).
\end{aligned} \tag{2.3.51}$$

En prenant la norme Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ nous obtenons $\|A_i\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{u}|))\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}}$. Maintenant, pour $4 \leq q < 5 < \tau_0$ nous définissons $\lambda = 1 - \frac{q}{5}$. Comme $3 \leq \frac{3}{\lambda}$ et $\sigma \leq \frac{q}{\lambda}$, par le Lemme 2.1.4, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{u}|))\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C\|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{u}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,q}_{t,x}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} < +\infty,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_2\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

- Pour le terme $\vec{V}_3$ dans (2.3.48), par les mêmes arguments que ceux donnés dans (2.3.50), on a

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_3(t,x)| &= \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\left[\phi\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right)\right](s,y)dyds\right|\\ &\leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right)\right|\right)(t,x),\end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_3\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}}.$$

Fixons maintenant $2 < q < \frac{5}{2}$ et $\lambda = 1 - \frac{2q}{5}$. Prenons $\sigma \leq \frac{q}{\lambda}$. Alors, comme $3 < \frac{6}{5\lambda}$ en appliquant les Lemmes 2.1.3 et 2.1.4, page 43, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}}\\ &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},q}_{t,x}}.\end{aligned}$$

Si nous considérons $\frac{1}{q} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_1} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{1}{5} < \frac{3-2\alpha}{5}$ par l'inégalité de Hölder dans les espaces de Morrey (voir le Lemme 2.1.2, page 43) nous obtenons

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},q}_{t,x}} \leq \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\right\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\right\|_{\mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}} < +\infty.$$

Observons que la condition $\tau_0 < \sigma$ et la relation $\frac{1}{q} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{1}{5}$ sont compatibles avec le fait que $2 < q < \frac{5}{2}$.

- Étudions maintenant le terme $\vec{V}_4$ dans (2.3.48) qui est le plus technique à traiter. Par les propriétés du noyau de la chaleur, nous avons

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_4| &\leq \sum_{i,j=1}^3\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left|\left[\phi,\, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right](\psi u_iu_j)(s,y)\right|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^3}dyds\\ &\leq \sum_{i,j=1}^3\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(\left|\left[\phi,\, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right](\psi u_iu_j)\right|\right).\end{aligned}$$

En prenant la norme $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ nous avons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_4\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq \sum_{i,j=1}^3\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(\left|\left[\phi,\, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right](\psi u_iu_j)\right|\right)\right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}}.$$

Fixons $\frac{1}{q} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{1}{5}$ et $\lambda = 1 - \frac{2q}{5}$. Notons que comme $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$, l'on a $\frac{5}{3-2\alpha} < q < 2$, et donc $3 < \frac{3}{2\lambda}$. Ainsi, si nous considérons

$$\sigma \leq \frac{q}{\lambda} = \frac{5\tau_0}{10 - \tau_0}, \tag{2.3.52}$$

et donc par les Lemmes 2.1.3 et 2.1.4, page 43, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \mathcal{L}_2 \left(\left| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \mathcal{L}_2 \left(\left| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2\lambda}, \frac{q}{\lambda}}_{t,x}} \\ &\leq C \left\| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},q}_{t,x}}. \end{aligned}$$

Maintenant, si nous introduisons un seuil $\mathfrak{r} = \frac{\widetilde{r} - r_1}{2}$, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},q}_{t,x}} \leq & \sup_{\substack{(\mathrm{t},\bar{x}) \\ 0<r<\mathfrak{r}}} \frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{2q})}} \int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})} \left| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right|^{\frac{3}{2}} dxdt \\ & + \sup_{\substack{(\mathrm{t},\bar{x}) \\ \mathfrak{r}<r}} \frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{2q})}} \int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})} \left| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right|^{\frac{3}{2}} dxdt. \end{aligned} \tag{2.3.53}$$

Étudions d'abord le deuxième terme de la partie de droite ci-dessus. Comme $0 < \mathfrak{r} < r$ nous pouvons écrire

$$\sup_{\substack{(\mathrm{t},\bar{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \\ \mathfrak{r}<r}} \frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{2q})}} \int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})} \left| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right|^{\frac{3}{2}} dxdt \leq C_{\mathfrak{r}} \left\| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}}.$$

Puisque ϕ est une fonction test et $\frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}$ est un opérateur de Calderón-Zygmund, par le théorème du commutateur de Calderón (voir le livre [63]), l'opérateur $\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right]$ est borné dans l'espace $L^{\frac{3}{2}}_{t,x}$ et nous pouvons écrire en utilisant les propriétés du support de ψ données dans (2.3.44) et les inégalités de Hölder dans les espaces de Morrey

$$\begin{aligned} \left\| \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} &\leq C \left\| \psi u_i u_j \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} \leq C \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} u_i u_j \|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_{t,x}} \\ &\leq C \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \|_{\mathcal{M}^{3,3}_{t,x}} \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \|_{\mathcal{M}^{3,3}_{t,x}} \\ &\leq C \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} < +\infty. \end{aligned}$$

Étudions maintenant le premier terme de (2.3.53), nous devons faire quelques calculs supplémentaires. Comme nous sommes intéressés à obtenir des informations sur la boule parabolique $\mathbf{Q}_r(\mathrm{t}, \bar{x})$ nous pouvons écrire pour $0 < r < \mathfrak{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r} \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\psi u_i u_j) = & \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r} \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] (\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}} \psi u_i u_j) \\ & + \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r} \left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)} \right] ((\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}}) \psi u_i u_j), \end{aligned} \tag{2.3.54}$$

et comme précédemment, nous étudierons la norme $L^{\frac{3}{2}}_{t,x}$ de ces deux termes. Pour la première quantité de la partie de droite de (2.3.54), par le théorème du commutateur de Calderón, par la définition des espaces de Morrey et par les inégalités de Hölder, nous avons pour tout $0 < r < \mathfrak{r}$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right](\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}}\psi u_i u_j)\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}}\psi u_i u_j\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} \leq Cr^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} u_i u_j\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}_{t,x}}\\ &\leq Cr^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}.\end{aligned}$$

D'où, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{(\mathrm{t},\bar{x})\\ 0<r<R}} \frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{2q})}}\int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})}\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right](\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}}\psi u_i u_j)\right|^{\frac{3}{2}} dxdt &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Étudions maintenant le deuxième terme de la partie de droite de (2.3.54). Pour cela nous considérons l'opérateur suivant :

$$T : f \mapsto \left(\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{-\Delta}\right](\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})\psi\right) f.$$

Observons que par les propriétés du noyau de convolution de l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ nous obtenons

$$|T(f)(x)| \leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}(x)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})(y)\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}(y)|f(y)||\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^4}dy.$$

En rappelant que $0 < r < \mathfrak{r} = \frac{\widetilde{r}-r_1}{2}$ et par les propriétés du support de la fonction test ϕ (voir (2.3.44)), l'intégrale ci-dessus n'est pas nulle si $|x-y| > r$ et nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right]((\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})\psi u_i u_j)\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{|x-y|>r}}{|x-y|^4}(\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})(y)\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}(y)|u_i u_j|dy\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}}\\ &\leq C\left(\int_{|y|>r}\frac{1}{|y|^4}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}|u_i u_j|(\cdot - y)\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_r)}dy\right)^{\frac{3}{2}} \leq Cr^{-\frac{3}{2}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} u_i u_j\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_r)}.\end{aligned}$$

Avec cette estimation et en utilisant la définition des espaces de Morrey, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})}\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right]((\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})\psi u_i u_j)\right|^{\frac{3}{2}} dxdt &\leq Cr^{-\frac{3}{2}}r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} u_i u_j\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}_{t,x}}\\ &\leq Cr^{5(1-\frac{3}{2q})}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} u_i u_j\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}_{t,x}},\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que $\frac{1}{q} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, ce qui implique $r^{-\frac{3}{2}}r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})} = r^{5(1-\frac{3}{2q})}$. Nous obtenons donc finalement

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{(\mathrm{t},\bar{x})\\ 0<r<R}} \frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{2q})}}\int_{\mathbf{Q}_r(\mathrm{t},\bar{x})}\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r}\left[\phi, \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right]((\mathbb{I} - \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{2r}})\psi u_i u_j)\right|^{\frac{3}{2}} dxdt &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que tous les termes de (2.3.53) sont bornés et nous pouvons conclure que $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_4\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

Remarque 2.3.3. *La condition* (2.3.52) *implique une borne supérieure pour σ, qui dépend de l'information de type Morrey disponible sur $\vec{u}$. Néanmoins, il est clair que si nous obtenons une meilleure information de type Morrey sur $\vec{u}$, la valeur de σ peut augmenter.*

- Pour la quantité $\vec{V}_5$ dans (2.3.48), nous écrivons

$$\begin{aligned}
|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_5(t,x)| &\leq C\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds\\
&\leq C\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_1\left(|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)|\right)(t,x),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la décroissance du noyau de la chaleur (rappelons que $\mathcal{R}_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\Delta}}$ sont les transformées de Riesz). En prenant la norme Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ et par le Lemme 2.1.3, page 43, avec $\lambda = \frac{4\tau_0+5}{5\tau_0}$, $p=3$, $q<\tau_0$ tels que $\frac{p}{\nu}>3$ et $\frac{q}{\nu}>\sigma$ ce qui est compatible avec la condition $\tau_0<\sigma$, nous avons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_5\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\sum_{i,j=1}^{3}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_1\left(|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)|\right)\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{\nu},\frac{q}{\nu}}_{t,x}}.$$

Alors par le Lemme 2.1.4, page 43, avec $\lambda = 1-\frac{\tau_0/2}{5}$ (rappelons $\tau_0<10$ de sorte que $\nu>2\lambda$) et comme les transformées de Riesz sont bornées sur l'espace $L^{\frac{\tau_0}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et (2.3.43), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_1\left(|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)|\right)\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{\nu},\frac{q}{\nu}}_{t,x}} &\leq C\|\mathcal{L}_1\left(|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)|\right)\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2\lambda},\frac{q}{2\lambda}}_{t,x}}\\
&\leq C\|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq C\|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\phi u_i u_j)\|_{\mathcal{M}^{\frac{\tau_0}{2},\frac{\tau_0}{2}}_{t,x}}\\
&\leq \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}u_i u_j\|_{\mathcal{M}^{\frac{\tau_0}{2},\frac{\tau_0}{2}}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|^2_{L^{\tau_0}_t L^{\tau_0}_x} < +\infty,
\end{aligned}$$

et nous avons alors $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_5\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

- Pour le terme $\vec{V}_6$, en suivant les mêmes idées que le terme précédent, nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_6| &\leq C\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\left|\frac{\phi\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\psi)u_i u_j(s,y)\right|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^3}dyds\\
&= C\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left(\left|\frac{\phi\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\psi)u_i u_j\right|\right).
\end{aligned}$$

Pour $2<q<\frac{5}{2}$, définissons $\lambda = 1-\frac{2q}{5}$, nous avons donc $3\leq\frac{3}{2\lambda}$ et $\sigma\leq\frac{q}{\lambda}$. Alors, par les Lemmes 2.1.3, 2.1.4, page 43, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left|\frac{\phi\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\psi)u_i u_j\right|\right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\mathcal{L}_2\left|\frac{\phi\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\psi)u_i u_j\right|\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}}\\
&\leq C\left\|\frac{\phi\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\psi)u_i u_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},q}_{t,x}}.
\end{aligned}$$

Maintenant, comme $2 < q < \frac{5}{2} < \frac{\tau_0}{2}$ en utilisant le Lemme 2.1.3, page 43, nous avons

$$\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \mathcal{L}_2 \left| \frac{\phi \vec{\nabla} \partial_i}{(-\Delta)} (\partial_j \psi) u_i u_j \right| \right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C \left\| \frac{\vec{\nabla} \partial_i}{(-\Delta)} (\partial_j \psi) u_i u_j \right\|_{\mathcal{M}^{\frac{\tau_0}{2}, \frac{\tau_0}{2}}_{t,x}} = \left\| \frac{\vec{\nabla} \partial_i}{(-\Delta)} (\partial_j \psi) u_i u_j \right\|_{L^{\frac{\tau_0}{2}}_t L^{\frac{\tau_0}{2}}_x}.$$

Ensuite, comme l'opérateur $\frac{\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}$ est borné sur l'espace $L^{\frac{\tau_0}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et par (2.3.43), nous avons

$$\left\| \frac{\phi \vec{\nabla} \partial_i}{(-\Delta)} (\partial_j \psi) u_i u_j \right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2}, q}_{t,x}} \leq C \left\| (\partial_j \psi) u_i u_j \right\|_{L^{\frac{\tau_0}{2}}_t L^{\frac{\tau_0}{2}}_x} \leq C \| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{u} \|^2_{L^{\tau_0}_t L^{\tau_0}_x} < +\infty,$$

d'où l'on déduit $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{V}_6\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$. Observons que les mêmes calculs peuvent être effectués pour obtenir que $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{V}_7\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

- Pour le terme $\vec{V}_8$ dans (2.3.48), on écrit d'abord

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \vec{V}_8\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \left(\mathcal{L}_2 \left| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}}.$$

Nous fixons $1 < \nu < \frac{3}{2}$, $2\nu < q < \frac{5\nu}{2}$ et $\lambda = 1 - \frac{2q}{5\nu}$, on a donc $3 \leq \frac{\nu}{\lambda}$ et $\sigma \leq \frac{q}{\lambda}$. Alors, par le Lemme 2.1.3 et par le Lemme 2.1.4 on peut écrire

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \left(\mathcal{L}_2 \left| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} &\leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}} \left(\mathcal{L}_2 \left| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right| \right) \right\|_{\mathcal{M}^{\frac{\nu}{\lambda}, \frac{q}{\lambda}}_{t,x}} \\ \leq C \left\| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right\|_{\mathcal{M}^{\nu,q}_{t,x}} &\leq C \left\| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right\|_{\mathcal{M}^{\nu,\frac{5\nu}{2}}_{t,x}} \\ \leq C \left\| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right\|_{L^{\nu}_t L^{\infty}_x}, \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

où, dans la dernière estimation, nous avons utilisé l'inclusion $L^{\nu}_t L^{\infty}_x \subset \mathcal{M}^{\nu, \frac{5\nu}{2}}_{t,x}$ (voir Lemme 2.1.1).

Remarque 2.3.4. *Notons que si le paramètre q ci-dessus est proche de la valeur $\frac{5\nu}{2}$, alors $\lambda = 1 - \frac{2q}{5\nu}$ est proche de 0 et la valeur $\frac{q}{\lambda}$ peut donc être très grande et alors dans l'estimation* (2.3.55), *on peut considérer un espace de Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ avec $\sigma \gg 1$.*

Étudions maintenant la norme $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ ci-dessus. Par les propriétés du support de la fonction auxiliaire ψ données dans (2.3.44), nous avons $\text{supp}(\partial_i \partial_j \psi) \subset \mathbf{Q}_{R_1} \setminus \mathbf{Q}_{\widehat{r}}$ et par (2.3.44) nous avons $\text{supp}\phi \subset \mathbf{Q}_{\widetilde{r}}$ où $\widetilde{r} < \widehat{r} < R_1$, donc par les propriétés du noyau de l'opérateur $\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left| \phi \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j) \right| &\leq C \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}(x) \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1} \setminus \mathbf{Q}_{\widehat{r}}}(y) (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j)(\cdot, y) dy \right| \\ &\leq C \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbb{1}_{|x-y| > (\widehat{r} - \widetilde{r})}}{|x-y|^2} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}(x) \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1} \setminus \mathbf{Q}_{\widehat{r}}}(y) (\partial_i \partial_j \psi)(u_i u_j)(\cdot, y) dy \right|. \end{aligned}$$

Observons que l'expression précédente est la convolution entre la fonction $(\partial_i\partial_j\psi)(u_iu_j)$ et une fonction L^∞, nous avons donc

$$\begin{aligned}\left\|\phi\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\psi)(u_iu_j)(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} &\leq C\|(\partial_i\partial_j\psi)(u_iu_j)(t,\cdot)\|_{L^1}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}(u_iu_j)(t,\cdot)\|_{L^\nu}, \end{aligned}\tag{2.3.56}$$

et en prenant la norme L^ν dans la variable temporelle, nous obtenons

$$\left\|\phi\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\psi)(u_iu_j)\right\|_{L^\nu_tL^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}u_iu_j\|_{L^\nu_tL^\nu_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}} < +\infty,$$

où nous avons utilisé le fait que $1<\nu<\frac{3}{2}<\frac{\tau_0}{2}$ et nous avons appliqué l'inégalité de Hölder. En rassemblant toutes ces estimations, nous obtenons $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_8\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

- La quantité $\vec{V}_9$ dans (2.3.48) peut être traitée de manière similaire. En effet, par les mêmes arguments utilisés pour déduire (2.3.55), on peut écrire (rappelons que $1<\nu<\frac{3}{2}$) :

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_9\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\left\|\phi\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}((\Delta\psi)p)\right\|_{L^\nu_tL^\infty_x},$$

et si l'on étudie la norme L^∞ dans la variable d'espace de ce terme, par les mêmes idées que celles utilisées dans (2.3.55)-(2.3.56) on obtient

$$\left\|\phi\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}((\Delta\psi)p)(t,\cdot)\right\|_{L^\infty} \leq C\|(\Delta\psi)p(t,\cdot)\|_{L^1} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}p(t,\cdot)\|_{L^\nu}.$$

Ainsi, en prenant la norme L^ν dans la variable temporelle, nous avons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_9\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\left\|\phi\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}((\Delta\psi)p)\right\|_{L^\nu_tL^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}p\|_{L^\nu_tL^\nu_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}p\|_{L^{\frac{3}{2}}_tL^{\frac{3}{2}}_x} < +\infty.$$

- L'étude de la quantité $\vec{V}_{10}$ suit presque les mêmes lignes que les termes $\vec{V}_8$ et $\vec{V}_9$. Cependant, au lieu de (2.3.55), nous avons

$$\left|\phi\frac{\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}((\partial_i\psi)p)\right| \leq C\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{|x-y|>(\widehat{r}-\widetilde{r})}}{|x-y|^3}\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\widetilde{r}}}(x)\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}\setminus\mathbf{Q}_{\widehat{r}}}(y)(\partial_i\psi)p(t,y)dy\right|,$$

et nous pouvons donc écrire :

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_{10}\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq \left\|\phi\frac{\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}((\partial_i\psi)p)\right\|_{L^\nu_tL^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}p\|_{L^\nu_tL^\nu_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}p\|_{L^{\frac{3}{2}}_tL^{\frac{3}{2}}_x} < +\infty.$$

Notons que, pour la même raison que celle donnée dans la Remarque 2.3.4, dans l'étude des termes qui contiennent la pression (*i.e.* $\vec{V}_9$ et $\vec{V}_{10}$), nous pouvons considérer un espace de Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ avec $\sigma \gg 1$. Mais ce n'est plus le cas pour le dernier terme ci-dessous.

- Enfin, pour le terme $\vec{V}_{11}$ dans (2.3.48) nous écrivons :

$$\begin{array}{rcl} |\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_{11}| & = & \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}[\phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})](s,x)ds\right| \\ & \leq & \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{\omega})(s,x)ds\right| + \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\displaystyle\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{\omega}(s,x)ds\right| \\ & \leq & \mathbb{V}_a + \mathbb{V}_b, \end{array}$$

pour le premier terme ci-dessus, et en suivant les idées données dans (2.3.51), nous avons l'estimation suivante avec le potentiel de Riesz $\mathcal{L}_1$, et par le Lemme 2.1.3 nous pouvons écrire

$$\|\mathbb{V}_a\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|))\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{120,120}_{t,x}} = \|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{q}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}},$$

où $q=\frac{24}{5}$ et $\lambda=\frac{1}{25}$. Ainsi, puisque $1<\frac{5}{q}$ et que $\lambda=1-\frac{q}{5}$ on peut appliquer le Lemme 2.1.4 pour obtenir que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{q}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{q,q}_{t,x}} = C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{\frac{24}{5},\frac{24}{5}}_{t,x}} \\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{6,6}_{t,x}} = C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \end{aligned}$$

Maintenant, pour le terme $\mathbb{V}_b$ ci-dessus, en utilisant les mêmes idées que dans (2.3.49)-(2.3.50) et en appliquant à nouveau le Lemme 2.1.3, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \|\mathbb{V}_b\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} & \leq & C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|))\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}(\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|))\|_{\mathcal{M}^{60,60}_{t,x}} \\ & \leq & C\|\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{q}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}}, \end{array} \tag{2.3.57}$$

où cette fois nous prenons $q=\frac{12}{5}$ et $\lambda=\frac{1}{25}$. Puisque nous avons $2<\frac{5}{q}$ et $\lambda=1-\frac{2q}{5}$, nous appliquons le Lemme 2.1.4 et nous avons

$$\begin{aligned} C\|\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}^{\frac{q}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{q,q}_{t,x}} = C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{\frac{12}{5},\frac{12}{5}}_{t,x}} \\ &\leq \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{6,6}_{t,x}} = \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \end{aligned}$$

On peut donc conclure que $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}}\vec{V}_{11}\|_{\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}} < +\infty$.

Remarque 2.3.5. *Remarquons que la valeur de l'indice σ de l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ est en réalité limitée par l'information concernant $\vec{\omega}$ (voir l'expression* (2.3.57) *ci-dessus). Dans ce cas, nous avons une valeur maximal ≈ 60, ce qui, comme nous le verrons plus tard, est suffisant pour nos besoins.*

Ainsi, nous avons montré un petit gain d'intégrabilité en passant d'une information sur l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}$ à un contrôle sur l'espace $\mathcal{M}^{3,\sigma}_{t,x}$ avec $\tau_0<\sigma$ avec σ proche de τ_0. Ceci n'est bien sûr pas suffisant et nous devons répéter les arguments ci-dessus afin d'obtenir un meilleur contrôle.

En effet, nous pouvons appliquer les mêmes arguments pour obtenir sur rayon plus petit $0<\widetilde{r}<r_1$ que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\tilde{r}}}\vec{u}\in\mathcal{M}^{3,\sigma_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ où $\sigma_1=\sigma+\varepsilon$. En itérant ces arguments, on obtient l'information $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\in\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ où la valeur $\sigma=60$ est essentiellement fixée par l'information disponible sur la quantité $\vec{\omega}$: voir la Remarque 2.3.5. Ceci termine la démonstration de la Proposition 2.3.3.

$\blacksquare$

D) Un gain d'intégrabilité de $\operatorname{div}(\vec{\omega})$

Rappelons que jusqu'à maintenant dans les sections précédentes nous avons montré

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}(t_0,x_0)}\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\in\mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),\quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}(t_0,x_0)}\vec{\omega}\in L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),\quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}(t_0,x_0)}\vec{u}\in L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}(t_0,x_0)}\vec{u}\in\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \tag{2.3.58}$$

où $0<R_3<R_2<R_1<R<1$, avec $\tau_1=\frac{1}{\tau_1}=\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{5}$. Nous allons exploiter ces informations afin d'obtenir un gain d'information sur $\operatorname{div}(\vec{\omega})$.

Proposition 2.3.4. *Soit $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 des équations micro-polaires sur $\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$. Supposons que pour certain $0<\alpha<\frac{1}{24}$ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{f}\in L^2_t\dot{H}^1_x\cap\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7},\tau_a}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, pour $\tau_a>\frac{5}{2-\alpha}$. Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1) *il existe $R_1>0$ tel que $0<R_1<R$ tel que pour $\frac{5}{1-\alpha}<\tau_0<\frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_1}=\frac{1}{\tau_0}+\frac{1}{5}$, nous avons*
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\in\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),\quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\in\mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

2) *Pour $R_2>0$ tel que $0<R_2<R_1<R$, nous avons*
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u},\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\in L^{\tau_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

3) *Pour un rayon $R_3>0$ avec $0<R_3<R$, nous avons*
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}(t_0,x_0)}\vec{u}\in\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Alors, pour $R_4>0$ tel que $0<R_4<R_3<R_2<R_1<R$, nous avons
$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}(t_0,x_0)}\operatorname{div}(\vec{\omega})\in\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

Preuve. Tout d'abord, nous appliquons l'opérateur de divergence à l'équation satisfaite par $\vec{\omega}$ (voir le système (2.3.1)) et comme nous avons les identités $\operatorname{div}(\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}))=\Delta\vec{\omega}$ et $\operatorname{div}(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\equiv 0$, nous obtenons
$$\partial_t\operatorname{div}(\vec{\omega})=2\Delta\operatorname{div}(\vec{\omega})-\operatorname{div}(\vec{\omega})-\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}).$$

Considérons maintenant $\bar{\phi}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction positive telle que $\bar{\phi}\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et pour $R_4>0$ avec $0<R_4<\widehat{r}<R_3$, nous avons

$$\bar{\phi}\equiv 1\ \text{ sur }\ \mathbf{Q}_{\widehat{r}}(t_0,x_0),\ \ \operatorname{supp}(\bar{\phi})\subset\mathbf{Q}_{R_3}(t_0,x_0). \tag{2.3.59}$$

Définissons la variable $\mathcal{W}$ par
$$\mathcal{W}=\bar{\phi}\operatorname{div}(\vec{\omega}),$$

et nous allons montrer que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}\in\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Pour cela, en utilisant l'équation vérifie par $\operatorname{div}(\vec{\omega})$, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t\mathcal{W} &= (\partial_t\bar{\phi})\operatorname{div}(\vec{\omega})+\bar{\phi}\Big(2\Delta\operatorname{div}(\vec{\omega})-\operatorname{div}(\vec{\omega})-\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega})\Big)\\ &= 2\Delta\mathcal{W}+(\partial_t\bar{\phi}+2\Delta\bar{\phi}-\bar{\phi})\operatorname{div}(\vec{\omega})-4\sum_{i=1}^{3}\partial_i\big((\partial_i\bar{\phi})\operatorname{div}(\vec{\omega})\big)-\bar{\phi}\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\bar{\phi}\Delta\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) = \Delta(\bar{\phi}\,\mathrm{div}(\vec{\omega})) + \Delta\bar{\phi}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i\big((\partial_i\bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\big)$. Comme $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$, nous avons l'identité suivante :

$$\bar{\phi}\,\mathrm{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}) = \bar{\phi}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right) = \mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right) - \mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bar{\phi}) - \vec{\nabla}\bar{\phi}\cdot\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}),$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t\mathcal{W} &= 2\Delta\mathcal{W} + (\partial_t\bar{\phi} + 2\Delta\bar{\phi} - \bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - 4\sum_{i=1}^{3}\partial_i\big((\partial_i\bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\big) - \mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right)\\ &\quad + \mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bar{\phi}) + \vec{\nabla}\bar{\phi}\cdot\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}).\end{aligned}$$

Ainsi, par les propriétés de la fonction de localisation $\bar{\phi}$ données dans (2.3.59) nous avons $\mathcal{W}(0,\cdot) = 0$, et donc en utilisant la formule de Duhamel nous pouvons écrire

$$\mathcal{W}(t,x) = \underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}(\partial_t\bar{\phi} + 2\Delta\bar{\phi} - \bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega})ds}_{\mathcal{W}_1} - 4\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big((\partial_i\bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\big)ds}_{\mathcal{W}_2} \tag{2.3.60}$$

$$-\underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right)ds}_{\mathcal{W}_3} + \underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bar{\phi})ds}_{\mathcal{W}_4} + \underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\bar{\phi}\cdot\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})ds}_{\mathcal{W}_5}.$$

Étudions chaque terme ci-dessus.

- Pour le premier terme $\mathcal{W}_1$, nous écrivons,

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_1| &\leq \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}\left((\partial_t\bar{\phi} + 2\Delta\bar{\phi} - \bar{\phi})\vec{\omega}\right)ds\right|\\ &\quad + \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\left(\vec{\nabla}\left(\partial_t\bar{\phi} + 2\Delta\bar{\phi} - \bar{\phi}\right)\right)\cdot\vec{\omega}ds\right|.\end{aligned} \tag{2.3.61}$$

Puisque le noyau de convolution du semi-groupe $e^{2(t-s)\Delta}$ est le noyau de la chaleur $\mathfrak{g}_{2(t-s)}$, donc par les propriétés de décroissance de ce noyau, par les propriétés de la fonction test $\bar{\phi}$ (voir (2.3.59)) et par la définition des potentiels de Riesz paraboliques $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ donnée dans (2.1.7), page 43, nous pouvons écrire l'estimation

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_1| &\leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|)^4}dyds\\ &\quad + C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|)^3}dyds\\ &\leq C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|))(t,x) + C\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|))(t,x),\end{aligned}$$

et nous avons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_1\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|))\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} + C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|))\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}}.$$

Pour le premier terme ci-dessus, comme $\frac{60}{11} \leq \frac{15}{2}$, nous fixons $p = \frac{6}{5}$, $q = \frac{9}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{10}$ et par le Lemme 2.1.3, nous obtenons

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{15}{2}}} \leq C\|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{\lambda 5},\frac{9}{2\lambda}}},$$

puisque $\frac{6}{5} < \frac{6}{\lambda 5}$ et $\frac{15}{2} < \frac{9}{2\lambda}$. Ainsi, en appliquant les Lemmes 2.1.3 et 2.1.4, page 43, nous avons

$$\|\mathcal{L}_1(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{\lambda 5},\frac{9}{2\lambda}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{9}{2}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty,$$

où nous avons utilisé le fait que $R_3 < R_2$ et le contrôle $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega} \in L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ donné dans (2.3.58).

Pour le deuxième terme, nous fixons $p = \frac{6}{5}$, $q = \frac{12}{5}$ et $\lambda = \frac{1}{25}$, et en appliquant les Lemmes 2.1.3-2.1.4, page 43, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|))\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{L}_2(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{15}{2}}} \leq \|(|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}|)\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{\lambda 5},\frac{12}{\lambda 5}}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{12}{5}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'information (2.3.58). Avec ces deux estimations, nous concluons que $\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_1\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} < +\infty$.

- Pour le terme $\mathcal{W}_2$ de (2.3.60), nous devons étudier pour tout $1 \leq i \leq 3$, les quantités

$$\mathbb{W}_i = \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big((\partial_i\bar{\phi})\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\big)ds\right|,$$

et nous écrivons

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_i \;&\leq\; \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big(\,\mathrm{div}((\partial_i\bar{\phi})\vec{\omega})\big)ds\right|\\ &\quad+\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big([\vec{\nabla}(\partial_i\bar{\phi})]\cdot\vec{\omega}\big)ds\right|.\end{aligned} \tag{2.3.62}$$

Nous étudions le premier terme ci-dessus. Par les propriétés du support de la fonction $\bar{\phi}$ données dans (2.3.59), nous avons pour $1 \leq i, j \leq 3$

$$\left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\partial_j\big((\partial_i\bar{\phi})\vec{\omega})\big)ds\right| \leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}(s,y)|\vec{\omega}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^5}dyds,$$

où l'ensemble $\mathcal{C}(\widehat{r}, R_3)$ est la couronne définie par $\mathbf{Q}_{R_3} \setminus \mathbf{Q}_{\widehat{r}}$. Notons que $(t,x) \in \mathbf{Q}_{R_4}$ et que $(s,y) \in \mathcal{C}(\widehat{r}, R_3)$, ainsi comme nous avons $R_4 < \widehat{r}$, il s'ensuit que le noyau de convolution $\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}(s,y)}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^5}$ est borné et on peut écrire

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\partial_j\big((\partial_i\bar{\phi})\vec{\omega})\big)ds\right\|_{L^\infty_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}\vec{\omega}\|_{L^1_tL^1_x}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty,\end{aligned} \tag{2.3.63}$$

d'où l'on déduit que

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big(\,\mathrm{div}((\partial_i\bar{\phi})\vec{\omega})\big)ds\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.$$

Le deuxième terme de (2.3.62) a la même structure que le premier terme de (2.3.61), et donc par les mêmes arguments nous avons

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_i\big([\vec{\nabla}(\partial_i\bar{\phi})]\cdot\vec{\omega}\big)ds\right\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.$$

- Nous étudions maintenant le terme $\mathcal{W}_3$ défini dans (2.3.60) et nous écrivons

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_3\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}} &= \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right)ds\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}} \\ &\leq \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}\left(\mathrm{div}(\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right)ds\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}}. \end{aligned}$$

Ensuite, par la régularité maximale du noyau de la chaleur (cf. [63, Théorème 7.3], [62]), nous avons

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_3\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}} \leq C\left\|\bar{\phi}\vec{\omega}\otimes\vec{u}\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}}.$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Hölder pour les espaces de Morrey énoncées dans le Lemme 2.1.2, page 43 (avec $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et $\frac{11}{60}=\frac{1}{6}+\frac{1}{60}$) et les propriétés de la fonction localisante $\bar{\phi}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_3\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{2,6}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} \\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}^{6,6}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} < +\infty, \end{aligned}$$

où, dans la dernière estimation ci-dessus, nous avons utilisé le Lemme 2.1.3 et les informations disponibles dans (2.3.58).

- Pour le terme $\mathcal{W}_4$ donné dans (2.3.60) nous avons

$$\begin{aligned} |\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_4| &= \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\bar{\phi})ds\right| \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}(s,y)|\vec{\omega}\otimes\vec{u}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds, \end{aligned}$$

et donc, par les mêmes idées que dans (2.3.63), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \left\|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}|\vec{\omega}\otimes\vec{u}(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds\right\|_{L^\infty_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}\vec{\omega}\otimes\vec{u}\|_{L^1_tL^1_x} \\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué les inégalités de Hölder. Avec ces estimations, nous en déduisons que

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_4\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}} < +\infty.$$

- Pour le dernier terme $\mathcal{W}_5$ de (2.3.60) nous avons

$$|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_5| = \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\bar{\phi}\cdot\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})ds\right|.$$

Ainsi, pour $1\leq i,j,k,l\leq 3$ nous devons étudier les quantités

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{i,j,k,l} &= \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}(\partial_i\bar{\phi})\partial_j(w_ku_l)ds\right| \\ &\leq \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\partial_j\Big((\partial_i\bar{\phi})(w_ku_l)\Big)ds\right| + \left|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}(\partial_j\partial_i\bar{\phi})(w_ku_l)ds\right|, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $(\partial_i\bar{\phi})\partial_j(w_k u_l) = \partial_j\Big((\partial_i\bar{\phi})(w_k u_l)\Big) - (\partial_j\partial_i\bar{\phi})(w_k u_l)$. Maintenant, par les propriétés du noyau de la chaleur et du support de la fonction $\bar{\phi}$, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_{i,j,k,l} &\leq C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}|w_k u_l(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds\\ &+C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}|w_k u_l(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^3}dyds.\end{aligned}$$

Maintenant, par les mêmes arguments que ceux donnés dans (2.3.63) nous obtenons

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}|w_k u_l(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^4}dyds\right\|_{L^\infty_{t,x}}+\left\|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}(t,x)\mathbb{1}_{\mathcal{C}(\widehat{r},R_3)}|w_k u_l(s,y)|}{(|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|)^3}dyds\right\|_{L^\infty_{t,x}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}w_k u_l\|_{L^1_t L^1_x}+C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}w_k u_l\|_{L^1_t L^1_x}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u}\|_{L^6_{t,x}}<+\infty,\end{aligned}$$

et avec ces estimations pour $1\leq i,j,k,l\leq 3$, nous déduisons que

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}}\mathcal{W}_5\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}}<+\infty.$$

Enfin, en utilisant tous ces contrôles précédentes, nous obtenons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}(t_0,x_0)}\mathcal{W}\in\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Comme $\mathcal{W}=\bar{\phi}\operatorname{div}(\vec{\omega})$, $\bar{\phi}\equiv 1$ sur $\mathbf{Q}_{\widehat{r}}$ et $R_4<\widehat{r}$ nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}(t_0,x_0)}\operatorname{div}(\vec{\omega})\in\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

et donc la preuve de la Proposition 2.3.4 est terminée. ■

E) Déduction de la régularité Höldérienne de $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ en utilisant le lemme de Ladyzhenskaya.

Tout d'abord rappelons que par (2.3.9), nous avons

$$\vec{\mathcal{U}}(t,x)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\vec{\mathcal{A}}+\sum_{i=1}^{3}\partial_i\vec{\mathcal{B}}_i+\vec{\nabla}\mathcal{C}+\vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{D}}+\operatorname{div}\mathbb{E}+\eta\vec{f}\right)ds,$$

où que le vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ est donné par

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}} &= (\partial_t\eta+\Delta\eta)(\vec{u}+\vec{\omega})+\vec{u}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta-\eta\vec{\nabla}p-\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\eta)\wedge\vec{\omega}\\ &\quad-(\vec{\nabla}\eta)\operatorname{div}(\vec{\omega})-\eta\vec{\omega}+\vec{\omega}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta,\end{aligned}$$

le vecteur $\vec{\mathcal{B}}_i$ (pour $1\leq i\leq 3$) est donné par

$$\vec{\mathcal{B}}_i=2(\partial_i\eta)(\vec{u}+\vec{\omega}),$$

la fonction scalaire $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\mathcal{C}=\eta\operatorname{div}(\vec{\omega}),$$

le vecteur $\vec{\mathcal{D}}$ est donné par

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\eta(\vec{\omega} + \vec{u}),$$

et le tenseur $\mathbb{E}$ est défini par l'expression

$$\mathbb{E} = -\eta(\vec{u} \otimes \vec{u} + \vec{\omega} \otimes \vec{u}).$$

Ainsi, avec toute l'information obtenue sur $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ nous allons maintenant obtenir un gain d'information de type Morrey pour les termes ci-dessus, et donc nous pourrons appliquer le Lemme 2.1.5, page 44 à l'expression 2.3.9. ce qui impliquera la régularité Höldérienne de $\vec{\mathcal{U}}$. En effet, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3.5. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 des équations micro-polaires* (2.3.1) *sur* $\mathbf{Q}_R$. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1) *il existe* R_1 *avec* $0 < R_1 < R$ *tel que pour* $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ *et* $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

2) *Pour* $R_2 > 0$ *tel que* $0 < R_2 < R_1 < R$, *nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.3.64}$$

3) *En plus, il existe* $R_3 > 0$ *avec* $0 < R_3 < R_2 < R_1 < R$ *tel que* $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,60}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.
4) *Enfin, pour* $R_4 > 0$ *tel que* $0 < R_4 < R_3 < R_2 < R_1 < R$, *nous avons* $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}} \operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Alors, nous avons

$$\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad et \quad \vec{\mathcal{B}}_i, \mathcal{C}, \vec{\mathcal{D}}, \mathbb{E} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

où $1 < \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < \mathfrak{q}_1$ *avec* $\frac{1}{\mathfrak{q}_0} = \frac{2-\alpha}{5}$, $\frac{1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{1-\alpha}{5}$ *et* $0 < \alpha < \frac{1}{24}$.

Preuve. En utilisant la définition de la quantité $\vec{\mathcal{A}}$, (voir (2.3.4)), nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq & C \underbrace{\|(\partial_t\eta + \Delta\eta)(\vec{u} + \vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(1)} + C \underbrace{\|\vec{u} \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\eta\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(2)} + C \underbrace{\|\eta\vec{\nabla}p\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(3)} \\ & + C \underbrace{\|(\vec{\nabla}\eta) \wedge \vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(4)} + C \underbrace{\|(\vec{\nabla}\eta) \operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(5)} + C \underbrace{\|\eta\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(6)} + C \underbrace{\|\vec{\omega} \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\eta\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}}_{(7)}. \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

Étudions maintenant chaque terme ci-dessus.

- Pour le premier terme de (2.3.65), nous remarquons que puisque $\mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 = \frac{5}{2-\alpha}$ et que $0 < \alpha < \frac{1}{24}$, nous avons $\mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < 3 < \tau_0$, et donc par les propriétés du support de la fonction η ainsi que par les propriétés des espaces de Morrey données dans le Lemme 2.1.3, page 43, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|(\partial_t\eta + \Delta\eta)(\vec{u} + \vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} & \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}}(\vec{u} + \vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \\ & \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u} + \vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\tau_0,\tau_0}} = C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u} + \vec{\omega})\|_{L_{t,x}^{\tau_0}} < +\infty,\end{aligned}$$

puisque nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} \vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}} \vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ grâce à (2.3.64).

- Les termes (2) et (7) de (2.3.65) peuvent être traités de manière similaire. En effet, puisque $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ nous avons $\mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < 3$ et par les mêmes arguments que dans le point précédent nous écrivons

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta\|_{\mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}}\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,3}_{t,x}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^3_tL^3_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{L^{\tau_0}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{L^{\tau_0}_{t,x}} < +\infty,\end{aligned}$$

  où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder dans la dernière estimation ainsi que les contrôles (2.4.11). Les mêmes idées s'appliquent pour traiter le terme (7).

- Pour traiter le terme (3) de (2.3.65), nous considérons une fonction auxiliaire $\widetilde{\psi}$ telle que pour $0 < r_a < R_3$ nous avons

$$\widetilde{\psi} \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{Q}_{r_a}(t_0,x_0),\ \ \text{supp}(\widetilde{\psi}) \subset \mathbf{Q}_{R_3}(t_0,x_0).$$

  En utilisant l'égalité $-\Delta(\widetilde{\psi}p) = -\widetilde{\psi}\Delta p + (\Delta\widetilde{\psi})p - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i((\partial_i\widetilde{\psi})p)$, nous en déduisons que

$$\eta\widetilde{\psi}\vec{\nabla}p = \eta\frac{\vec{\nabla}(-\widetilde{\psi}\Delta p)}{(-\Delta)} + \eta\frac{\vec{\nabla}((\Delta\widetilde{\psi})p)}{(-\Delta)} - 2\sum_{i=1}^{3}\eta\frac{\vec{\nabla}(\partial_i((\partial_i\widetilde{\psi})p))}{(-\Delta)}.$$

  Comme $\eta\widetilde{\psi} = \eta$, et en utilisant l'équation satisfaite par la pression, nous pouvons réécrire le terme (3) de la façon suivante

$$\begin{aligned}\eta\vec{\nabla}p = &\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}\eta\frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}(\widetilde{\psi}u_iu_j)}_{(a)} - \underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\eta\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\widetilde{\psi})u_iu_j}_{(b)} - \underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\eta\vec{\nabla}\partial_j}{(-\Delta)}(\partial_i\widetilde{\psi})u_iu_j}_{(c)}\\ &+ \underbrace{2\sum_{i,j=1}^{3}\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_iu_j)}_{(d)} + \underbrace{\eta\frac{\vec{\nabla}\big((\Delta\widetilde{\psi})p\big)}{(-\Delta)}}_{(e)} \underbrace{-2\sum_{i=1}^{3}\widetilde{\phi}\frac{\vec{\nabla}\big(\partial_i((\partial_i\widetilde{\psi})p)\big)}{(-\Delta)}}_{(f)}.\end{aligned} \tag{2.3.66}$$

  Puisque $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ nous avons $\mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 = \frac{5}{2-\alpha} < \frac{120}{47} < 3$ et donc il suffit de prouver que chacun de ces termes ci-dessus appartient à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

  - ⋆ Le terme (a) dans (2.3.66) est traité comme suit : puisque les transformées de Riesz sont bornées dans les espaces de Morrey, nous obtenons

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}(\widetilde{\psi}u_iu_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\frac{\partial_i\partial_j\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\widetilde{\psi}u_iu_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\vec{\nabla}(\widetilde{\psi}u_iu_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}}.$$

    Notons que pour tout $1 \leq k \leq 3$, par l'inégalité de Hölder dans les espaces de Morrey, le Lemme 2.1.3, page 43, et la troisième hypothèse de la Proposition 2.3.5, nous avons

$$\left\|(\partial_k\widetilde{\psi})u_iu_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}u_iu_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},30}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}u_i\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}u_j\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} < +\infty,$$

    puisque $\frac{6}{5} < \frac{3}{2}$, $\frac{120}{47} < 30$ et $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{30} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60}$. Par les mêmes arguments nous avons

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\psi}(\partial_ku_i)u_j\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{2,p}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}u_j\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}u_j\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} < +\infty,\end{aligned}$$

car on a $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et $\frac{23}{60} = \frac{1}{p} + \frac{1}{60}$ et $p < \tau_1 < \frac{20}{7}$. De façon symétrique, nous avons aussi

$$\|\widetilde{\psi} u_i(\partial_k u_j)\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}} u_i\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{\mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}} < +\infty,$$

Ainsi on en déduit que

$$\left\|\eta \frac{\vec{\nabla}\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}(\widetilde{\psi} u_i u_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} < +\infty.$$

- ⋆ Les termes (b) et (c) de (2.3.66) peuvent être traités de la même manière, en effet comme l'on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\eta\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\widetilde{\psi})u_i u_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} &\leq C\left\|\frac{\vec{\nabla}\partial_i}{(-\Delta)}(\partial_j\widetilde{\psi})u_i u_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|(\partial_j\widetilde{\psi})u_i u_j\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}}\\
&\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} u_i u_j\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},30}_{t,x}}\\
&\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} u_i\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} u_j\|_{\mathcal{M}^{3,60}_{t,x}} < +\infty.
\end{aligned}$$

- ⋆ Le terme (d) est traité comme suit. Par le Lemme 2.1.3, puisque $\frac{6}{5} < \frac{3}{2}$ et $\frac{120}{47} < \frac{15}{4}$, on a

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_i u_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_i u_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{15}{4}}_{t,x}}.$$

Par l'inclusion $L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x \subset \mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{15}{4}}_{t,x}$ (voir Lemme 2.1.1, page 43) nous obtenons

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_i u_j)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{3}{2},\frac{15}{4}}_{t,x}} \leq C\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_i u_j)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x}.$$

Grâce aux propriétés du support des fonctions auxiliaires, nous obtenons

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\widetilde{\psi})(u_i u_j)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}} u_i u_j\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,30}_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}^{3,30}_{t,x}} < +\infty.$$

- ⋆ Le terme (e) de (2.3.66) suit les mêmes idées que le précédent, et nous avons

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}\big((\Delta\widetilde{\psi})p\big)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}\big((\Delta\widetilde{\psi})p\big)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} p\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} < +\infty,$$

  où nous avons utilisé le fait que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est partiellement adaptée et donc nous avons l'hypothèse $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.
- ⋆ Le dernier terme de (2.3.66) est estimé de manière similaire :

$$\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}\partial_i((\partial_i\widetilde{\psi})p)\right\|_{\mathcal{M}^{\frac{6}{5},\frac{120}{47}}_{t,x}} \leq C\left\|\eta\frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)}\partial_i((\partial_i\widetilde{\psi})p)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} p\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}} < +\infty.$$

Nous avons prouvé que tous les termes de (2.3.66) appartiennent à l'espace de Morrey $\mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et donc, le terme (3) $\in \mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

- Les termes (4) et (6) de (2.3.65) sont très similaires. En effet, pour (4), en utilisant les propriétés de la fonction auxiliaire η et avec le Lemme 2.1.3 nous écrivons (rappelons que $\mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < 6$ et que nous avons les contrôles (2.3.58))

$$\|(\vec{\nabla}\eta) \wedge \vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.$$

  Pour (6) nous avons par les mêmes arguments :

$$\|\eta\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{R}}}\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.$$

- Pour le terme (5) de (2.3.65), nous devons étudier la quantité $\|(\vec{\nabla}\eta)\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}}$. Observons que par hypothèse nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$. Ensuite, puisque $0 < \alpha < \frac{1}{24}$, nous avons $\mathfrak{p}_0 \leq \frac{6}{5} \leq \mathfrak{q}_0 = \frac{5}{2-\alpha} < \frac{120}{47}$, et par les propriétés du support de la fonction η et la définition de la fonction η nous avons

$$\|(\vec{\nabla}\eta)\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} < +\infty.$$

Avec toutes ces estimations, nous pouvons conclure que $\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

Étudions maintenant la quantité $\vec{\mathcal{B}}_i$ définie dans (2.3.5). Étant donné que $\mathfrak{q}_1 = \frac{5}{1-\alpha} < \tau_0$ nous avons

$$\|\vec{\mathcal{B}}_i\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} = \|2(\partial_i\eta)(\vec{u}+\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u}+\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u}+\vec{\omega})\|_{L^{\tau_0}_{t,x}} < +\infty,$$

où nous avons utilisé les propriétés du support de la fonction de test η et les propriétés de localisation des espaces de Morrey données dans le Lemme 2.1.3, page 43.

Pour le terme $\mathcal{C}$ donné dans (2.3.6), nous avons $\|\mathcal{C}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p_0,\mathfrak{q}_1}} = \|\eta\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}}$. Comme $1 \leq \mathfrak{p}_0 \leq \frac{6}{5}$ et $\mathfrak{q}_1 = \frac{5}{1-\alpha} < \frac{120}{23}$ (puisque $0 < \alpha < \frac{1}{24}$), par les propriétés du support de la fonction η et par le Lemme 2.1.3 nous obtenons

$$\|\mathcal{C}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{p_0,\mathfrak{q}_1}} = \|\eta\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} < +\infty.$$

Le terme $\vec{\mathcal{D}}$ donné dans (2.3.7) peut être traité de la même manière que les termes $\vec{\mathcal{B}}_i$ ci-dessus. En effet, nous avons

$$\|\vec{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} = \|\frac{1}{2}\eta(\vec{\omega}+\vec{u})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u}+\vec{\omega})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}(\vec{u}+\vec{\omega})\|_{L^{\tau_0}_{t,x}} < +\infty.$$

Pour le tenseur $\mathbb{E}$ défini dans (2.3.8), puisque $1 \leq \mathfrak{p}_0 \leq \frac{6}{5}$ et $\mathfrak{q}_1 = \frac{5}{1-\alpha} < \frac{120}{23} < \frac{60}{11}$ nous obtenons,

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} &= \|\eta(\vec{u}\otimes\vec{u}+\vec{\omega}\otimes\vec{u})\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} \leq \|\eta\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} + \|\eta\vec{\omega}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}}\\ &\leq C\|\eta\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}} + C\|\eta\vec{\omega}\otimes\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}},\end{aligned}$$

et par les inégalités de Hölder dans les espaces de Morrey (voir le Lemme 2.1.2) avec $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et $\frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{60}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}} &\leq C\|\eta\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{2,6}}\|\eta\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}} + C\|\eta\vec{\omega}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{2,6}}\|\eta\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}}\\ &\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{L^6_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}} + C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}}\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,60}} < +\infty.\end{aligned}$$

Nous avons obtenu pour $1 < \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0 < \mathfrak{q}_1$ avec $\frac{1}{\mathfrak{q}_0} = \frac{2-\alpha}{5}$, $\frac{1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{1-\alpha}{5}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{24}$, que

$$\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}}_i, \mathcal{C}, \vec{\mathcal{D}}, \mathbb{E} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0;\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 2.3.5. ■

Fin de la démonstration du Théorème 2.3.1. En récapitulant, nous avons montré que s'il existe une constante $0 < \varepsilon \ll 1$ telle que pour $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée des équations micro-polaires sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$ au sens de la Définition 2.3.2, page 69, nous avons

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds < \varepsilon,$$

alors, en utilisant par les Propositions 2.3.1-2.3.4, on peut déduire les points suivants

1) il existe $R_1 > 0$ tel que $0 < R_1 < R$ et pour $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_1}}\vec{\nabla}\otimes\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

2) Pour $R_2 > 0$ avec $0 < R_2 < R_1 < R$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{u}, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_2}}\vec{\omega} \in L_{t,x}^{\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

3) En plus, il existe $R_3 > 0$ tel que $0 < R_3 < R_2 < R_1 < R$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_3}}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,60}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

4) Enfin, pour $R_4 > 0$ avec $0 < R_4 < R_3 < R_2 < R_1 < R$ nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{R_4}} \operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{6}{5},\frac{60}{11}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

ce qui implique par la Proposition 2.3.5 que

$$\vec{\mathcal{A}} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{B}}_i, \mathcal{C}, \vec{\mathcal{D}}, \mathbb{E} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\mathfrak{p}_0;\mathfrak{q}_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

De plus, comme

$$\vec{\mathcal{U}}(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\vec{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{3}\partial_i\vec{\mathcal{B}}_i + \vec{\nabla}\mathcal{C} + \vec{\nabla}\wedge\vec{\mathcal{D}} + \operatorname{div}\mathbb{E} + \eta\vec{f}\right)ds,$$

nous pouvons appliquer par le Lemme 2.1.5, page 44, et donc il s'ensuit que $\vec{\mathcal{U}} \in \dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{24}$. Comme $\vec{\mathcal{U}} = \vec{u} + \vec{\omega}$ sur un petit voisinage du point (t_0, x_0), nous en déduisons que $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ sont également Hölder continues ce qui termine la démonstration du Théorème 2.3.1. ■

Remarque 2.3.6. *Rappelons que la borne supérieure pour l'indice de régularité höldérienne* $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ *est essentiellement technique, et elle est liée aux estimations obtenues, qui nous permettent d'appliquer le Lemme 2.1.5. Remarquons que nous ne revendiquons aucune optimalité de cette borne.*

2.3.3. Un deuxième critère de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg

Maintenant, nous allons voir que la stratégie développée dans les pages précédentes, nous permet aussi déduire un deuxième critère de régularité pour les équations des fluides micro-polaires en considérant l'effet *dominant* de la vitesse. Pour plus de simplicité, nous considérons ici le système sans forces extérieures

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}) - \vec{\nabla}p + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}, \end{cases} \tag{2.3.67}$$

et nous allons considérer $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2, page 69 : elle vérifie l'inégalité d'énergie suivante pour tout $\psi \in \mathcal{D}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \psi(t,y) dy + 2 \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \psi dyds \leq \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \psi + \Delta \psi) |\vec{u}|^2 dyds$$
$$+ \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \psi dyds + \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\psi \vec{u}) dyds. \tag{2.3.68}$$

Ainsi, le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.3.2. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 deséquations micro-polaires* (2.3.67) *sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$. Supposons qu'il existe une constante $0 < \varepsilon \ll 1$ suffisamment petite telle que*

$$\frac{1}{R^2} \int_{t_0 - R^2}^{t_0 + R^2} \int_{B_{x_0,R}} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon. \tag{2.3.69}$$

Alors, il existe $0 < r_1 < R$ tel que $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_{r_1}(t_0, x_0))$.

Remarque 2.3.7. *Observons que nous avons remplacé l'hypothèse de petitesse du gradient de $\vec{u}$ (voir* (2.3.11)*, page 73) par un contrôle sur $\vec{u}$ et la pression p. Cependant, une des principales caractéristiques est le fait que nous avons un contrôle uniquement sur un rayon $R > 0$ fixé.*

Ce type de résultat, bien connu pour les équations de Navier-Stokes classiques (voir [13], [57], [61], [85]), est un des outils dans l'étude de la régularité pour le cas limite des critères de Serrin $L^\infty_t L^3_x$ (cf. [34]). Ainsi, ayant obtenu ce théorème ci-dessus, on pourra envisager d'étendre ce cas limite aux équations micro-polaires. En effet, ceci sera un des objectifs du chapitre suivant.

La démonstration du Théorème 2.3.2 suit les mêmes idées que lorsque nous avons supposé la condition de petitesse sur le gradient de $\vec{u}$ dans le Théorème 2.3.1. En effet, tout d'abord, nous allons déduire à partir de l'hypothèse (2.3.69) un gain d'information de type Morrey pour la vitesse $\vec{u}$, ce qui correspond à la première étape de la démonstration du Théorème 2.3.1. Puis, nous pouvons obtenir un gain de régularité Höldérienne de $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans les variables de temps et d'espace dans $\mathbf{Q}_{r_1}(t_0, x_0)$. Enfin, comme $\mathbf{Q}_{r_1}(t_0, x_0)$ est un ensemble borné, nous obtenons ainsi que $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ sont bornées.

Le premier gain d'information de type Morrey est donné dans la proposition suivante :

Proposition 2.3.6. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 du système micro-polaire* (2.3.1) *sur $\mathbf{Q}_R$. Supposons qu'il existe une constante $0 < \varepsilon \ll 1$ telle que*

$$\frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{Q}_R} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon.$$

Alors, pour $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ et $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < \frac{20}{3}$, il existe $0 < \mathfrak{r} < R$ tel que nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_\mathfrak{r}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_\mathfrak{r}} p \in \mathcal{M}^{\frac{3}{2}, \frac{\tau_0}{2}}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Remarque 2.3.8. *De façon similaire au Théorème 2.3.1, le terme $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ est liée à la régularité Höldérienne qu'on pourrait déduire des variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$.*

Preuve. Par la définition des espaces de Morrey (voir (2.1.6), page 42), nous devons montrer que pour certain $0 < \mathfrak{r} < R$, et pour tout $0 < r \leq \mathfrak{r}$ et $(t, x) \in \mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0, x_0)$, nous avons

$$\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds \leq C r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |p|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}. \tag{2.3.70}$$

Pour cela, nous considérons les quantités suivantes : pour un point $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et pour $r > 0$, nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r(t,x) &= \sup_{t-r^2<s<t+r^2} \frac{1}{r} \int_{B_{x,r}} |\vec{u}(s,y)|^2 dy, & \alpha_r(t,x) &= \frac{1}{r} \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s,y)|^2 dyds, \\ \lambda_r(t,x) &= \frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}(s,y)|^3 dyds, & \mathcal{P}_r(t,x) &= \frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |p(s,y)|^{\frac{3}{2}} dyds. \end{aligned} \tag{2.3.71}$$

De plus, pour simplifier les notations, nous introduisons les quantités suivantes :

$$\Lambda_r = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}} \lambda_r, \quad \mathbb{P}_r = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}} \mathcal{P}_r \quad \text{et} \quad \mathbb{O}_r = \Lambda_r + \kappa^6 \mathbb{P}_r, \tag{2.3.72}$$

avec $\kappa < \frac{1}{2}$ une constante. Il est donc facile de voir que (2.3.70) est équivalent à dire que pour tout $0 < r \leq \mathfrak{r}$ et pour tout $(t, x) \in \mathbf{Q}_r(t_0, x_0)$, nous avons

$$\mathbb{O}_r(t, x) \leq C. \tag{2.3.73}$$

Afin d'obtenir cette estimation, nous procéderons par un argument itératif pour lequel nous devons introduire quelques estimations techniques. Tout d'abord, rappelons la relation donnée dans le Lemme 2.3.1, page 73, où on obtient une première relation entre les quantités données dans (2.3.13) : pour tout $0 < r \leq R$, il existe une constante $C > 0$ tel que nous avons

$$\lambda_r^{\frac{1}{3}} \leq C(\mathcal{A}_r + \alpha_r)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.74}$$

La deuxième relation dont nous avons besoin est liée à l'inégalité d'énergie (2.3.68).

Lemme 2.3.6. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.6, pour tout rayon $0 < r \leq \frac{\rho}{2} \leq R$, nous avons l'inégalité*

$$\mathcal{A}_r + \alpha_r \leq C \frac{r^2}{\rho^2} \lambda_\rho^{\frac{2}{3}} + C \frac{\rho^2}{r^2} (\mathcal{P}_\rho + \lambda_\rho) + C \frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r} \lambda_\rho^{\frac{1}{3}}.$$

Preuve. De façon similaire à la preuve du Lemme 2.3.2, nous allons considérer dans l'inégalité d'énergie locale la fonction test donnée dans le Lemme 2.3.3, page 74 qui nous rappelons ci-dessous : soit ϕ la fonction

$$\phi(s, y) = r^2 \Psi\left(\frac{s-t}{\rho^2}, \frac{y-x}{\rho}\right) \theta\left(\frac{s-t}{r^2}\right) \mathfrak{g}_{(4r^2+t-s)}(x-y),$$

où $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ est une fonction positive supportée sur $\mathbf{Q}_R(0, 0)$ et qui vaut 1 sur $\mathbf{Q}_{\frac{1}{2}}(0, 0)$, θ est une fonction lisse positive telle que $\theta = 1$ sur $] - \infty, 1[$ et $\theta = 0$ sur $]2, +\infty[$ et $\mathfrak{g}_t(\cdot)$ est le noyau de la chaleur. Alors, nous avons les points suivants :

1) la fonction ϕ est une fonction non négative bornée, et son support est contenu dans la boule parabolique $\mathbf{Q}_\rho(t, x)$, et pour tout $(s, y) \in \mathbf{Q}_r(t, x)$, on a la borne inférieure $\phi \geq \frac{C}{r}$,
2) pour tout $(s, y) \in \mathbf{Q}_\rho(t, x)$, nous avons $\phi(s, y) \leq \frac{C}{r}$,

3) pour tout $(s,y)\in \mathbf{Q}_\rho(t,x)$, nous avons $|\vec{\nabla}\phi(s,y)|\leq \frac{C}{r^2}$,

4) pour tout $(s,y)\in \mathbf{Q}_\rho(t,x)$, nous avons $|(\partial_s+\Delta)\phi(s,y)|\leq C\frac{r^2}{\rho^5}$.

Ainsi,en considérant la fonction ϕ dans l'inégalité d'énergie locale, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_r+\alpha_r \quad\leq\quad & \underbrace{\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\phi+\Delta\phi)|\vec{u}|^2dyds}_{(1)}+2\underbrace{\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds}_{(2)}\\ &+\underbrace{\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds}_{(3)}+\underbrace{\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})dyds}_{(4)}. \qquad (2.3.75)\end{aligned}$$

Étudions chacun des termes de la partie de droite de l'expression ci-dessus.

- Pour le premier terme (1) dans (2.3.75), grâce à la quatrième propriété de la fonction ϕ et à l'inégalité de Hölder ($1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$), nous avons

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\phi+\Delta\phi)|\vec{u}|^2dyds\leq C\frac{r^2}{\rho^5}\int_{\mathbf{Q}_\rho}|\vec{u}|^2dyds\leq C\frac{r^2}{\rho^5}\rho^{\frac{5}{3}}\|\vec{u}\|^2_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}.$$

  De plus, par (2.3.13), nous avons $\|\vec{u}\|^2_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}=\rho^{\frac{4}{3}}\lambda_\rho^{\frac{2}{3}}$, et donc

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\phi+\Delta\phi)|\vec{u}|^2dyds\leq C\frac{r^2}{\rho^2}\lambda_\rho^{\frac{2}{3}}.$$

- Pour le terme (2) dans (2.3.75), grâce à la troisième propriété de la fonction test ϕ et à l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds\leq\frac{C}{r^2}\int_{\mathbf{Q}_\rho}|p||\vec{u}|dyds\leq\frac{C}{r^2}\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_tL^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{u}\|_{L^3_tL^3_x(\mathbf{Q}_\rho)}.$$

  Par (2.3.13), nous avons $\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_tL^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\rho)}=\rho^{\frac{4}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}$ et $\|\vec{u}\|_{L^3_tL^3_x(\mathbf{Q}_\rho)}=\rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}$, nous pouvons donc écrire grâce à l'inégalité de Young que

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds\leq\frac{C}{r^2}\left(\rho^{\frac{4}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\right)\left(\rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}\right)\leq C\frac{\rho^2}{r^2}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}\leq C\frac{\rho^2}{r^2}(\mathcal{P}_\rho+\lambda_\rho).$$

- Pour le terme (3) dans (2.3.75), grâce à la deuxième propriété de la fonction ϕ, on a

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds\quad\leq\quad\frac{C}{r^2}\int_{\mathbf{Q}_\rho}|\vec{u}|^3dyds=C\frac{\rho^2}{r^2}\lambda_\rho,$$

  où par (2.3.13) nous pouvons écrire $\|\vec{u}\|^3_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}=\rho^2\lambda_\rho$.

- Enfin, pour le terme (4) dans (2.3.75), grâce aux propriétés de la fonction ϕ et à l'inégalité de Hölder ($1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$), nous écrivons

$$\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})dyds\quad\leq\quad C\frac{\rho^{\frac{5}{6}}}{r}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\|\vec{u}\|_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\leq C\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}},$$

  où nous avons utilisé le fait que $\|\vec{u}\|_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}=\rho^{\frac{2}{3}}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}}$ et $\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)}\leq\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)}<+\infty$, puisque $\vec{\omega}\in L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$.

En regroupant toutes les estimations précédentes, nous obtenons

$$\mathcal{A}_r + \alpha_r \leq C\frac{r^2}{\rho^2}\lambda_\rho^{\frac{2}{3}} + C\frac{\rho^2}{r^2}\left(\mathcal{P}_\rho + \lambda_\rho\right) + C\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{r}\lambda_\rho^{\frac{1}{3}},$$

et ceci termine la preuve du Lemme 2.3.6. ■

Maintenant, nous devons étudier plus en détail la pression p, qui n'apparaît que dans la première équation du système micro-polaire (2.3.67).

Lemme 2.3.7. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.6, pour tout* $0 < r \leq \frac{\rho}{2} \leq R$*, nous avons l'inégalité suivante*

$$\mathcal{P}_r^{\frac{2}{3}} \leq C\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{4}{3}}\lambda_\rho^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}\right). \tag{2.3.76}$$

Preuve. Tout dabord, nous allons obtenir lestimation suivante

$$\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\left(\|\vec{u}\|_{L_t^3L_x^3(\mathbf{Q}_1)} + \sigma^2\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_1)}\right), \tag{2.3.77}$$

où $\mathbf{Q}_\sigma$ et $\mathbf{Q}_1$ sont des boules paraboliques de rayon σ et 1 respectivement. Plus tard, nous dériverons (2.3.76) par un changement de variable.

Afin d'obtenir (2.3.77), nous introduisons $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction lisse supportée dans la boule $B_{0,1}$ telle que $\eta \equiv 1$ sur la boule $B_{0,\frac{3}{5}}$ et $\eta \equiv 0$ en dehors de la boule $B_{0,\frac{4}{5}}$. Fixons $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ et remarquons que $p = \eta p$ dans $B_{0,\sigma}$. Maintenant, en utilisant l'identité

$$-\Delta(\eta p) = -\eta\Delta p + (\Delta\eta)p - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i((\partial_i\eta)p),$$

nous déduisons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\|p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} = \|\eta p\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)} \quad &\leq \quad \underbrace{\left\|\frac{(-\eta\Delta p)}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_1)} + \underbrace{\left\|\frac{(\Delta\eta)p}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_2)} \\ &+2\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\left\|\frac{\partial_i((\partial_i\eta)p)}{(-\Delta)}\right\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(\mathbf{Q}_\sigma)}}_{(p_3)}.\end{aligned} \tag{2.3.78}$$

Pour le premier terme de (2.3.78), puisque nous avons l'équation $\Delta p = -\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j(u_iu_j)$, nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
(p_1) \quad &= \quad \left\| \frac{\big(-\eta\Delta p\big)}{(-\Delta)} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\Big(\eta \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i\partial_j u_i u_j\Big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \\
&\leq \quad C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \big(\partial_i\partial_j(\eta u_i u_j) - \partial_i\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big) - \partial_j\big((\partial_i\eta)u_i u_j\big) + (\partial_i\partial_j\eta)u_i u_j\big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \\
&\leq \quad C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\partial_i\partial_j(\eta u_i u_j) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} + C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\partial_i\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \\
&\quad\; + C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\partial_j\big((\partial_i\eta)u_i u_j\big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} + C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{1}{(-\Delta)}(\partial_i\partial_j\eta)u_i u_j \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)}. \qquad (2.3.79)
\end{aligned}
$$

Étudions chaque terme de l'expression ci-dessus. En désignant par $\mathcal{R}_i = \frac{\partial_i}{\sqrt{-\Delta}}$ les transformées de Riesz habituelles sur $\mathbb{R}^3$, comme ces opérateurs sont bornés dans $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et en utilisant les propriétés de support de la fonction auxiliaire η, nous avons pour le premier terme ci-dessus :

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\eta u_i u_j(t,\cdot) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,\sigma})} &\leq \|\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j(\eta u_i u_j)(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\eta u_i u_j(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,1})}.
\end{aligned}
$$

En prenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans la variable temporelle dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$
\left\| \frac{\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\eta u_i u_j \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^3(\mathbf{Q}_1)}. \qquad (2.3.80)
$$

Les termes restants de (2.3.79) peuvent tous être étudiés de manière similaire. En effet, notant que $\partial_i\eta$ s'annule sur $B_{0,\frac{3}{5}} \cup B^c_{0,\frac{4}{5}}$ en utilisant la représentation intégrale de l'opérateur $\frac{\partial_i}{(-\Delta)}$, nous avons pour le deuxième terme de (2.3.79) l'estimation

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big)(t,\cdot) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,\sigma})} &\leq C\sigma^2 \left\| \frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big)(t,\cdot) \right\|_{L^\infty(B_{0,\sigma})} \\
&\leq C\,\sigma^2 \left\| \int_{\{\frac{3}{5}<|y|<\frac{4}{5}\}} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big)(t,y)\,dy \right\|_{L^\infty(B_{0,\sigma})}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, puisque $x \in B_{0,\sigma}$ et $\sigma \leq \frac{1}{2}$, pour tout $\frac{3}{5} < |y| < \frac{4}{5}$, nous avons $\frac{1}{10} < |x-y|$ et comme $\mathrm{supp}(\eta_j) \subset B_{0,1}$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big)(t,\cdot) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,\sigma})} &\leq C\|u_i u_j(t,\cdot)\|_{L^1(B_{0,1})} \qquad (2.3.81) \\
&\leq C\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,1})}.
\end{aligned}
$$

En prenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans la variable temporelle dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$
\left\| \frac{\partial_i}{(-\Delta)}\big((\partial_j\eta)u_i u_j\big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)}. \qquad (2.3.82)
$$

Un argument symétrique donne

$$\left\| \frac{\partial_j}{(-\Delta)}\big((\partial_i \eta) u_i u_j\big) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C \|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.83}$$

Puisque le noyau de convolution associé à l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ est $\frac{C}{|x|}$, en suivant les mêmes idées que dans (2.3.81), nous obtenons pour le dernier terme de (2.3.79) que

$$\left\| \frac{(\partial_i \partial_j \eta) u_i u_j}{(-\Delta)} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C \|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)}. \tag{2.3.84}$$

En injectant les estimations (2.3.80), (2.3.82), (2.3.83) et (2.3.84) dans (2.3.79), nous obtenons

$$(p_1) = \left\| \frac{(-\eta \Delta p)}{(-\Delta)} \right\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C \|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)}.$$

Comme les termes (p_2) et (p_3) peuvent être traites de la même façon que le Lemme 2.3.4 page 77, et donc nous obtenons l'inégalité

$$\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\sigma)} \leq C \left(\|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)} + \sigma^2 \|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_1)} \right).$$

Maintenant, avec cette estimation en main, on en déduit l'inégalité (2.3.76). En effet, si nous fixons $\sigma = \frac{r}{\rho} \leq \frac{1}{2}$ et en introduisant les fonctions $p_\rho(t,x) = p(\rho^2 t, \rho x)$ et $\vec{u}_\rho(t,x) = \vec{u}(\rho^2 t, \rho x)$, alors par l'estimation précédente, nous avons

$$\|p_\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_{\frac{r}{\rho}})} \leq C \left(\|\vec{u}_\rho\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_1)} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \|p_\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_1)} \right).$$

Ainsi, par un changement de variable adéquat, nous obtenons

$$\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_r)} \rho^{-\frac{10}{3}} \leq C \left(\rho^{-\frac{10}{3}} \|\vec{u}\|^2_{L^3_{t,x}(\mathbf{Q}_\rho)} + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \rho^{-\frac{10}{3}} \|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_\rho)} \right).$$

De plus, par (2.3.71), nous avons les identités $r^{\frac{4}{3}} \mathcal{P}_r^{\frac{2}{3}} = \|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(\mathbf{Q}_r)}$ et $\rho^{\frac{4}{3}} \lambda_\rho^{\frac{2}{3}} = \|\vec{u}\|^2_{L^3_t L^3_x(\mathbf{Q}_\rho)}$, et donc nous obtenons $\mathcal{P}_r^{\frac{2}{3}} \leq C \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{4}{3}} \lambda_\rho^{\frac{2}{3}} + C \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{2}{3}} \mathcal{P}_\rho^{\frac{2}{3}}$ et cela conclut la preuve du lemme. ■

Fin de la preuve de la Proposition 2.3.6. Maintenant, pour déduire (2.3.73), nous remarquons qu'il est équivalent de dire qu'il existe $0 < \mathfrak{r} < R$ et $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_{\kappa^n \mathfrak{r}}(t_0, x_0)$, nous avons

$$\mathbb{O}_{\kappa^n \mathfrak{r}}(t,x) = \Lambda_{\kappa^n \mathfrak{r}}(t,x) + \kappa^6 \mathbb{P}_{\kappa^n \mathfrak{r}}(t,x) \leq C, \tag{2.3.85}$$

où

$$\Lambda_r(t,x) = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}} \lambda_r(t,x) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_r(t,x) = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}} \mathcal{P}_r(t,x). \tag{2.3.86}$$

Ainsi, pour déduire (2.3.85), nous allons appliquer un argument itératif et pour ce faire, nous devons estimer Λ_r et $\mathbb{P}_r$ en termes de Λ_ρ et $\mathbb{P}_\rho$ pour tout rayon $0 < r < \frac{\rho}{2} \leq R$. Ainsi, par l'estimation (2.3.74) et le Lemme 2.3.6, nous avons

$$\begin{aligned}\Lambda_r = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\lambda_r &\leq \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}(\mathcal{A}_r+\alpha_r)^{\frac{3}{2}}\\ &\leq \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{r^3}{\rho^3}\lambda_\rho + \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{\rho^3}{r^3}\left(\mathcal{P}_\rho+\lambda_\rho\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}}\lambda_\rho^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.3.87}$$

Étudions plus en détail chaque terme du côté droite ci-dessus.

- Pour le premier terme de (2.3.87), puisque $\lambda_\rho = \rho^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}\Lambda_\rho$ par (2.3.86), nous avons

$$\frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{r^3}{\rho^3}\lambda_\rho = C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho.$$

- Pour le deuxième terme de (2.3.87), par la définition de $\mathbb{P}_\rho$ et Λ_ρ donnée dans (2.3.86), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{\rho^3}{r^3}\left(\mathcal{P}_\rho+\lambda_\rho\right)^{\frac{3}{2}} &= C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{6-\frac{15}{\tau_0}}\rho^{-3+\frac{15}{\tau_0}}\rho^{\frac{9}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}\left(\mathbb{P}_\rho+\Lambda_\rho\right)^{\frac{3}{2}}\\ &= C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{6-\frac{15}{\tau_0}}\rho^{\frac{3}{2}-\frac{15}{2\tau_0}}\left(\mathbb{P}_\rho+\Lambda_\rho\right)^{\frac{3}{2}}\\ &\leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{6-\frac{15}{\tau_0}}\left(\mathbb{P}_\rho^{\frac{3}{2}}+\Lambda_\rho^{\frac{3}{2}}\right),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\rho^{\frac{3}{2}-\frac{15}{2\tau_0}} < 1$ puisque $\frac{3}{2}-\frac{15}{2\tau_0} > 0$ en raison de $\tau_0 > 5$.

- Enfin, pour le dernier terme de (2.3.87), par (2.3.86), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}}\lambda_\rho^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\rho^{\frac{3}{2}(1-\frac{5}{\tau_0})}\left(\frac{\rho^{\frac{9}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\Lambda_\rho^{\frac{1}{2}}\\ &= \rho^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{9}{2}-\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant toutes les estimations précédentes, nous avons

$$\Lambda_r \leq C\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho + \left(\frac{\rho}{r}\right)^{6-\frac{15}{\tau_0}}\left(\mathbb{P}_\rho^{\frac{3}{2}}+\Lambda_\rho^{\frac{3}{2}}\right) + \rho^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{9}{2}-\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho^{\frac{1}{2}}\right). \tag{2.3.88}$$

Étudions maintenant le terme de pression dans (2.3.86). À partir de l'estimation (2.3.76), nous pouvons écrire pour tout $0 < r \leq \frac{\rho}{2}$

$$\mathbb{P}_r = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\mathcal{P}_r \leq \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\lambda_\rho + \frac{C}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{r}{\rho}\mathcal{P}_\rho.$$

Pour le premier terme du côté de droite ci-dessus, puisque $\lambda_\rho = \rho^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}\Lambda_\rho$ par (2.3.86), nous avons

$$\frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\lambda_\rho = \frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\rho^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}\Lambda_\rho = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{5-\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho.$$

De plus, en utilisant le fait que $\frac{1}{r^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}}\frac{r}{\rho}\mathcal{P}_\rho = \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2-\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{P}_\rho$ par (2.3.86), on a

$$\mathbb{P}_r \leq C\bigg(\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{5-\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{2-\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{P}_\rho\bigg). \tag{2.3.89}$$

Ainsi, nous avons estimé Λ_r et $\mathbb{P}_r$ en termes de Λ_ρ et $\mathbb{P}_\rho$.

Étudions maintenant l'expression $\mathbb{O}_r$ donnée dans (2.3.85). Ainsi, remarquons que pour tout $0 < r \leq \frac{\rho}{2}$, si nous fixons $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ tel que $\kappa = \frac{r}{\rho}$, alors d'après les estimations (2.3.88) et (2.3.89), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_r = \Lambda_r + \kappa^6\mathbb{P}_r \quad &\leq \quad C\left(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho + \kappa^{-6+\frac{15}{\tau_0}}\left(\mathbb{P}_\rho^{\frac{3}{2}} + \Lambda_\rho^{\frac{3}{2}}\right) + \rho^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\kappa^{3(-\frac{3}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\Lambda_\rho^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\quad +C\kappa^6\left(\kappa^{-5+\frac{15}{\tau_0}}\Lambda_\rho + \kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{P}_\rho\right).\end{aligned}$$

De plus, par la définition de $\mathbb{O}_\rho$ donnée dans (2.3.72), nous avons $\Lambda_\rho \leq \mathbb{O}_\rho$ et $\mathbb{P}_\rho \leq \kappa^{-6}\mathbb{O}_\rho$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_r \quad &\leq \quad C\kappa^{\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-6+\frac{15}{\tau_0}}\left(\kappa^{-9}\mathbb{O}_\rho^{\frac{3}{2}} + \mathbb{O}_\rho^{\frac{3}{2}}\right) + C\rho^{\frac{3}{2}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\kappa^{3(-\frac{3}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\mathbb{O}_\rho^{\frac{1}{2}}\\ &\quad +C\kappa^{1+\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ($1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_r \quad &\leq \quad C\kappa^{\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-6+\frac{15}{\tau_0}}\left(\kappa^{-9}\mathbb{O}_\rho^{\frac{3}{2}} + \mathbb{O}_\rho^{\frac{3}{2}}\right) + \rho^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} + C\kappa^{9(-\frac{3}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\mathbb{O}_\rho^{\frac{3}{2}}\\ &\quad +C\kappa^{1+\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_\rho.\end{aligned}$$

En réarrangeant l'expression précédente de manière plus pratique, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_r \quad &\leq \quad C\left(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{1+\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}\right)\mathbb{O}_\rho + C\left(\kappa^{-15+\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{-6+\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{9(-\frac{3}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\right)\mathbb{O}_\rho^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_\rho\\ &\quad +\rho^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}\\ &\leq \quad C\left(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{1+\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}\right)\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_\rho^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_\rho + \rho^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}.\end{aligned}$$

De plus, puisque $-2 + \frac{15}{\tau_0} > 0$, nous prenons $0 < \kappa \ll 1$ suffisamment petit tel que

$$C(\kappa^{\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{1+\frac{15}{\tau_0}} + \kappa^{-2+\frac{15}{\tau_0}}) \leq \frac{1}{4}, \tag{2.3.90}$$

et donc il s'ensuit que

$$\mathbb{O}_r \quad \leq \quad \frac{1}{4}\mathbb{O}_\rho + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_\rho^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_\rho + \rho^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}. \tag{2.3.91}$$

Maintenant, en utilisant l'estimation ci-dessus, nous pouvons déduire (2.3.85), c'est-à-dire, nous allons prouver que pour $0 < \kappa \ll 1$ donné par la condition (2.3.90), il existe $0 < \mathfrak{r} < R$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(t, x) \in \mathbf{Q}_{\kappa^n\mathfrak{r}}(t_0, x_0)$, nous avons

$$\mathbb{O}_{\kappa^n\mathfrak{r}}(t, x) = \Lambda_{\kappa^n\mathfrak{r}}(t, x) + \kappa^6\mathbb{P}_{\kappa^n\mathfrak{r}}(t, x) \leq C.$$

En effet, définissons $\rho = r_0 = \mathfrak{r}$ et $r = r_1 = \kappa\mathfrak{r}$ avec $\mathfrak{r} = \kappa^{\mathfrak{N}} R$ où $0 < \kappa \ll 1$ est donné par la condition (2.3.90), et $\mathfrak{N} \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathfrak{N} > 240$. Ainsi, puisque $r_1 \leq \dfrac{r_0}{2}$, nous pouvons réécrire (2.3.91) comme suit

$$\mathbb{O}_{r_1}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_0} + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_0}^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_0} + r_0^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}.$$

Puisque $r_0 = \kappa^{\mathfrak{N}} R$, $R < 1$ et $-\frac{1}{2} + \frac{5}{\tau_0} > 0$, nous avons

$$\mathbb{O}_{r_1}(t_0, x_0) \leq \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_0} + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_0}^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_0} + \kappa^{\frac{9\mathfrak{N}}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}. \tag{2.3.92}$$

Pour fermer l'argument itératif, nous devons étudier chaque terme du côté de droite ci-dessus. Tout d'abord, remarquons que puisque $0 < \kappa \ll 1$, l'expression $C\kappa^{-15}$ peut être grande, cependant puisque $\kappa > 0$ est un paramètre fixe, nous pouvons considérer un paramètre $0 < \varepsilon_* \ll 1$ suffisamment petit tel que nous avons

$$C\kappa^{-15}\varepsilon_*^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}. \tag{2.3.93}$$

D'autre part, par (2.3.13), (2.3.72) et puisque $\mathbf{Q}_{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)}(t_0, x_0) \subset \mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}_{r_0}(t_0, x_0) &= \frac{1}{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)^{3(1-\frac{5}{\tau_0})}} \left(\frac{1}{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)^2} \int_{\mathbf{Q}_{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)}(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 dyds + \frac{\kappa^6}{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)^2} \int_{\mathbf{Q}_{(\kappa^{\mathfrak{N}} R)}(t_0,x_0)} |p|^{\frac{3}{2}} dyds \right) \\
&= \frac{R^{\frac{15}{\tau_0}}}{\kappa^{5\mathfrak{N}}} \frac{1}{R^3} \left(\frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 dyds + \frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)} |p|^{\frac{3}{2}} dyds \right) \\
&\leq \frac{1}{\kappa^{5\mathfrak{N}}} \frac{1}{R^3} \left(\frac{1}{R^2} \int_{\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds \right).
\end{aligned}$$

Maintenant, rappelons que par l'hypothèse (2.3.69), il existe $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que $\dfrac{1}{R^2} \displaystyle\int_{\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon$ et donc en fixant ε de telle sorte que $0 < \varepsilon \leq \kappa^{5\mathfrak{N}} R^3 \varepsilon_*$ (où ε_* était donné par la condition (2.3.93)), on a

$$\mathbb{O}_{r_0}(t_0, x_0) \leq \varepsilon_*. \tag{2.3.94}$$

Ensuite, par (2.3.93) et l'expression ci-dessus, on en déduit que

$$C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_0}^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_0} \leq C\kappa^{-15}\varepsilon_*^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_0} \leq \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_0}. \tag{2.3.95}$$

Maintenant, étudions le dernier terme du côté de droite de (2.3.92), remarquons que par (2.3.93), nous pouvons écrire $\kappa = C\varepsilon_*^{\frac{1}{30}}$ et donc nous avons

$$\kappa^{\frac{9\mathfrak{N}}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} = C\varepsilon_*^{\frac{9\mathfrak{N}}{120}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}.$$

Ainsi, puisque $\mathfrak{N} > 240$, rappelons que $-\frac{1}{2} + \frac{5}{\tau_0} > 0$ et $\frac{1}{\tau_0} \geq \frac{2}{15}$, nous avons $\frac{9\mathfrak{N}}{120}(-\frac{1}{2} + \frac{5}{\tau_0}) > 3$, et donc nous pouvons choisir $\varepsilon_* \ll 1$ tel que

$$\kappa^{\frac{9\mathfrak{N}}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} = C\varepsilon_*^{\frac{9\mathfrak{N}}{120}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} \leq \frac{\varepsilon_*}{2}. \tag{2.3.96}$$

Ainsi, en utilisant (2.3.95) et (2.3.96) dans (2.3.92), nous obtenons

$$\mathbb{O}_{r_1}(t_0,x_0) \leq \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_0} + \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_0} + \frac{\varepsilon_*}{2}.$$

De plus, par (2.3.94), on obtient

$$\mathbb{O}_{r_1}(t_0,x_0) \leq \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{2} = \varepsilon_*. \tag{2.3.97}$$

Maintenant, étudions le cas $r_2 = \kappa^2\mathfrak{r} = \kappa^{\mathfrak{N}+2}R$. Puisque $r_2 \leq \frac{\kappa^{\mathfrak{N}}R}{2} = \frac{r_1}{2}$, nous pouvons appliquer l'estimation (2.3.91) et donc nous avons

$$\mathbb{O}_{r_2}(t_0,x_0) \quad \leq \quad \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_1} + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_1}^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_1} + r_1^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}.$$

Observons que puisque $\mathbb{O}_{r_1}(t_0,x_0) \leq \varepsilon_*$ par (2.3.93), nous avons $C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_1}^{\frac{1}{2}} \leq C\kappa^{-15}(\varepsilon_*)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}$. De plus, puisque $r_1 = \kappa^{\mathfrak{N}+1}R \leq \kappa^{\mathfrak{N}}$ (rappelons que $R < 1$) par (2.3.96), nous avons $r_1^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, on a

$$\mathbb{O}_{r_2}(t_0,x_0) \quad \leq \quad \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_1} + \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_1} + \frac{\varepsilon_*}{2}.$$

Encore une fois, puisque $\mathbb{O}_{r_1}(t_0,x_0) \leq \varepsilon_*$ par (2.3.97), nous avons

$$\mathbb{O}_{r_2}(t_0,x_0) \leq \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{2} = \varepsilon_*.$$

Enfin, considérons le cas où $r_n = \kappa^n\mathfrak{r} = \kappa^{\mathfrak{N}+n}R$ et supposons que $\mathbb{O}_{r_n} \leq \varepsilon_*$. Ainsi, puisque $r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2}$, en utilisant (2.3.91), nous avons

$$\mathbb{O}_{r_{n+1}}(t_0,x_0) \leq \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_n} + C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_n}^{\frac{1}{2}}\mathbb{O}_{r_n} + r_n^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})}.$$

Comme mentionné précédemment, à partir de (2.3.93), nous avons $C\kappa^{-15}\mathbb{O}_{r_n}^{\frac{1}{2}} \leq C\kappa^{-15}(\varepsilon_*)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}$ et puisque $r_n = \kappa^{\mathfrak{N}+n}R \leq \kappa^{\mathfrak{N}}$ (rappelons que $R < 1$) par (2.3.96), nous avons $r_n^{\frac{9}{4}(-\frac{1}{2}+\frac{5}{\tau_0})} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, nous avons

$$\mathbb{O}_{r_{n+1}}(t_0,x_0) \quad \leq \quad \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_n} + \frac{1}{4}\mathbb{O}_{r_n} + \frac{\varepsilon_*}{2} \leq \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{4} + \frac{\varepsilon_*}{2} = \varepsilon_*.$$

Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{O}_{r_n}(t_0,x_0) \leq \varepsilon_*,$$

ce qui correspond au contrôle souhaité (2.3.85), mais centré en (t_0,x_0). Pour traiter le cas général $(t,x) \in \mathbf{Q}_{r_n}(t_0,x_0)$, remarquez que puisque $\mathbf{Q}_{r_n}(t,x) \subset \mathbf{Q}_{2r_n}(t_0,x_0)$, nous avons

$$\mathbb{O}_{r_n}(t,x) \leq 2^{3-\frac{15}{\tau_0}}\mathbb{O}_{2r_n}(t_0,x_0) < C.$$

Nous avons alors prouvé que pour $0 < \kappa \ll 1$, il existe $0 < \mathfrak{r} < R$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathbb{O}_{\kappa^n\mathfrak{r}}(t,x) < C$. Comme mentionné précédemment dans (2.3.73), cela implique que pour tout $0 < r \leq \mathfrak{r}$ et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_r(t_0,x_0)$, nous avons

$$\Lambda_r(t,x) + \kappa^6\mathbb{P}_r(t,x) = \mathbb{O}_r(t,x) \leq C. \tag{2.3.98}$$

Par (2.3.13), (2.3.72) et l'estimation précédente, pour tout $0 < r \leq \mathfrak{r}$ et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_r(t_0,x_0)$, nous avons

$$\frac{1}{r^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}} \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds = \Lambda_r(t,x) \leq C,$$

ce qui implique

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0,x_0)} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

De plus, comme $\displaystyle\frac{1}{r^{5(1-\frac{5}{\tau_0})}} \int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |p(s,y)|^{\frac{3}{2}} dyds = \mathcal{P}_r(t,x)$, et par (2.3.98) (rappelons que κ est un paramètre fixé), nous concluons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0,x_0)} p \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).$$

et donc la preuve de la Proposition 2.3.6 est terminée. ■

Corollaire 2.3.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.3.6, nous avons le contrôle local suivant :*

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\frac{\mathfrak{r}}{2}}(t_0,x_0)} \vec{\nabla}\otimes\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}.$$

Preuve. Soit $0 < \mathfrak{r} < R$ le rayon donné dans la Proposition 2.3.6. En utilisant la définition des espaces de Morrey donnée dans (2.1.6), nous devons montrer que pour tout $0 < r \leq \dfrac{\mathfrak{r}}{2}$ et pour tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_r(t_0,x_0)$, nous avons

$$\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds \leq C r^{5(1-\frac{2}{\tau_1})}, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{5}.$$

Pour cela, en utilisant la définition de la quantité λ_r donnée dans (2.3.13) et le Lemme 2.3.6, nous avons pour tout $0 < r \leq \dfrac{\mathfrak{r}}{2}$ et tout $(t,x) \in \mathbf{Q}_r(t_0,x_0)$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds &\leq \mathcal{A}_r(t,x) + \alpha_r(t,x)\\ &\leq C\Big(\lambda_{2r}^{\frac{2}{3}}(t,x) + \mathcal{P}_{2r}(t,x) + \lambda_{2r}(t,x) + (2r)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2r}^{\frac{1}{3}}(t,x)\Big). \qquad (2.3.99)\end{aligned}$$

Étudions de manière plus détaillée les termes λ_{2r} et $\mathcal{P}_{2r}$ ci-dessus. Pour le premier, puisque $\lambda_r = \dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_{\mathbf{Q}_r} |\vec{u}|^3 dyds$, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_{2r}(t,x) = \frac{1}{(2r)^2}\int_{\mathbf{Q}_{2r}(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds &= \frac{1}{(2r)^2}\frac{(2r)^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}}{(2r)^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}}\int_{\mathbf{Q}_{2r}(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds\\ &= \frac{(2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})}}{(2r)^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}}\int_{\mathbf{Q}_{2r}(t,x)} |\vec{u}|^3 dyds.\end{aligned}$$

Puisque $2r \leq \mathfrak{r}$ et $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0,x_0)} \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, nous obtenons

$$\lambda_{2r}(t,x) \leq (2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}}\vec{u}\|^3_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}} \leq C(2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})}. \qquad (2.3.100)$$

Obtenons une estimation similaire pour le terme $\mathcal{P}_{2r}$, en effet, d'après (2.3.13) et puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}} p \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{2r}(t,x) &= \frac{1}{2r^2}\int_{\mathbf{Q}_{2r}(t,x)} |p|^{\frac{3}{2}} dyds = \frac{1}{(2r)^2}\frac{(2r)^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}}{(2r)^{5(1-\frac{3}{\tau_0})}}\int_{\mathbf{Q}_{2r}} |p|^{\frac{3}{2}} dyds\\ &\leq (2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}} p\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{M}_{t,x}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}} \leq C(2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})}. \end{aligned} \tag{2.3.101}$$

Ainsi, en utilisant les estimations (2.3.100) et (2.3.101) dans (2.3.99), on obtient

$$\frac{1}{r}\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds \leq C\Big((2r)^{\frac{2}{3}(3-\frac{15}{\tau_0})} + (2r)^{(3-\frac{15}{\tau_0})} + (2r)^{\frac{1}{2}}(2r)^{\frac{1}{3}(3-\frac{15}{\tau_0})}\Big) \leq C\Big(r^{(2-\frac{10}{\tau_0})} + r^{(3-\frac{15}{\tau_0})} + r^{(\frac{3}{2}-\frac{5}{\tau_0})}\Big).$$

Comme $\frac{2}{15} \leq \frac{1}{\tau_0} < \frac{1}{5}$, nous avons $0 < 2 - \frac{10}{\tau_0} \leq 3 - \frac{15}{\tau_0} \leq \frac{3}{2} - \frac{5}{\tau_0}$, et puisque $0 < r < 1$ on obtient

$$\frac{1}{r}\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds \leq C r^{(2-\frac{10}{\tau_0})}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{5}$, il s'ensuit que pour tout $0 < r \leq \frac{\mathfrak{r}}{2}$ et $(t,x) \in \mathbf{Q}_r(t_0,x_0)$, nous avons

$$\int_{\mathbf{Q}_r(t,x)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds \leq C r^{(5-\frac{10}{\tau_1})} = C r^{5(1-\frac{2}{\tau_1})},$$

ce qui implique que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\frac{\mathfrak{r}}{2}}(t_0,x_0)} \vec{\nabla}\otimes\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et cela termine la preuve du Corollaire 2.3.2. .■

Démonstration du Théorème 2.3.2. Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée au sens de la Définition 2.3.2 des équations micro-polaires (2.3.67) dans $\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$. Rappelons que on cherche à montrer qu'il existe un certain $0 < r < R$ tel que $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_r(t_0,x_0))$.

D'abord, remarquons que puisque par hypothèse nous avons

$$\frac{1}{R^2}\int_{t_0-R^2}^{t_0+R^2}\int_{B_{x_0,R}} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon,$$

pour un certain $0 < \varepsilon \ll 1$, nous pouvons appliquer la Proposition 2.3.6 et le Corollaire 2.3.2 et donc il existe $0 < \mathfrak{r} < R$ tel que pour $5 < \tau_0 < \frac{20}{3}$ et $\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{5}$, nous avons

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\mathfrak{r}}(t_0,x_0)} p \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{3}{2},\frac{\tau_0}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\\ &\text{et} \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{\frac{\mathfrak{r}}{2}}(t_0,x_0)}\vec{\nabla}\otimes\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{2,\tau_1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3).\end{aligned} \tag{2.3.102}$$

Observons que la borne supérieure pour τ_0 vient du fait que nous avons le terme $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}$ dans l'équation (2.3.67).

Maintenant, si nous supposons $\tau_0 = 6$, en utilisant le Théorème 2.2.1, il s'ensuit que pour $0 < r_1 < \mathfrak{r}$, nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}(t_0,x_0)}\vec{u} \in L^6_t L^6_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_1}(t_0,x_0)}\vec{\omega} \in L^6_t L^6_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.3.103}$$

Ensuite, par (2.3.102) et (2.3.103), nous pouvons appliquer la Proposition 2.3.3 et ainsi nous avons un gain de l'information de type Morrey de la vitesse $\vec{u}$ *i.e.,* pour tout $0 < r_2 < r_1 < R$, nous avons que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,60}_{t,x}$.

Dès ce point, nous pouvons reprendre la même stratégie donnée dans l'étape E, page 100 et donc pour un certain $0 < r < r_2 < r_1 < R$, nous pouvons déduire que $(\vec{u}, \vec{\omega})$ sont Hölder continues dans la variable de temps et d'espace dans $\mathbf{Q}_r(t_0, x_0)$. Puisque $\mathbf{Q}_r(t_0, x_0)$ est un ensemble borné, nous avons aussi que les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ sont bornées, ce qui complète la preuve du Théorème 2.3.2. ■

En récapitulant, dans cette section, nous avons montré qu'à partir d'une certaine condition de petitesse imposée sur $\vec{u}$ (voir (2.3.11) et (2.3.69)), nous sommes en mesure d'en déduire la régularité Höldérienne d'une solution partiellement adaptée des équations micropolaires, en appliquant une étude différenciée de chaque variable. De plus, observons qu'étant donné que l'information que nous avons obtenue est locale, c'est-à-dire, les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ deviennent Hölder continue sur un ensemble borné, nous obtenons directement que la solution est bornée. Ainsi, dans la prochaine section, nous verrons comment, si les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ sont bornées, elles sont en fait régulières. En fait, il suffit que seule la vitesse $\vec{u}$ soit bornée.

2.4. Le critère de Serrin pour les équations des fluides micro-polaires

Nous allons finir ce chapitre, en présentant un *critère de régularité de Serrin partiel* pour les équations des fluides micro-polaires. Plus précisément, nous allons déduire la régularité des variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ par rapport à la variable spatiale en considérant seulement que la vitesse $\vec{u}$ est bornée.

Rappelons que les équations micro-polaires sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, & (2.4.1) \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}, & (2.4.2) \end{cases}$$

et nous nous intéressons au comportement local d'une solution faible $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans un voisinage de $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.

Le résultat principal de cette section s'écrit comme suit

Théorème 2.4.1. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible des équations des fluides micro-polaires* (2.4.1) *et* (2.4.2) *sur la boule parabolique* $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0) =]t_0 - R^2, t_0 + R^2[\times B_{x_0,R}$ *telle que*

$$\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R) \quad \text{et} \quad p \in \mathcal{D}'_{t,x}(\mathbf{Q}_R).$$

Si $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$, *alors pour tout* $0 < r < R$, *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t \dot{H}^{k+1}_x(\mathbf{Q}_r) \cap L^2_t \dot{H}^{k+2}_x(\mathbf{Q}_r).$$

Avant de passer à la démonstration, nous considérons pertinent de mentionner quelques remarques importantes qui découlent de ce résultat.

- Observons qu'à la différence de la section précédente, nous ne pouvons pas déduire d'information sur la régularité par rapport à la variable temporelle, ce qui est dû au fait que la pression est un objet très général.

- Nous pouvons obtenir un gain d'information pour les deux variables, en reflétant ainsi l'effet de domination de la vitesse $\vec{u}$, au sens de la Définition 2.1.1.
- Nous n'avons pas pris en compte de forces extérieures, cependant la preuve peut être adaptée dans ce cas, à condition que les forces soient assez régulières.

2.4.1. Démonstration du Théorème 2.4.1

La stratégie pour démontrer le Théorème 2.4.1 consiste en une étude séparée de chaque variable. Tout d'abord, en utilisant le critère de Serrin pour les équations de Navier-Stokes, nous pouvons obtenir un premier gain de régularité pour $\vec{u}$. Cependant, cela dépendra de l'information que l'on a sur $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$, ce qui nous amène à étudier la régularité de $\vec{\omega}$. Pour cela, nous allons obtenir un contrôle sur sa divergence pour déduire que cette variable $\vec{\omega}$ est également bornée. Ensuite, en utilisant les propriétés régularisantes du noyau de la chaleur, nous pouvons obtenir un gain pour $\vec{\omega}$, ce qui implique également un gain pour $\vec{u}$. Cette stratégie est résumée dans les étapes suivantes.

A) Un premier gain de régularité pour $\vec{u}$.

B) Un premier gain d'intégrabilité pour $\vec{\omega}$.

C) Un gain d'intégrabilité pour $\text{div}(\vec{\omega})$.

D) La variable $\vec{\omega}$ est bornée.

E) Étude de la régularité de $\vec{\omega}$.

A) Un premier gain de régularité pour $\vec{u}$

Tout d'abord, observons que cette variable satisfait l'équation (2.4.1), c'est-à-dire que nous avons

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}.$$

Remarquons que le système ci-dessus peut être considéré comme le système de Navier-Stokes avec une force extérieure $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$, qui appartient à $L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_R(t_0, x_0))$ (rappelons que par hypothèse, nous avons $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)))$. Ainsi, comme la vitesse $\vec{u}$ est bornée sur $\mathbf{Q}_R(t_0, x_0)$ par hypothèse, nous pouvons appliquer le critère de Serrin des équations de Navier-Stokes (voir par exemple [61, Théorème 13.1, page 397]), et donc pour certain $0 < r_1 < R$, nous avons

$$\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_1}) \cap L^2(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_1})).$$

Il convient de noter que nous avons obtenu un gain de régularité dans la variable d'espace pour la vitesse $\vec{u}$, cependant, nous ne pouvons pas obtenir des meilleures estimations puisque la régularité de $\vec{u}$ est liée à la force externe représentée ici par le terme $\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ et donc nous devons améliorer la régularité de $\vec{\omega}$.

B) Un premier gain d'intégrabilité pour $\vec{\omega}$

Observons que comme la vitesse $\vec{u}$ est bornée sur l'ensemble $\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$ par hypothèse, en particulier nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,6}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et en utilisant le Théorème 2.2.1, on peut conclure qu'il existe $r'>0$ avec $0<r'<r_1<R$ tel que

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{u} \in L_t^6L_x^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{\omega} \in L_t^6L_x^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3). \tag{2.4.3}$$

Maintenant, avec cette information supplémentaire sur la variable $\vec{\omega}$, nous pouvons étudier l'intégrabilité locale de $\mathrm{div}(\vec{\omega})$.

C) Un gain d'intégrabilité pour $\mathrm{div}(\vec{\omega})$

Proposition 2.4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.4.1, pour tout $\mathbf{Q}_r(t_0,x_0)\subset\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$, nous avons $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_r(t_0,x_0)}\mathrm{div}(\vec{\omega}) \in L_t^6L_x^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.*

Preuve. Soit $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction test telle que pour $r_2>0$ avec $0<r_2<r'<r_1<R$,

$$\varphi\equiv 1 \ \text{ sur } \ \mathbf{Q}_{r_2}(t_0,x_0) \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(\varphi)\subset\mathbf{Q}_{r'}(t_0,x_0).$$

Étant donné que nous nous intéressons à l'information locale de $\mathrm{div}(\vec{\omega})$, nous fixons $\mathbb{W}=\varphi\,\mathrm{div}(\vec{\omega})$. En appliquant formellement l'opérateur de divergence à l'équation (2.4.1), nous obtenons

$$\partial_t\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) = 2\Delta\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - \mathrm{div}(\vec{\omega}) - \mathrm{div}(\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})). \tag{2.4.4}$$

De plus, nous déduisons que (rappelons que nous avons $\mathbb{W}=\varphi\,\mathrm{div}(\vec{\omega})$) :

$$\partial_t\mathbb{W} - 2\Delta\mathbb{W} = (\partial_t\varphi - 2\Delta\varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) + 4\sum_{i=1}^3 \partial_i((\partial_i\varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})) + \varphi(\partial_t\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - 2\Delta\,\mathrm{div}(\vec{\omega})).$$

Par conséquent et par les propriétés de la fonction test φ, nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t\mathbb{W} = 2\Delta\mathbb{W} + (\partial_t\varphi - 2\Delta\varphi - \varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) + 4\displaystyle\sum_{i=1}^3\partial_i((\partial_i\varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})) - \varphi\,\mathrm{div}(\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})), \\ \mathbb{W}(0,\cdot)=0. \end{cases}$$

Ainsi, par la formule de Duhamel, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}}\mathbb{W}(t,x) \ &= \ \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big((\partial_t\varphi - 2\Delta\varphi - \varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega})\Big)ds}_{(\mathbb{W}_1)} \\ &\quad +4\sum_{i=1}^3 \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}}\underbrace{\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\partial_i((\partial_i\varphi)\,\mathrm{div}(\vec{\omega}))ds\Big)}_{(\mathbb{W}_2)} \\ &\quad \underbrace{- \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big(\varphi\,\mathrm{div}(\mathrm{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u}))\Big)ds}_{(\mathbb{W}_3)}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Nous allons prouver que chaque terme de la partie de droite de l'expression ci-dessus appartient à $L_{t,x}^6(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

- Pour le premier terme $\mathbb{W}_1$ dans (2.4.5), en fixant $\psi = \partial_t \varphi - 2\Delta\varphi - \varphi$ nous pouvons écrire

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{W}_1) &= \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\Big((\partial_t \varphi - 2\Delta\varphi - \varphi)\operatorname{div}(\vec{\omega})\Big)ds = \sum_{i=1}^3 \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\psi(\partial_i \omega_i)ds \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_0^t (\partial_i e^{2(t-s)\Delta})(\psi\omega_i)ds - \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i\psi)\omega_i\big)ds. \qquad (2.4.6)
\end{aligned}
$$

Maintenant, puisque $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et $\operatorname{supp}(\psi) \subset \mathbf{Q}_{r'}(t_0, x_0)$, pour le premier terme de la partie de droite de (2.4.6), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t (\partial_i e^{2(t-s)\Delta})(\psi\omega_i)(s,\cdot)ds \right\|_{L^6} &\leq \int_0^t \|\partial_i \mathfrak{g}_{2(t-s)}\|_{L^1}\|\psi\omega_i(s,\cdot)\|_{L^6}ds \\
&\leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\psi w_i(s,\cdot)\right\|_{L^6} ds,
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Young pour la convolution et ainsi que les estimations habituelles L^p du noyau de la chaleur. Ainsi, par l'inégalité de Hölder dans la variable du temps avec $1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$, on a

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t (\partial_i e^{2(t-s)\Delta})(\psi\omega_i)(s,\cdot)ds \right\|_{L^6} &\leq C\|\psi\|_{L^\infty_{t,x}} \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{\omega}\right\|_{L^6_{t,x}} \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{6}{10}}ds\right)^{\frac{5}{6}} \\
&\leq C\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}}.
\end{aligned}
$$

alors en prenant la norme L^6 dans la variable du temps et (2.4.3), nous avons

$$
\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t (\partial_j e^{2(t-s)\Delta})(\psi w_i)(s,\cdot)ds \right\|_{L^6_{t,x}} \leq C \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{\omega}\right\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \qquad (2.4.7)
$$

Pour le deuxième terme de (2.4.6), par les propriétés de la fonction de test ψ et l'inégalité de Young pour la convolution, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i\psi)\omega_i\big)(s,\cdot)ds \right\|_{L^6} &\leq \int_0^t \|\mathfrak{g}_{2(t-s)}\|_{L^1_x}\|(\partial_i\psi)\omega_i(s,\cdot)\|_{L^6}ds \\
&\leq C\int_0^{t_0} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}(\partial_i\psi)\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^6}ds.
\end{aligned}
$$

En prenant la norme L^6 ainsi que l'inégalité de Hölder dans la variable du temps et par (2.4.3), nous obtenons

$$
\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i\psi)\omega_i\big)(s,\cdot)ds \right\|_{L^6_{t,x}} \leq C\|\partial_i\psi\|_{L^\infty_{t,x}} \left\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}\vec{\omega}\right\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \qquad (2.4.8)
$$

Par conséquent, d'après (2.4.6), (2.4.7) et l'estimation ci-dessus, nous concluons que le terme $\mathbb{W}_1$ dans (2.4.5) appartient à $L^6_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$.

- Pour le terme $\mathbb{W}_2$ dans (2.4.5), il suffit d'étudier l'expression suivante

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \partial_i e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i\varphi)\partial_j\omega_j\big)ds &= \int_0^t \partial_j\partial_i e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i\varphi)\omega_j\big)ds \\
&\quad - \int_0^t \partial_i e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_j\partial_i\varphi)\omega_j\big)ds, \qquad (2.4.9)
\end{aligned}
$$

pour tout $1 \leq i, j \leq 3$. Ainsi, par la régularité maximale du noyau de la chaleur (voir [61, Théorème 7.3]), nous avons

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t \partial_i \partial_j e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i \varphi)\omega_j(s,\cdot)\big) ds \right\|_{L^6_{t,x}} &\leq C \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} (\partial_i \varphi)\vec{\omega} \right\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\partial_i \varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega} \right\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

Puisque le deuxième terme de la partie de droite de (2.4.9) peut être traité de la même manière que (2.4.7), en remplaçant ψ par $\partial_j \partial_i \varphi$, nous pouvons conclure que le terme $\mathbb{W}_2$ dans (2.4.5) appartient à $L^6_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

- Pour le troisième terme $\mathbb{W}_3$ de (2.4.5), pour tout $1 \leq i, j \leq 3$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big(\varphi \partial_i(\partial_j(\omega_j u_i))\big) ds = \int_0^t \partial_j \partial_i e^{2(t-s)\Delta}\big(\varphi \omega_j u_i\big) ds - \int_0^t \partial_i e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_j \varphi)\omega_j u_i\big) ds \\ - \int_0^t \partial_j e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i \varphi)\omega_j u_i\big) ds + \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_i \partial_j \varphi)\omega_j u_i\big) ds. \qquad (2.4.10)\end{aligned}$$

Pour le premier terme de l'expression ci-dessus, par la régularité maximale du noyau de la chaleur, l'hypothèse $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u} \in L^\infty_{t,x}$ et (2.4.3), nous pouvons établir

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t \partial_j \partial_i e^{2(t-s)\Delta}(\varphi \omega_j u_i) ds \right\|_{L^6_{t,x}} &\leq \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}}(\varphi \omega_j u_i)\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

Puisque le deuxième et troisième termes du côté de droite de (2.4.10) partagent la même structure, il suffit d'étudier un seul d'entre eux. Ainsi, par les mêmes arguments que dans (2.4.7), nous avons

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t \partial_j e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_j \varphi)\omega_j u_i\big)(s,\cdot) ds \right\|_{L^6_{t,x}} &\leq \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} (\partial_j \varphi)\omega_j u_i \right\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\partial_j \varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{u} \right\|_{L^\infty_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \omega \right\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

Enfin, le dernier terme de (2.4.10), nous pouvons utiliser l'estimation (2.4.8) et nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \int_0^t e^{2(t-s)\Delta}\big((\partial_j \partial_i \varphi)\omega_j u_i\big) ds \right\|_{L^6_{t,x}} &\leq \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} (\partial_j \partial_i \varphi)\omega_j u_i \right\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\partial_j \partial_i \varphi\|_{L^\infty_{t,x}} \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{u} \right\|_{L^\infty_{t,x}} \|\omega\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons que $\mathbb{W}_3$ dans (2.4.5) appartient à $L^6_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Nous avons donc prouvé que les quantités $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3$ données dans (2.4.5) appartiennent à $L^6_{t,x}(]0, t_0 + r^2[\times \mathbb{R}^3)$ et nous obtenons alors que la fonction $\mathbb{W} \in L^6_{t,x}(]0, t_0 + r_2^2[\times \mathbb{R}^3)$. En utilisant les propriétés de la fonction test (rappelons que l'on a $\varphi = 1$ sur $\mathbf{Q}_{r_2}$) nous concluons finalement que

$$\|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}(t_0,x_0)} \operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^6_{t,x}} < +\infty,$$

et ceci termine la preuve de la Proposition 2.4.1. ■

D) La variable $\vec{\omega}$ est bornée

Montrons maintenant comme déduire que $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_{r_3})$ pour $r_3 > 0$ tel que $0 < r_3 < r_2 < r_1 < R$, à partir de l'hypothèse sur $\vec{u}$ et l'intégrabilité sur $\mathrm{div}(\vec{\omega})$.

Proposition 2.4.2. *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution faible des équations micro-polaires* (2.3.1) *telle que* $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$ *et* $p \in \mathcal{D}'_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$. *Si* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_R)$ *alors pour tout* $\mathbf{Q}_{r_3} \subset \mathbf{Q}_R$, *nous avons* $\vec{\omega} \in L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_{r_3})$.

Preuve. Rappelons que, d'après le Théorème 2.2.1, page 45 et la Proposition 2.4.1, il existe des rayons $r_2 > 0$ et $r' > 0$ avec $0 < r_2 < r' < r_1 < R$ tels que nous avons

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega} \in L^6_t L^6_x \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \mathrm{div}(\vec{\omega}) \in L^6_t L^6_x. \tag{2.4.11}$$

Avec ces informations, nous allons déduire que $\vec{\omega}$ est bornée. Pour cela, nous considérons une fonction test positive $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour $r_3 > 0$ avec $0 < r_3 < r_2 < r' < r_1 < R$, nous avons

$$\phi \equiv 1 \text{ sur } \mathbf{Q}_{r_3}, \quad \text{et} \quad \mathrm{supp}(\phi) \subset \mathbf{Q}_{r_2}.$$

Considérons maintenant $\vec{W} = \phi\vec{\omega}$. En utilisant la dynamique de la variable $\vec{\omega}$ *i.e.*, l'équation (2.4.2), on a

$$\begin{cases} \partial_t \vec{W} = \Delta \vec{W} + (\partial_t \phi - \Delta\phi)\vec{\omega} + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \partial_i((\partial_i \phi)\vec{\omega}) + \phi \left[\vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) - \vec{\omega} - \mathrm{div}(\vec{\omega} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right], \\ \vec{W}(0, \cdot) = 0. \end{cases}$$

Par la formule de Duhamel, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \vec{W}(t,x) \;=\; & \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\partial_t \phi - \Delta\phi - \phi)\vec{\omega} ds}_{(\vec{W}_1)} + 2 \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \partial_i ((\partial_i \phi)\vec{\omega}) ds}_{(\vec{W}_2)} \\ & + \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \phi \vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}) ds}_{(\vec{W}_3)} - \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \phi\, \mathrm{div}(\vec{\omega} \otimes \vec{u}) ds}_{(\vec{W}_4)} \\ & + \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \frac{\phi}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} ds}_{(\vec{W}_5)} \, ds. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Ainsi, nous allons montrer que chaque terme de la partie de droite de (2.4.12) est borné dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Nous étudions chaque terme ci-dessus séparément.

- Pour le terme $\vec{W}_1$ dans (2.4.12) en fixant $\Phi = \partial_t \phi - \Delta\phi - \phi$ nous pouvons écrire

$$\vec{W}_1 = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\partial_t \phi - \Delta\phi - \phi)\vec{\omega} ds = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Phi\vec{\omega} ds.$$

  Notons que $\Phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ et $\mathrm{supp}(\Phi) \subset \mathbf{Q}_{r'}(t_0, x_0)$. Par l'inégalité de Young pour la convolution et les estimations L^p du noyau de la chaleur nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Phi\vec{\omega}(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty} & \leq C \int_0^t \|\mathfrak{g}_{(t-s)}\|_{L^{\frac{6}{5}}_x} \|\Phi\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^6} ds \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{4}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \Phi\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^6} ds. \end{aligned}$$

De plus, en appliquant l'inégalité de Hölder dans la variable du temps avec $1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}$ nous avons

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Phi \vec{\omega} ds \right\|_{L^\infty} &\leq C \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \Phi \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{10}} ds \right)^{\frac{5}{6}} \\ &\leq C \|\Phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} t^{\frac{7}{12}}.\end{aligned}$$

Donc, en prenant la norme L^∞ dans la variable de temps et à partir de (2.4.11), nous avons

$$\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Phi \vec{\omega} ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \leq C \|\Phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \tag{2.4.13}$$

- Pour le terme $\vec{W}_2$ dans (2.4.12), l'inégalité de Young pour la convolution et les estimations L^p du noyau de la chaleur impliquent l'estimation suivante pour tout $1 \leq i \leq 3$

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \partial_i e^{(t-s)\Delta} (\partial_i \phi) \vec{\omega} ds \right\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \|\partial_i \mathfrak{g}_{(t-s)}\|_{L^{\frac{6}{5}}_x} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} (\partial_i \phi) \vec{\omega}(s, \cdot)\|_{L^6} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} (\partial_i \phi) \vec{\omega}(s, \cdot)\|_{L^6} ds,\end{aligned}$$

ainsi, en vertu de l'inégalité de Hölder dans la variable temporelle, nous avons

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \partial_i e^{(t-s)\Delta} (\partial_i \phi) \vec{\omega} ds \right\|_{L^\infty} &\leq C \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \partial_i \phi \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} \left(\int_0^t (t-s)^{-\frac{9}{10}} ds \right)^{\frac{5}{6}} \\ &\leq C \|\partial_i \phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} t^{\frac{1}{12}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'information donnée dans (2.4.11), nous obtenons

$$\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t \partial_i e^{(t-s)\Delta} (\partial_i \phi) \vec{\omega} ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \leq C \|\partial_i \phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty. \tag{2.4.14}$$

- Nous considérons maintenant le terme $\vec{W}_3$ dans (2.4.12). Pour cela, nous écrivons

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \phi \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\vec{\nabla} \phi) \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds + \int_0^t \vec{\nabla} e^{(t-s)\Delta} \phi \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds.$$

Donc, puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \operatorname{div}(\vec{\omega}) \in L^6_t L^6_x$, nous pouvons appliquer les mêmes arguments que dans (2.4.13) et (2.4.14) pour obtenir

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\vec{\nabla} \phi) \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} &\leq C \|\vec{\nabla} \phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^6_{t,x}} < +\infty, \\ \left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t \vec{\nabla} e^{(t-s)\Delta} \phi \operatorname{div}(\vec{\omega}) ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} &\leq C \|\phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_2}} \operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

- Enfin, nous nous intéressons aux termes $\vec{W}_4$ et $\vec{W}_5$ de (2.4.12), qui impliquent tous deux la présence de la vitesse $\vec{u}$. Commençons par le terme $\vec{W}_4$, pour lequel il suffit d'étudier l'expression

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \phi \partial_j (\omega_i u_j) ds = \int_0^t \partial_j e^{(t-s)\Delta} \phi \omega_i u_j ds - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\partial_j \phi) \omega_i u_j ds, \tag{2.4.15}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq 3$. Pour le premier terme de la partie de droite de l'expression ci-dessus, en utilisant les mêmes arguments que dans (2.4.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t \partial_j e^{(t-s)\Delta} \phi \omega_i u_j ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} &\leq C \|\phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \omega_i u_j\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

De plus, pour le second terme de (2.4.15), par les mêmes arguments de (2.4.13), nous avons

$$\begin{aligned}\left\| \mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\partial_j \phi) \omega_i u_j ds \right\|_{L^\infty_t L^\infty_x} &\leq C \|\partial_j \phi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \omega_i u_j\|_{L^6_{t,x}} \\ &\leq C \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}} \|\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r'}} \vec{\omega}\|_{L^6_{t,x}} < +\infty.\end{aligned}$$

L'estimation du dernier terme $\vec{W}_5$ de (2.4.12) s'ensuit de façon directe. En effet, puisque l'on peut écrire

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \phi \vec{\nabla} \wedge \vec{u} ds = -\int_0^t e^{(t-s)\Delta} (\vec{\nabla} \phi) \wedge \vec{u} ds + \int_0^t \vec{\nabla} \wedge e^{(t-s)\Delta} \phi \vec{u} ds,$$

et comme $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R} \vec{u} \in L^6_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, nous pouvons traiter chaque terme ci-dessus en utilisant les mêmes arguments que dans (2.4.13) et (2.4.14) respectivement.

Par conséquent, d'après les points précédents, les termes $\vec{W}_1, \ldots, \vec{W}_4$ donnés dans (2.4.5) sont bornés, et donc $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \vec{W} \in L^\infty_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Par conséquent, en utilisant les propriétés de la fonction de test ($\phi = 1$ sur $\mathbf{Q}_r$), nous obtenons que $\vec{\omega}$ est borné dans $\mathbf{Q}_{r_3}(t_0, x_0)$. ■

E) Étude de la régularité de $\vec{\omega}$

Maintenant, nous allons prouver que si $\vec{u}$ est plus régulier que $\vec{\omega}$, nous pouvons transférer cette information à $\vec{\omega}$ dans des boules plus petites.

Proposition 2.4.3. *Sous l'hypothèse générale du Théorème 2.4.1, si nous supposons que*

$$\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_1})) \cap L^2(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_1})),$$

alors pour un certain rayon $r_4 > 0$ tel que $0 < r_4 < r_3 < r_2 < r_1 < R$, nous avons

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_4})) \cap L^2(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_4})).$$

Preuve. Tout d'abord, remarquons que d'après la Proposition 2.4.2, il existe $r_3 > 0$ avec $0 < r_3 < r_2 < r_1 < R$ tel que

$$\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_{r_3}} \vec{\omega} \in L^\infty_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3). \tag{2.4.16}$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction test telle que pour $r_4 > 0$ avec $0 < r_3 < r_2 < r_1 < R$, nous avons

$$\phi \equiv 1 \text{ sur }]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[\times B_{x_0,r_4} \quad \text{et} \quad \text{supp}(\phi) \subset]t_0 - r_3^2, t_0 + r_3^2[\times B_{x_0,r_3}.$$

En utilisant l'égalité $\Delta(\phi\omega_i) = \Delta\phi\omega_i + 2\,\text{div}(\vec{\nabla}\phi\omega_i) - \phi\Delta\omega_i$, nous avons pour tout $1 \leq i \leq 3$,

$$\phi\omega_i = \frac{1}{(-\Delta)} \left[-(\Delta\phi)\omega_i - 2\,\text{div}((\vec{\nabla}\phi)\omega_i) + \phi(\Delta\omega_i) \right]. \tag{2.4.17}$$

Ainsi, afin d'améliorer la régularité de $\vec{\omega}$, nous pouvons prouver que l'expression ci-dessus appartient à $L^\infty_t \dot{H}^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x$. Pour cela, nous déduirons un gain d'information pour le Laplacien de $\vec{\omega}$, et plus tard nous étudierons la régularité de $\vec{\omega}$.

$*$ **Un gain d'information pour le Laplacien de $\vec{\omega}$.** En considérant l'identité

$$\Delta\vec{\omega} = \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}), \tag{2.4.18}$$

il est clair que nous pouvons obtenir des informations sur le Laplacien de $\vec{\omega}$ à partir de sa divergence et de son rotationnel. Ainsi, soit $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction test telle que pour $0 < r_4 < \mathfrak{r} < r_3 < R$,

$$\psi \equiv 1 \quad \text{sur }]t_0 - \mathfrak{r}^2, t_0 + \mathfrak{r}^2[\times B_{x_0,\mathfrak{r}} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(\psi) \subset]t_0 - r_3^2, t_0 + r_3^2[\times B_{x_0,r_3}.$$

Définissons maintenant $\vec{\mathfrak{W}} = \psi\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}$ et $\mathbb{W} = \psi\operatorname{div}(\vec{\omega})$. Observons que la dynamique de ces variables est simple à calculer, en effet, en appliquant formellement l'opérateur rotationnel à l'équation (2.4.2), nous obtenons $\partial_t\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} = \Delta\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} - \vec{\nabla} \wedge ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ et rappelons que la dynamique de $\operatorname{div}(\vec{\omega})$ a déjà été obtenue dans (2.4.4). Ainsi, à partir de ces équations, nous pouvons déduire

$$\begin{aligned}
\partial_t\vec{\mathfrak{W}} &= \Delta\vec{\mathfrak{W}} + \underbrace{(\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}}_{(I_a)} + 2\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\partial_i((\partial_i\psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})}_{(II_a)} - \underbrace{\psi\vec{\nabla} \wedge ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega})}_{(IIII_a)} + \underbrace{\frac{1}{2}\psi\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u})}_{(IV_a)}, \\
\partial_t\mathbb{W} &= 2\Delta\mathbb{W} + \underbrace{(\partial_t\psi - 2\Delta\psi - \psi)\operatorname{div}(\vec{\omega})}_{(I_b)} + 4\sum_{i=1}^{3}\underbrace{\partial_i((\partial_i\psi)\operatorname{div}(\vec{\omega}))}_{(II_b)} - \underbrace{\psi\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega})}_{(III_b)},
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

tel que $\vec{\mathfrak{W}}(0, \cdot) = \mathbb{W}(0, \cdot) = 0$ par les propriétés de la fonction test ψ.

Nous allons montrer maintenant que chacun des termes du membre de droite de (2.4.19) appartient à $L^2_t\dot{H}^{-1}_x$. En effet, nous avons les points suivants :

- Premièrement, considérons les termes (I_a) et (I_b). Comme qu'ils partagent la même structure, par conséquent, nous étudions seulement le premier. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\|(\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \|(\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(t, \cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}} \\
&\leq C\|\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi(t, \cdot)\|_{L^3}\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(t, \cdot)\|_{L^2(B_{r_2})},
\end{aligned}$$

  où nous avons utilisé l'inclusion $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R})$ et l'inégalité de Hölder ($\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$). De plus, en prenant la norme L^2 par rapport à la variable temporelle, nous obtenons

$$\|(\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi)\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} \leq C\|\partial_t\psi - \Delta\psi - \psi\|_{L^\infty_t L^3_x}\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty.$$

- Pour les termes (II_a) et (II_b) dans (2.4.19), étant donné qu'ils partagent la même structure, il suffit d'étudier seulement le premier. Remarquons que pour tout $1 \leq i \leq 3$,

$$\|\partial_i(\partial_i\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega})\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} \leq \|\partial_i\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_t L^2_x} \leq \|\partial_i\psi\|_{L^\infty_{t,x}}\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty,$$

  comme $\vec{\omega} \in L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$.

- Pour les termes (III_a) et (III_b) dans (2.4.19), puisque nous pouvons écrire $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} = \text{div}(\vec{\omega}\otimes\vec{u})$, il suffit d'étudier l'expression suivante pour tout $1 \leq i, m, j \leq 3$

$$\begin{array}{rcl}\psi\partial_i(\partial_j(\omega_m u_j)) & = & \partial_i\partial_j(\psi\omega_m u_j) - \partial_j((\partial_i\psi)\omega_m u_j) \\ & & -\partial_i((\partial_j\psi)\omega_m u_j) + (\partial_j\partial_i\psi)(\omega_m u_j).\end{array} \qquad (2.4.20)$$

En prenant la norme $L^2_t\dot{H}^{-1}_x$ dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\psi\partial_i(\partial_j(\omega_m u_j))\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} &\leq \underbrace{\|\partial_i\partial_j(\psi\omega_m u_j)\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x}}_{(1)} + \underbrace{\|\partial_j((\partial_i\psi)(\omega_m u_j))\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x}}_{(2)} \\ &+ \underbrace{\|\partial_i((\partial_j\psi)(\omega_m u_j))\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x}}_{(3)} + \underbrace{\|(\partial_j\partial_i\psi)(\omega_m u_j)\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x}}_{(4)}.\end{aligned} \qquad (2.4.21)$$

Pour le terme (1) dans l'expression ci-dessus, comme $\vec{u}$ est bornée sur $\mathbf{Q}_R(t_0,x_0)$ par hypothèse, $\vec{\omega}$ est bornée sur $\mathbf{Q}_{r_2}(t_0,x_0)$ par (2.4.16) et puisque $\text{supp}(\psi) \subset]t_0 - r_2^2, t_0 + r_2^2[\times B_{x_0,r_2}$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\partial_i\partial_j(\psi\omega_m u_j)\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} &\leq \|\psi\omega_m u_j\|_{L^2_t\dot{H}^1_x} = \sum_{|\alpha|=1}\|D^\alpha(\psi\omega_m u_j)\|_{L^2_tL^2_x} \\ &= \sum_{|\alpha|=1}\|(D^\alpha\psi)\omega_m u_j + \psi(D^\alpha\omega_m)u_j + \psi\omega_m(D^\alpha u_j)\|_{L^2_tL^2_x} \\ &\leq C\sum_{|\alpha|=1}\|(D^\alpha\psi)\omega_m\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\|u_j\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} + C\|\psi u_j\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\|\omega_m\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)} \\ &\quad + \|\psi\omega_m\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\|u_j\|_{L^2_t\dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty.\end{aligned} \qquad (2.4.22)$$

Pour les termes (2) et (3) dans (2.4.21), puisqu'ils ont la même structure, nous étudions seulement le premier. Ainsi, en utilisant à nouveau le fait que $\vec{\omega}$ est bornée sur $\mathbf{Q}_{r_2}(t_0,x_0)$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\partial_j((\partial_j\psi)(\omega_m u_j))\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} &\leq \|(\partial_j\psi)\omega_m u_j\|_{L^2_tL^2_x} \\ &\leq C\|(\partial_j\psi)\omega_m\|_{L^\infty_tL^\infty_x}\|u_j\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty.\end{aligned} \qquad (2.4.23)$$

Pour le dernier terme (4) de (2.4.21), grâce à l'inclusion $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et à l'inégalité de Hölder ($\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$), on a

$$\begin{aligned}\|(\partial_j\partial_i\psi)\omega_m u_j\|_{L^2_t\dot{H}^{-1}_x} &\leq \|(\partial_j\partial_i\psi)\omega_m u_j\|_{L^2_tL^{\frac{6}{5}}_x} \\ &\leq C\|u_j\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_R)}\|(\partial_j\partial_i\psi)\omega_m\|_{L^2_tL^3_x} \\ &\leq C\|u_j\|_{L^\infty_tL^2_x(\mathbf{Q}_R)}\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_{r_3})}\|\partial_j\partial_i\psi\|_{L^2_tL^3_x} < +\infty.\end{aligned} \qquad (2.4.24)$$

Ainsi, à partir de (2.4.22), (2.4.23) et (2.4.24), en utilisant l'expression (2.4.20), nous pouvons voir que les termes (III_a) et (III_b) dans (2.4.19) appartiennent à $L^2_t\dot{H}^{-1}_x$.

- Pour le dernier terme (IV_a) de (2.4.19), nous avons

$$\psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) = \vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) - (\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}).$$

Ainsi, en prenant la norme $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R})$ par rapport à la variable spatiale, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\psi\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \|\vec{\nabla}\wedge(\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u})(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} + \|(\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \\ &\leq \|\psi\vec{\nabla}\wedge\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} + \|(\vec{\nabla}\psi)\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})(t,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inclusion $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, en intégrant dans le temps et en utilisant l'inégalité de Hölder dans l'espace avec $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, nous concluons

$$\begin{aligned} \|\psi\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u})\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} &\leq C\|\psi\|_{L^\infty_{t,x}} \|\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} \\ &\quad + C\|\vec{\nabla}\psi\|_{L^2_t L^3_x} \|\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(\mathbf{Q}_R)} < +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir des points précédents, nous avons prouvé que chaque terme du côté de droite de (2.4.19) appartient à $L^2_t \dot{H}^{-1}_x$. Ainsi, selon la théorie développée dans [61, Section 13, page 398] (qui est essentiellement le critère de régularité de Serrin pour les équations de Navier-Stokes), nous avons

$$\vec{\mathfrak{W}}, \mathbb{W} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x.$$

De plus, à partir de l'identité (2.4.18), nous pouvons déduire que

$$\phi\Delta\vec{\omega} \in L^\infty_t \dot{H}^{-1}_x \cap L^2_{t,x}. \tag{2.4.25}$$

$*$ **Un gain de régularité dans la variable spatiale pour $\vec{\omega}$.** Rappelons que à partir de (2.4.17), nous avons pour tout $1 \leq i \leq 3$

$$\phi\omega_i = \frac{1}{(-\Delta)} \left[-(\Delta\phi)\omega_i - 2\,\mathrm{div}((\vec{\nabla}\phi)\omega_i) + \phi(\Delta\omega_i) \right]. \tag{2.4.26}$$

Maintenant, nous allons prouver que chaque terme dans l'expression ci-dessus appartient à $L^\infty_t \dot{H}^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x$. Tout d'abord, en considérant la norme $L^2_t \dot{H}^2_x$ dans (2.4.26), nous avons

$$\begin{aligned} \|\phi\omega_i\|_{L^2_t \dot{H}^2_x} &\leq \| -(\Delta\phi)\omega_i - 2\,\mathrm{div}((\vec{\nabla}\phi)\omega_i) + \phi(\Delta\omega_i)\|_{L^2_{t,x}} \\ &\leq C\|(\Delta\phi)\omega_i\|_{L^2_{t,x}} + \|2\,\mathrm{div}((\vec{\nabla}\phi)\omega_i)\|_{L^2_{t,x}} + \|(\phi\Delta)\omega_i\|_{L^2_{t,x}}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\|2\,\mathrm{div}(\vec{\nabla}\phi\omega_i)\|_{L^2_{t,x}} \leq 2\|(\Delta\phi)\omega_i\|_{L^2_{t,x}} + 2\|\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\omega_i\|_{L^2_{t,x}},$$

et donc comme $\mathrm{supp}(\phi) \subset]t_0 - R^2, t_0 + R^2[\times B_{x_0,R}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\phi\omega_i\|_{L^2_t \dot{H}^2_x} &\leq C\|(\Delta\phi)\omega_i\|_{L^2_{t,x}} + C\|\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\omega_i\|_{L^2_{t,x}} + C\|\phi(\Delta\omega_i)|_{L^2_{t,x}} \\ &\leq C\|\vec{\nabla}\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} + C\|\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{Q}_R)} + +C\|\phi(\Delta\omega_i)\|_{L^2_{t,x}} < +\infty, \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

où nous avons utilisé (2.4.25) et le fait que $\vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_R)$.

D'autre part, en considérant la norme $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ dans (2.4.26), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\phi\omega_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1} &\leq \|(\Delta\phi)\omega_i(t,\cdot) + 2\,\mathrm{div}((\vec{\nabla}\phi)\omega_i)(t,\cdot) + \phi(\Delta\omega_i)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \\ &\leq \|(\Delta\phi)\omega_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} + \|(\vec{\nabla}\phi)\omega_i(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\phi(\Delta\omega_i)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'injection $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$ et l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\|(\Delta\phi)\omega_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \|(\Delta\phi)\omega_i(t,\cdot)\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq \|\Delta\phi(t,\cdot)\|_{L^3} \|\omega_i(t,\cdot)\|_{L^2(B_{x_0,R})}.$$

Ainsi, par l'estimation précédente et (2.4.25), on obtient

$$\|\phi\omega_i\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\omega_i\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R)} + C\|\omega_i\|_{L^\infty_t L^2_x(\mathbf{Q}_R)} + C\|\phi\Delta\omega_i\|_{L^\infty_t \dot{H}^{-1}_x} < +\infty.$$

Par conséquent, à partir de (2.4.27) et de l'expression ci-dessus, nous obtenons $\phi\vec{\omega} \in L^\infty_t \dot{H}^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x$, *i.e.*,

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_4})) \cap L^2(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_4})),$$

et donc la preuve de la Proposition 2.4.3 est terminée. ■

Fin de la démonstration du Théorème 2.4.1 Rappelons que, par (2.4.25), nous avons obtenu que pour certain $0 < r_1 < R$, nous avons

$$\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_1}) \cap L^2(]t_0 - r_1^2, t_0 + r_1^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_1})).$$

En plus, par la Proposition 2.4.3 il s'ensuit que pour $r_4 > 0$ avec $0 < r_4 < r_1 < R$, nous avons

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^1(B_{x_0,r_4})) \cap L^2(]t_0 - r_4^2, t_0 + r_4^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_4})).$$

En particulier, puisque $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x(\mathbf{Q}_{r_3})$, nous pouvons à nouveau appliquer le critère de régularité de Serrin pour les équations de Navier-Stokes à $\vec{u}$, et donc il s'ensuit que pour un certain rayon $r_5 > 0$ tel que $0 < r_5 < r_4 < R$, nous avons

$$\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - r_5^2, t_0 + r_5^2[, \dot{H}^2(B_{x_0,r_5}) \cap L^2(]t_0 - r_5^2, t_0 + r_5^2[, \dot{H}^3(B_{x_0,r_5})).$$

Ainsi, en suivant les mêmes arguments que ceux donnés dans la Proposition 2.4.3, nous pouvons également améliorer la régularité de $\vec{\omega}$ et puisque nous pouvons itérer ce processus, nous obtenons la régularité souhaitée pour $(\vec{u}, \vec{\omega})$ et donc la preuve du Théorème 2.4.1 est terminée. ■

Remarque 2.4.1. *Rappelons que dans cette section, nous avons obtenu la régularité de la solution* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *à partir de l'hypothèse* $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_R)$. *D'autre part, par le Théorème 2.2.1, page 45, nous avons montré que si* $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}_R}\vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, *alors pour un certain* $r > 0$ *avec* $0 < r < R$, *nous avons* $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^6_t L^6_x(\mathbf{Q}_r)$. *Ainsi, il semble également possible d'obtenir la régularité du système micro-polaire à partir du critère* $\vec{u} \in L^p_t L^q_x(\mathbf{Q}_R)$ *avec* $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1$. *En effet, dans la suite, nous nous étudierons le cas limite* $q = 3$, *où les méthodes précédentes ont certaines limitations et où nous devons adopter une approche différente. Ceci sera l'un des objectifs du prochain chapitre.*

Remarque 2.4.2. *Tout au long de ce chapitre, nous observons que, lorsque nous avons étudié la variable* $\vec{\omega}$, *nous avons fait une étude du terme* $\text{div}(\vec{\omega})$ *en considérant sa dynamique, voir par exemple l'identité* (2.2.50), *la Proposition 2.3.4 et la Proposition 2.4.1. Ainsi, comme il a été dit dans la Remarque 1.2.2, cette stratégie nous permet d'obtenir des estimations utiles et d'atteindre les résultats souhaités.*

2.4.2. Les points partiellement réguliers

Étant donné que nous pouvons déduire la régularité de $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ à partir du fait que la vitesse $\vec{u}$ soit bornée, nous pouvons naturellement introduire la définition suivante :

Définition 2.4.1 (Point partiellement régulier / Point partiellement singulier). *Un point* $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ *est un* point partiellement régulier *des équations des fluides micro-polaires* (2.4.1) *et* (2.4.2) *s'il existe* $r > 0$ *tel que* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$. *D'un autre côté, on dira qu'un point* (t_0, x_0) *est* partiellement singulier *s'il n'est pas* partiellement régulier.

Il est important de souligner qu'à partir de la théorie développée dans la Section 2.3.3, nous pouvons obtenir quelques résultats intéressants concernant les points définis ci-dessus. En effet, si l'on désigne $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des points partiellement singuliers, par le Théorème 2.3.1 (rappelons que nous n'avons ajouté aucune condition sur $\vec{\omega}$), et en voyant le terme $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ comme une force extérieure nous pouvons considérer la théorie des équations de Navier-Stokes classiques (voir [98, Théorème 6.2]) et il est donc possible d'en déduire que la mesure de Hausdorff parabolique de $\mathcal{S}$ est nulle. D'autre part, si nous désignons $\mathcal{N}$ comme l'ensemble des points où $\vec{\omega}$ est non borné, il s'ensuit d'après le Théorème 2.4.1 que $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}$, et donc la mesure de Hausdorff parabolique de $\mathcal{N}$ est également nulle. Cela met en évidence une fois de plus une possible différence de comportement entre les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$.

Un deuxième résultat intéressant que nous pouvons déduire à partir de la Section 2.3.3 est la caractérisation suivante des points partiellement singuliers :

Proposition 2.4.4. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution partiellement adaptée sur $\mathbf{Q}_R(t,x)$. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbf{Q}_R(t,x)$ nous avons*

- *soit (t_0, x_0) est partiellement singulier et alors pour tout $0 < r < R$*
$$\varepsilon \leq \frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}_r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds,$$
où ε est donné par le Théorème 2.3.2, page 106.
- *soit (t_0, x_0) est un point partiellement régulier et alors*
$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}_r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |\vec{\omega}|^3 dyds = 0.$$

Preuve. Le premier point se prouve par contradiction. Supposons donc que (t_0, x_0) est un point partiellement singulier au sens de la Définition 2.4.1 tel qu'il existe $0 < r < R$ avec
$$\frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds < \varepsilon.$$
Puisque $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée, nous pouvons utiliser le Théorème 2.3.2, et donc il existe $\rho > 0$ avec $0 < \rho < r$ tel que $(\vec{u}, \vec{\omega})$ est borné dans $\mathbf{Q}_\rho(t_0, x_0)$, et donc (t_0, x_0) doit être un point partiellement régulier, ce qui est une contradiction.

Pour montrer le deuxième point, comme (t_0, x_0) est un point partiellement régulier, il existe un certain $R > 0$ tel que $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_{t,x}(\mathbf{Q}_R(t_0, x_0))$. Par conséquent, pour tout $r < R$ nous avons
$$\frac{1}{r^2} \int_{\mathbf{Q}_r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |\vec{\omega}|^3 dyds \leq C(\|\vec{u}\|^3_{L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_R)} + \|\vec{\omega}\|^3_{L^\infty_t L^\infty_x(\mathbf{Q}_R)}) r^3.$$
La preuve est terminée en prenant la limite lorsque r tend vers 0. ■

Ainsi, maintenant nous nous intéressons au comportement de la solution quand on s'approche des points partiellement singuliers. En effet, dans le prochain chapitre, nous allons présenter une phénomène de concentration de la norme L^3 autour de ce type de points.

3 | Concentration de la norme L^3_x autour de points partiellement singuliers

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif se porte désormais sur le comportement de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ autour des points partiellement singuliers introduits à la fin du chapitre précédent. Plus précisément, nous allons d'abord obtenir un critère d'explosion de la norme L^3 de la vitesse, puis nous affinerons ce résultat en présentant l'effet de concentration autour des points partiellement singuliers. Pour cela, notons d'abord que l'explosion de la norme L^3 et la régularité des solutions sous cette hypothèse ne sont que deux faces d'une même pièce. Donc dans une première étape, nous allons établir la régularité des variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ en supposant que $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x$ pour ensuite étudier un critère d'explosion.

Avant de présenter plus en détail les principaux résultats de ce chapitre, nous énonçons quelques propriétés liées au système micro-polaire qui, rappelons-le, est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, & (3.1.1) \\ \partial_t \vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{\omega} + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}, & (3.1.2) \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \;\; \vec{\omega}(0,x) = \vec{\omega}_0(x) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases}$$

Nous nous intéressons seulement aux variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ puisque, comme il a été remarqué dans les chapitres précédents, l'information sur la pression p peut être obtenue à partir de la vitesse $\vec{u}$ en utilisant l'équation suivante :

$$\Delta p = -\operatorname{div}((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}). \tag{3.1.3}$$

Maintenant, observons que la première équation (3.1.1) (associée à la variable $\vec{u}$) est invariante par le changement d'échelle suivant :

$$\vec{u}_\lambda(t,x) = \lambda\vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_\lambda = \lambda^2\vec{\omega}(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{où } \lambda > 0. \tag{3.1.4}$$

Cependant, le triplet $(\vec{u}_\lambda, p_\lambda, \vec{\omega}_\lambda)$ n'est plus une solution du système micro-polaire, car la deuxième équation (3.1.2) n'a pas une mise à l'échelle naturelle qui préserve la structure de l'équation en raison de la présence du terme d'amortissement $\vec{\omega}$. Néanmoins, le changement d'échelle ci-dessus est utile lors de l'étude de la régularité des variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$. En effet, notons que pour tout $1 \leq p, q \leq +\infty$, nous avons

$$\|\vec{u}_\lambda\|_{L^p_t L^q_x} = \lambda^{1-\frac{2}{p}-\frac{3}{q}}\|\vec{u}\|_{L^p_t L^q_x},$$

et rappelons que si, en particulier, nous avons la relation $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}<1$, nous disons que l'espace $L^p_tL^q_x$ est sous-critique. Ainsi, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent dans le Théorème 2.4.1, l'information $\vec{u}\in L^\infty_tL^\infty_x(\mathbf{Q}_r)$ implique la régularité des variables $(\vec{u},\vec{\omega})$ à l'intérieur de $\mathbf{Q}_r$. Donc, nous pouvons dire que l'information sous-critique de la vitesse implique la régularité du système micro-polaire. Cette caractéristique des équations micro-polaires est également soulignée dans les travaux déjà existants si l'on suppose que la vitesse $\vec{u}$ appartient à certains espaces fonctionnels sous-critiques par rapport au changement d'échelle (3.1.4) (voir [5], [38] et [106]).

Il est important de remarquer que le cas critique $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1$ est bien évidemment plus délicat, et surtout le cas $\vec{u}\in L^\infty_tL^3_x$ où les méthodes habituelles (c'est-à-dire les effets régularisants du noyau de la chaleur) présentent des limitations. Ainsi, pour mieux comprendre les difficultés de travailler avec le cas limite $(p,q)=(\infty,3)$, considérons pour un moment les équations de Navier-Stokes classiques :

$$\begin{cases}\partial_t\vec{v}=\Delta\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}-\vec{\nabla}h, \qquad \operatorname{div}(\vec{v})=0,\\ \vec{v}(0,x)=\vec{v}_0(x), \quad \operatorname{div}(\vec{v}_0)=0.\end{cases}$$

Mentionnons que ce n'est qu'en 2003, dans l'article [34] d'Escauriaza, Seregin et Sverak, qu'il a été possible de déduire la régularité des solutions faibles quand le champ de vitesse $\vec{v}$ appartient à $L^\infty_tL^3_x$. Ce résultat est obtenu par contradiction en utilisant un argument de changement d'échelle autour des points singuliers. Il est important de remarquer que la contradiction est obtenue par l'utilisation de la théorie de ϵ-régularité par Caffarelli, Kohn et Nirenberg et l'application des théories d'extension unique et d'unicité de rétrograde pour l'équation de la chaleur. Cette stratégie a également permis de traiter des espaces critiques plus larges pour les équations des Navier-Stokes, comme nous pouvons le voir dans les articles [2], [42] et [82].

De plus, la stratégie évoquée dans le paragraphe précédent a ainsi permis de montrer que si $\mathcal{T}>0$ est un temps maximal de régularité de $\vec{v}$, alors nous avons $\limsup_{t\to\mathcal{T}}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^3(\mathbb{R})}=+\infty$. Ceci a été ensuite amélioré dans l'article [89] où il a été démontré que :

$$\lim_{t\to\mathcal{T}}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^3(\mathbb{R})}=+\infty.$$

Il est important de souligner qu'étant donné que la preuve des résultats précédents repose sur un argument de contradiction, il s'agit alors d'estimations qualitatives. Cependant, dans l'article [97], une première estimation quantitative a été obtenue. En effet, pour un certain $c>0$, il a été montré que

$$\limsup_{t\to\mathcal{T}}\frac{\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}}{\log\Big(\log\Big(\log\Big(\frac{1}{\mathcal{T}-t}\Big)\Big)\Big)^c}=+\infty.$$

Ce résultat a été ensuite obtenu dans un cadre local avec de meilleures estimations quantitatives dans [7] où l'un des principaux ingrédients est un effet de concentration de la norme L^3_x obtenu dans [6].

Ainsi, en revenant aux équations micro-polaires, tout au long de ce chapitre et en suivant l'esprit de cette thèse, nous étudierons le comportement de la solution $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ lorsque nous considérons seulement que $\vec{u}\in L^\infty_tL^3_x$. Plus précisément, dans la Section 3.2, nous allons montrer qu'il est possible d'en déduire la régularité des variables $(\vec{u},\vec{\omega})$ et d'obtenir ainsi le cas limite $(p,q)=(\infty,3)$ du critère de Serrin en remarquant l'effet de la domination de la vitesse $\vec{u}$ au sens de la Définition 2.1.1, page 38. Ensuite, nous obtiendrons l'explosion de cette norme, enfin, dans la Section 3.3, nous présenterons le résultat principal de ce chapitre, *i.e.*, l'effet de concentration de la norme $L^3(\mathbb{R}^3)$ de $\vec{u}$.

Notations

Nous aurons besoin de considérer deux types différents de boules paraboliques centrées en le point $(t_0, x_0) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$: nous définissons les ensembles $\mathbf{Q}_r(t_0, x_0)$ et $Q_r(t_0, x_0)$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_r(t_0, x_0) &=]t_0 - r^2, t_0 + r^2[\times B_{x_0,r}, \\ \text{et} \quad Q_r(t_0, x_0) &=]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r}, \end{aligned}$$

pour $0 < r < \sqrt{t_0}$ et $B_{x_0,r} = B(x_0, r)$. Lorsque le contexte est clair, nous écrirons $\mathbf{Q}_r$ (ou Q_r) au lieu de $\mathbf{Q}_r(t_0, x_0)$ (ou $Q_r(t_0, x_0)$).

Remarque 3.1.1. *Contrairement au chapitre précédent, nous allons considérer ici les boules paraboliques $Q_r(t_0, x_0)$ car nous nous intéressons au comportement de la solution quand on s'approche vers le temps t_0. Il est important de noter que tous les résultats obtenus du Chapitre 2 restent valables si nous travaillons avec ce type de boules.*

Dans ce chapitre nous aurons besoin des espaces de Morrey suivants $\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^3)$ avec $1 < p \leq q < +\infty$ qui sont définis par la condition

$$\mathcal{M}^{p,q}(\mathbb{R}^3) = \{\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{f} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3), \|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}} < +\infty\},$$

où

$$\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, r>0} \left(\frac{1}{r^{3(1-\frac{p}{q})}} \int_{B_{x_0,r}} |\vec{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ces espaces à la différence des espaces de Morrey paraboliques définis dans (2.1.6) ne fait intervenir que la variable spatiale.

3.2. Le critère de Escauriaza, Seregin et Sverak $L^\infty_t L^3_x$ pour les équations micro-polaires

Nous pouvons maintenant présenter le premier résultat de ce chapitre, qui énonce un gain d'intégrabilité en supposant une hypothèse locale $L^\infty_t L^3_x$. Étant donné que l'un des outils pour développer ce résultat est la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg, nous allons travailler avec des solutions partiellement adaptées.

3.2.1. Régularité locale des solutions partiellement adaptées

Rappelons que $\vec{u}, \vec{\omega} :]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $p :]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *solution partiellement adaptée* des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2) si sur un ensemble ouvert $\Omega \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$, nous avons $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega)$, les variables $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ satisfont les équations (3.1.1) et (3.1.2) sur Ω au sens des distributions, et pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'inégalité d'énergie locale suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \phi(t, \cdot) dy + 2 \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi dy ds \leq \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi + \Delta \phi) |\vec{u}|^2 dy ds + 2 \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi) dy ds \\ + \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \phi dy ds + \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\phi \vec{u}) dy ds. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Voici alors le premier résultat de ce chapitre.

Théorème 3.2.1 (Version locale)**.** *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ *une solution partiellement adaptée sur* $\Omega \subset]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ *des équations micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2)*. Soit* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *pour lequel il existe* $R > 0$ *tel que* $]t_0 - R^2, t_0[\times B_{x_0,R} \subset \Omega$*. Supposons* $\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - R^2, t_0[, L^3(B_{x_0,R}))$*. Alors, il existe* $r > 0$ *avec* $0 < r \leq \frac{R}{2}$ *tel que* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$*.*

Observons que, par le Théorème 2.4.1, les points (t_0, x_0) qui vérifient la condition $\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - R^2, t_0[, L^3(B_{x_0,R}))$ sont alors des points partiellement réguliers au sens de la Définition 2.4.1, *i.e.*, les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ deviennent régulières par rapport à la variable spatiale. Nous tenons à souligner à nouveau quà partir de ce théorème, nous pouvons voir à nouveau leffet dominant de la vitesse décrit dans la Définition 2.1.1, page 38.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, l'idée pour montrer ce théorème est par contradiction. Cependant, avant de passer à la démonstration, nous devons introduire quelques résultats préliminaires utiles et des propriétés importantes satisfaites par toute solution partiellement adaptée $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2) telles que $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(x_0, t_0))$.

- Tout d'abord, nous pouvons obtenir l'information suivante :

$$\vec{u} \in \mathcal{C}\left(\left[t_0 - \frac{R^2}{4}, t_0\right], L^{\frac{5}{4}}(B_{x_0, \frac{R}{2}})\right). \tag{3.2.2}$$

Pour obtenir cette information, nous appliquerons le résultat de régularité maximale local donné dans [98, Lemme 9.6, pg 177].

Lemme 3.2.1. *Soit* $1 < s < q < +\infty$*. Soit* $(\vec{v}, p)$ *une solution faible du système de Stokes,*

$$\partial\vec{v} - \Delta\vec{v} + \vec{\nabla}p = \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0,$$

telle que pour $R > 0$*,* $\vec{v} \in L^s_t L^1_x(Q_R)$*,* $p \in L^s_t L^1_x(Q_R)$ *avec une force extérieure* $\vec{f} \in L^s_t L^q_x(Q_R)$*. Alors, pour tout* $0 < r < R$*, nous avons*

$$\|\partial_t\vec{v}\|_{L^s_t L^q_x(Q_r)} + \|\Delta\vec{v}\|_{L^s_t L^q_x(Q_r)} + \|\vec{\nabla}p\|_{L^s_t L^q_x(Q_r)} \leq C(\|\vec{f}\|_{L^s_t L^q_x(Q_R)} + \|\vec{v}\|_{L^s_t L^1_t(Q_R)} + \|p\|_{L^s_t L^1_t(Q_R)}).$$

Pour plus de détails sur ces estimations nous nous référons à [85, Théorème 5.4] ou [91, Proposition 6.7].

Nous allons maintenant voir comment déduire (3.2.2) en utilisant le lemme ci-dessus. Nous devons donc vérifier que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ satisfait les hypothèses respectives. Remarquons que grâce à l'inégalité de Hölder avec $\frac{4}{5} = \frac{3}{10} + \frac{1}{2}$, et comme $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_R(t_0, x_0)) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R(t_0, x_0)) \subset L^\infty_t L^2_x(Q_R(t_0, x_0)) \cap L^2_t L^6_x(Q_R(t_0, x_0))$ par hypothèse, on obtient

$$\begin{aligned}
\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L^{\frac{5}{4}}_t L^{\frac{5}{4}}_x(Q_R)} &\leq \|\vec{u}\|_{L^{\frac{10}{3}}_t L^{\frac{10}{3}}_x(Q_R)} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2_t L^2_x} \\
&\leq \|\vec{u}\|^{\frac{3}{5}}_{L^2_t L^6_x(Q_R)} \|\vec{u}\|^{\frac{2}{5}}_{L^\infty_t L^2_x(Q_R)} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(Q_R)} < +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, comme $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R(t_0, x_0))$, $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(t_0, x_0))$ et $p \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(t_0, x_0))$ par hypothèses et $Q_R(t_0, x_0)$ est un ensemble borné, on obtient que

$\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\in L^2_tL^2_x(Q_R(t_0,x_0))\subset L^{\frac54}_tL^{\frac54}_x(Q_R(t_0,x_0))$, $\quad\vec{u}\in L^\infty_tL^3_x(Q_R(t_0,x_0))\subset L^{\frac54}_tL^1_x(Q_R(t_0,x_0))$ et $p\in L^{\frac32}_tL^{\frac32}_x(Q_R(t_0,x_0))\subset L^{\frac54}_tL^1_x(Q_R(t_0,x_0))$. Ainsi, puisque $(\vec{u},p)$ satisfait le système

$$\partial_t\vec{u}-\Delta\vec{u}+\vec{\nabla}p=(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega},\quad \operatorname{div}(\vec{u})=0,$$

nous avons alors déduit que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u},\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\in L^{\frac54}_tL^{\frac54}_x(Q_R(t_0,x_0))$ et $\vec{u},p\in L^{\frac54}_tL^1_x(Q_R(t_0,x_0))$, alors d'après le Lemme 3.2.1, nous obtenons que pour presque tout $t\in]t_0-\frac{R^2}{2},t_0[$, il existe $\vec{U}\in L^{\frac54}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\vec{u}(t,\cdot)=\displaystyle\int_{t_0-\frac{R^2}{4}}^t\partial_t\vec{u}(t,\cdot)dt+\vec{U}$. On en déduit donc que $\vec{u}\in\mathcal{C}\left(\left[t_0-\frac{R^2}{4},t_0\right],L^{\frac54}(B_{x_0,\frac{R}{2}})\right)$ (voir par exemple [98, Lemme 3.2] et [14, Corollaire 1.4.36]).

Il est intéressant de noter qu'à partir de (3.2.2), nous pouvons étudier le comportement de la solution dans l'intervalle fermé $[t_0-\frac{R^2}{4},t_0]$ même si les hypothèses initiales sont dans l'intervalle ouvert $]t_0-R^2,t_0[$.

- Maintenant observons que d'après l'hypothèse $\vec{u}\in L^\infty_tL^3_x(Q_R(t_0,x_0))$ nous avons que $\vec{u}(t,\cdot)\in L^3(B_{x_0,R})$ pour presque tout $t\in]t_0-R^2,t_0[$, cependant nous en déduirons, en utilisant (3.2.2), que pour tout $t\in[t_0-\frac{R^2}{4},t_0]$, on a $\vec{u}(t,\cdot)\in L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}})$ (et pas seulement pour presque tous les $t\in]t_0-\frac{R^2}{4},t_0[$). En effet, soit $t\in[t_0-\frac{R^2}{4},t_0]$ et $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $]t_0-\frac{R^2}{2},t_0[$ telle que $t_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}t$. Puisque $\|\vec{u}(t_k,\cdot)\|_{L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}})}\leq\|\vec{u}\|_{L^\infty_tL^3_x(Q_R)}$, en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(t_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $(\vec{u}(t_{k_j},\cdot))_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement-$*$ vers une certaine fonction $\vec{v}(t,\cdot)$ dans $L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}})$. D'autre part, par la continuité donnée dans (3.2.2), on a $\vec{u}(t_{k_j},\cdot)\xrightarrow[j\to+\infty]{}\vec{u}(t,\cdot)$ fortement dans $L^{\frac54}(B_{x_0,\frac{R}{2}})$. Par conséquent, par unicité de la limite, on a $\vec{u}(t,\cdot)=\vec{v}(t,\cdot)\in L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}})\cap L^{\frac54}(B_{x_0,\frac{R}{2}})$, et nous avons prouvé que

$$\text{pour tout}\quad t\in[t_0-\frac{R^2}{4},t_0],\quad\text{on a}\quad\vec{u}(t,\cdot)\in L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}}).\tag{3.2.3}$$

De manière similaire au point précédent, remarquons que nous sommes en mesure d'étudier le comportement de $\vec{u}$ dans l'intervalle fermé $[t_0-\frac{R^2}{4},t_0]$.

- Nous allons maintenant faire quelques remarques sur la pression. Remarquons que nous pouvons décomposer la pression p en deux parties

$$p=\mathfrak{p}+\Pi,\tag{3.2.4}$$

où $\mathfrak{p}=\frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\phi\vec{u}\otimes\vec{u}))$ avec ϕ une fonction de test positive supportée dans $B_{x_0,\rho}$ telle que $\phi=1$ dans $B_{x_0,\frac{\rho}{2}}$, pour $0<\rho\leq R$, et Π est définie par $\Pi=p-\mathfrak{p}$. Par la définition de $\mathfrak{p}$ nous avons,

$$\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty_tL^{\frac32}_x(Q_\rho)}\leq\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty(]t_0-\rho^2,t_0[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}=\left\|\frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\phi\vec{u}\otimes\vec{u}))\right\|_{L^\infty(]t_0-\rho^2,t_0[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}.$$

En utilisant le fait que les transformées de Riesz sont bornées dans $L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)$ et que l'on a $\operatorname{supp}(\phi)\subset B_{x_0,\rho}$, nous avons

$$\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty_tL^{\frac32}_x(Q_\rho)}\leq C\|\phi\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^\infty(]t_0-\rho^2,t_0[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}\leq C\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^\infty(]t_0-\rho^2,t_0[,L^{\frac32}(B_{x_0,\rho}))}.$$

Ainsi, puisque $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R)$ par hypothèse, nous avons

$$\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho)} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t L^3_x(Q_\rho(t_0,x_0))} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t L^3_x(Q_R(t_0,x_0))} < +\infty. \tag{3.2.5}$$

Puisque $\Pi = p - \mathfrak{p}$, et p satisfait l'équation (3.1.3), nous avons que pour tout $t \in]t_0 - \frac{R^2}{4}, t_0[$,

$$\Delta\Pi(t,\cdot) = \Delta p(t,\cdot) - \Delta\mathfrak{p}(t,\cdot) = -\operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})) - \Delta\frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\phi\vec{u}\otimes\vec{u}))).$$

Ainsi, puisque $\phi \equiv 1$ dans $B_{x_0,\frac{\rho}{2}}$, nous observons que pour tout $t \in]t_0 - \frac{\rho^2}{4}, t_0[$ nous avons $\Delta\Pi(t,\cdot) = 0$ sur $B_{x_0,\frac{\rho}{2}}$.

Maintenant, par les estimations des fonctions harmoniques (voir [35, Théorème 7]) nous avons pour tout $0 < \rho \leq R$ l'estimation $\|\Pi(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{x_0,\frac{\rho}{2}})} \leq C\|\Pi(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,\rho})}$. De plus, puisque $\Pi = p - \mathfrak{p}$, nous avons

$$\|\Pi(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{x_0,\frac{\rho}{2}})} \leq C\|\mathfrak{p}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,\rho})} + C\|p(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{x_0,\rho})}. \tag{3.2.6}$$

Enfin, comme $p \in L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho)$ par hypothèse et puisque $\mathfrak{p} \in L^\infty_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho) \subset L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho)$ par (3.2.5), en prenant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans l'intervalle de temps $]t_0 - \frac{\rho^2}{4}, t_0[$ dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\|\Pi\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^\infty_x(Q_{\frac{\rho}{2}})} \leq C\|\mathfrak{p}\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho)} + C\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_\rho)} < +\infty. \tag{3.2.7}$$

La décomposition (3.2.4) de la pression et les contrôles (3.2.5)-(3.2.7) seront utiles par la suite.

Ces trois points terminent les résultats préliminaires.

Démonstration du Théorème 3.2.1. Nous allons maintenant prouver que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(Q_r)$ pour certain $r > 0$ tel que $0 < r \leq \frac{R}{2}$. Pour cela, nous procédons par contradiction. Ainsi, supposons que pour tout $0 < r \leq \frac{R}{2}$, nous avons $\vec{u} \notin L^\infty(Q_r(t_0,x_0))$ *i.e.*, le point (t_0,x_0) est partiellement singulier au sens de la Définition 2.4.1, page 129. La stratégie consistera à appliquer un changement d'échelle autour du point (t_0,x_0) et à étudier le comportement de certaines fonctions limites afin d'obtenir une contradiction. Considérons donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite

$$\lambda_k = \sqrt{t_0 - t_k},$$

où $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < t_k < t_0$ et $t_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} t_0$. On remarque que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et qu'il s'agit d'une suite bornée.

Nous étendons maintenant les fonctions $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ par 0 à l'extérieur de $Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)$ et nous les désignons par $(\underline{\vec{u}}, \underline{p}, \underline{\vec{\omega}})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons maintenant $\vec{u}_k$, $\vec{\omega}_k$ et p_k les fonctions définies par la mise à l'échelle suivant

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(s,y) = \lambda_k\underline{\vec{u}}(t_k + \lambda_k^2 s, x_0 + \lambda_k y), \qquad p_k(s,y) = \lambda_k^2\underline{p}(t_k + \lambda_k^2 s, x_0 + \lambda_k y) \\ \text{et} \qquad \vec{\omega}_k = \lambda_k^2\underline{\vec{\omega}}(t_k + \lambda_k^2 s, x_0 + \lambda_k y), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

pour tout $(s,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$.

Remarque 3.2.1. *Le support des fonctions $(\vec{u}_k, p_k, \vec{\omega}_k)$ est inclus dans $Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0)$. Ainsi, dans la suite, nous considérerons k suffisamment grand pour que $(t_0 - t_k) < \frac{R^2}{4}$ et donc $1 < \frac{R}{2\lambda_k}$ (rappelons que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0). Par conséquent, les valeurs des fonctions $\vec{u}_k$, p_k et $\vec{\omega}_k$ dans $]0,1[\times B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}$ correspondent à celles de $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ dans $]t_k, t_0[\times B_{x_0,\frac{R}{2}}$.*

Il convient de noter que $(\vec{u}_k, p_k, \vec{\omega}_k)$ n'est pas une solution des systèmes de fluides micro-polaires à cause de l'absence d'invariance de changement d'échelle de l'équation (3.1.2). Néanmoins le triplet $(\vec{u}_k, p_k, \vec{\omega}_k)$ satisfait l'équation

$$\partial_t \vec{u}_k = \Delta \vec{u}_k - (\vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}_k)\vec{u}_k - \vec{\nabla} p_k + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k, \tag{3.2.9}$$

dans $]0,1[\times B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}$, qui peut être considérée comme les équations équations de Navier-Stokes classiques avec une force extérieure $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k$. Nous voulons maintenant prouver les convergences suivantes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0, \quad p_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} p_\infty \quad \text{et} \quad \vec{u}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \vec{u}_\infty,$$

dans un sens qui nous allons préciser plus tard, afin de déduire que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ est une solution des équations de Navier-Stokes dans $]0,1[\times\mathbb{R}^3$,

$$\partial_t \vec{u}_\infty = \Delta \vec{u}_\infty - \mathrm{div}(\vec{u}_\infty \otimes \vec{u}_\infty) - \vec{\nabla} p_\infty,$$

puis une étude détaillée des propriétés de la solution $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ nous conduira à la contradiction souhaitée.

- Tout d'abord, nous étudions la convergence de la suite $(\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le domaine $]0,1[\times\mathbb{R}^3$. D'après la définition de $\vec{\omega}_k$ donnée dans (3.2.8), puisque $\mathrm{supp}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k) \subset Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0) =]1 - \frac{R^2}{4\lambda_k^2}, 1[\times B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}$ et $1 - \frac{R^2}{4\lambda_k^2} < 0$ par la Remarque 3.2.1, et comme $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x$ nous avons

$$\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k\|^2_{L^2(]0,1[,L^2(\mathbb{R}^3))} = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k|^2 dyds = \int_0^1 \int_{B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}} |\lambda_k^3 (\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{\omega}})(t_k + \lambda_k^2 s, x_0 + \lambda_k y)|^2 dyds.$$

  Maintenant, par un changement de variable et puisque $t_0 - \frac{R^2}{4} < t_k$ par la Remarque 3.2.1, nous pouvons écrire

$$\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k\|^2_{L^2(]0,1[,L^2(\mathbb{R}^3))} = \lambda_k \int_{t_k}^{t_0} \int_{B_{x_0,\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{\omega}}|^2 dyds \leq \lambda_k \int_{t_0 - \frac{R^2}{4}}^{t_0} \int_{B_{x_0,\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{\omega}}|^2 dyds.$$

  En utilisant le fait que $\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{\omega}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$ par construction, nous obtenons

$$\|\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k\|^2_{L^2(]0,1[,L^2(\mathbb{R}^3))} \leq \lambda_k \int_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)} |\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}|^2 dyds \leq \lambda_k \int_{Q_R(t_0,x_0)} |\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}|^2 dyds. \tag{3.2.10}$$

  Puisque $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R)$ par hypothèse, et que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro lorsque $k \to +\infty$, nous avons

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(]0,1[, L^2(\mathbb{R}^3)).$$

- Nous allons maintenant étudier la convergence de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Rappelons que pour tout $k\in\mathbb{N}$, nous avons $p_k(s,y)=\lambda_k^2\underline{p}(t_k+\lambda_k^2 s, x_0+\lambda_k y)$, où $\underline{p}=p|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$. Puisque nous pouvons écrire la pression $p=\mathfrak{p}+\Pi$ par (3.2.4), nous avons pour tout $k\in\mathbb{N}$, $p_k=\mathfrak{p}_{\,k}+\Pi_{\,k}$, où

$$\mathfrak{p}_{\,k}(s,y)=\lambda_k^2\underline{\mathfrak{p}}(t_k+\lambda_k^2 s, x_0+\lambda_k y), \qquad \Pi_{\,k}(s,y)=\lambda_k^2\underline{\Pi}(t_k+\lambda_k^2 s, x_0+\lambda_k y),$$

avec $\underline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$ et $\underline{\Pi}=\Pi|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$. Ainsi, par homogénéité, on a

$$\|\mathfrak{p}_k\|_{L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}=\|\lambda_k^2\underline{\mathfrak{p}}(t_k+\lambda_k^2\cdot,x_0+\lambda_k\cdot)\|_{L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}=\|\underline{\mathfrak{p}}\|_{L^\infty(]t_k,t_0[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))}.$$

Comme nous avons $]t_k,t_0[\subset]t_0-\frac{R^2}{4},t_0[$ par la Remarque 3.2.1, on obtient

$$\|\mathfrak{p}_k\|_{L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\leq\|\underline{\mathfrak{p}}\|_{L^\infty(]t_0-\frac{R^2}{4},t_0[,L^{\frac32}(B_{x_0,\frac{R}{2}}))}=\|\underline{\mathfrak{p}}\|_{L^\infty_t L^{\frac32}_x(Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0))}.$$

En utilisant le fait que $\underline{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$ et $\mathfrak{p}\in L^\infty_t L^{\frac32}_x(Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0))$ par (3.2.5), nous obtenons la borne uniforme suivante

$$\|\mathfrak{p}_k\|_{L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)}\leq\|\mathfrak{p}\|_{L^\infty_t L^{\frac32}_x(Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0))}\leq C<+\infty. \tag{3.2.11}$$

Par conséquent, par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(\mathfrak{p}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ et $p_\infty\in L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3))$ telle que

$$\mathfrak{p}_{k_j}\xrightarrow[j\to+\infty]{*}p_\infty \quad \text{dans} \quad L^\infty(]0,1[,L^{\frac32}(\mathbb{R}^3)). \tag{3.2.12}$$

Étudions maintenant la suite $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Puisque $\mathrm{supp}(\Pi_k)\subset Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0)$, nous avons

$$\|\Pi_k\|_{L^{\frac32}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}=\|\lambda_k^2\underline{\Pi}(t_k+\lambda_k^2\cdot,x_0+\lambda_k\cdot)\|_{L^{\frac32}(]0,1[,L^\infty(B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}))},$$

et par l'homogénéité de l'espace $L^{\frac32}_t L^\infty_x$, on a

$$\|\Pi_k\|_{L^{\frac32}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}=\lambda_k^{\frac23}\|\underline{\Pi}\|_{L^{\frac32}(]t_k,t_0[,L^\infty(B_{x_0,\frac{R}{2}}))}\leq\lambda_k^{\frac23}\|\underline{\Pi}\|_{L^{\frac32}(]t_0-\frac{R^2}{4},t_0[,L^\infty(B_{x_0,\frac{R}{2}}))}.$$

Maintenant, comme $\underline{\Pi}=\Pi|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$ et $\Pi\in L^{\frac32}_t L^\infty_x(Q_{\frac{R}{2}})$ par (3.2.7), on obtient

$$\|\Pi_k\|_{L^{\frac32}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}\leq C\lambda_k^{\frac23}\|\Pi\|_{L^{\frac32}_t L^\infty_x(Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0))}\leq C\lambda_k^{\frac23}. \tag{3.2.13}$$

Comme $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro lorsque $k\to+\infty$ nous pouvons déduire que $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro fortement dans $L^{\frac32}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))$.

Nous avons prouvé jusqu'à présent que $(\mathfrak{p}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers p_∞ par (3.2.12) et que $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. Maintenant, puisque $p_k=\mathfrak{p}_k+\Pi_k$, nous pouvons obtenir, à une sous-suite près, la convergence faible de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers p_∞ dans $L^\infty_t L^3_x$. Cependant, nous devons étudier plus en détail la convergence de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, prouvons que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans

$(L^{\frac{3}{2}}(]0,1[,L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)))_{loc}$. Pour démontrer cette affirmation, nous utiliserons à nouveau la décomposition $p_k = \mathfrak{p}_k + \Pi_k$ et les estimations précédentes obtenues sur $\mathfrak{p}_k$ et Π_k. Ainsi, pour tout ensemble compact $\mathfrak{Q} = [a,b] \times B_{0,1} \subset \mathbb{R}^3$, puisque $p_k = \mathfrak{p}_k + \Pi_k$, nous avons

$$\int_{\mathfrak{Q}} |p_k|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C \int_0^1 \int_B |\mathfrak{p}_k|^{\frac{3}{2}} dyds + C \int_0^1 \int_B |\Pi_k|^{\frac{3}{2}} dyds.$$

Puisque $\text{supp}(p_k) \subset Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0)$ et $\lambda_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, nous pouvons considérer k suffisamment grand pour que $\mathfrak{Q} \subset Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0)$. Maintenant, en utilisant le fait que $(\mathfrak{p}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^\infty(]0,1[,L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.11), nous avons

$$\int_0^1 \int_B |\mathfrak{p}_k|^{\frac{3}{2}} dyds = \int_0^1 \|\mathfrak{p}_k(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(B)} ds \leq C \|\mathfrak{p}_k\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty(]0,1[,L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))} \leq C.$$

De plus, puisque $\|\Pi_k\|_{L^{\frac{3}{2}}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\lambda_k^{\frac{2}{3}}$ par (3.2.13), nous obtenons

$$\int_0^1 \int_B |\Pi_k|^{\frac{3}{2}} dyds \leq |B| \int_0^1 \|\Pi_k(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty(B)} ds \leq C \|\Pi_k\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(]0,1[,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\lambda_k^{\frac{2}{3}} < C,$$

où nous avons utilisé le fait que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Ensuite, à partir des deux estimations précédentes, nous obtenons

$$\int_{\mathfrak{Q}} |p_k|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C. \tag{3.2.14}$$

Ainsi, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $(L^{\frac{3}{2}}(]0,1[,L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)))_{loc}$ et par le théorème de Banach-Alaoglu et l'unicité de la limite, il existe une sous-suite $(p_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$p_{k_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{*} p_\infty \quad \text{in} \quad (L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x)_{loc}. \tag{3.2.15}$$

Remarquons que nous avons obtenu un raffinement de la convergence faible de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^\infty_t L^{\frac{3}{2}}_x$.

- Étudions maintenant la convergence de $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Tout d'abord, observons que $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3))$. En effet en utilisant la définition de $\vec{u}_k$ donnée dans (3.2.8), par homogénéité et puisque $t - \frac{R^2}{4} < t_k$ par la Remarque 3.2.1, nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{u}_k\|_{L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3))} &= \|\lambda_k \underline{\vec{u}}(t_k + \lambda_k^2 \cdot, x_0 + \lambda_k \cdot)\|_{L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3))} \\ &= \|\underline{\vec{u}}\|_{L^\infty(]t_k,t_0[,L^3(\mathbb{R}^3))} \leq \|\underline{\vec{u}}\|_{L^\infty(]t_0-\frac{R^2}{4},t_0[,L^3(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$

Alors, comme $\underline{\vec{u}} = \vec{u}|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$ et $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R)$ par hypothèse, nous avons

$$\|\vec{u}_k\|_{L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3))} \leq \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^3_x(Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0))} < +\infty, \tag{3.2.16}$$

alors par le Théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\vec{u}_{k_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{*} \vec{u}_\infty \in L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3)). \tag{3.2.17}$$

Néanmoins, cette convergence n'est pas suffisante pour conclure que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ satisfait les équations de Navier-Stokes (3.2.25) et donc nous devons utiliser l'inégalité d'énergie locale afin d'obtenir des convergences plus fortes. À cette fin, nous fixons $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]0,1[\times\mathbb{R}^3)$ de telle sorte que $\text{supp}(\varphi) \subset]a,b[\times B$ avec $0 < a < b < 1$ et B un ensemble borné de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous définissons $\varphi_k(\cdot,\cdot) = \varphi(\frac{\cdot - t_k}{\lambda_k^2}, \frac{\cdot - x_0}{\lambda_k})$. Observons que les fonctions étendues $(\underline{\vec{u}}, \underline{\mathfrak{p}}, \underline{\vec{\omega}})$ satisfont l'inégalité locale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\underline{\vec{u}}|^2\varphi_k(t,y)dy + 2\int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\otimes\underline{\vec{u}}|^2\varphi_k dyds &\leq \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\varphi_k + \Delta\varphi_k)|\underline{\vec{u}}|^2 dyds\\ +2\int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3} \underline{p}(\underline{\vec{u}}\cdot\vec{\nabla}\varphi_k)dyds + \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3}|\underline{\vec{u}}|^2(\underline{\vec{u}}\cdot\vec{\nabla})\varphi_k dyds &+ \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{\omega}})\cdot(\varphi_k\underline{\vec{u}})dyds.\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $\tau = \frac{s-t_k}{\lambda_k^2}$, $y = \frac{y-x_0}{\lambda_k}$ et puisque $\text{supp}(\varphi) \subset]a,b[\times B$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_k|^2\varphi(\tau,y)dy \quad + \quad 2\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_k|^2\varphi dyd\tau &\leq \underbrace{\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\varphi+\Delta\varphi)|\vec{u}_k|^2dyd\tau}_{(I)}\\ &+ \quad \underbrace{2\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}p_k(\vec{u}_k\cdot\vec{\nabla}\varphi)dyd\tau}_{(II)} + \underbrace{\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_k|^2(\vec{u}_k\cdot\vec{\nabla})\varphi dyd\tau}_{(III)}\\ &+ \quad \underbrace{\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k)\cdot(\varphi\vec{u}_k)dyd\tau}_{(IV)}. \qquad (3.2.18)\end{aligned}$$

Comme $\text{supp}(\vec{u}_k) \subset Q_{\frac{R}{2\lambda_k}}(1,0) =]1-\frac{R^2}{4\lambda_k^2}, 1[\times B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}$, nous considérons k suffisamment grand pour que $B \subset B_{0,\frac{R}{2\lambda_k}}$ (rappelons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro). Notre but est maintenant d'obtenir des estimations uniformes de $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pour lesquelles nous contrôlerons chaque terme du côté droit de (3.2.18).

* Pour (I) grâce à l'inégalité de Hölder avec $(1 = \frac{1}{3}+\frac{2}{3})$, comme $\text{supp}(\varphi) \subset]a,b[\times B \subset]0,1[\times B$ et $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\varphi+\Delta\varphi)|\vec{u}_k|^2dyd\tau &\leq \int_0^1\|\partial_t\varphi+\Delta\varphi\|_{L^3(B)}\|\vec{u}_k(\tau,\cdot)\|^2_{L^3(B)}d\tau\\ &\leq C\|\vec{u}_k\|^2_{L^\infty_t L^3_x} \leq C. \qquad (3.2.19)\end{aligned}$$

* Pour le terme (II) dans (3.2.18), grâce à l'inégalité de Hölder $(1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\infty})$, nous avons

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}p_k(\vec{u}_k\cdot\vec{\nabla}\varphi)dyd\tau \leq \int_a^b\|p_k(\tau,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B)}\|\vec{u}_k(\tau,\cdot)\|_{L^3(B)}\|\vec{\nabla}\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(B)}d\tau.$$

  Alors, grâce à l'inégalité de Hölder dans la variable temps $(1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{3})$, et puisque $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.16) et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $(L^{\frac{3}{2}}(]0,1[, L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)))_{loc}$ par (3.2.14), on a

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}p_k(\vec{u}_k\cdot\vec{\nabla}\varphi)dyd\tau \leq C\|p_k\|_{L_t^{\frac{3}{2}}L_x^{\frac{3}{2}}(]a,b[\times B)}\|\vec{u}_k\|_{L^\infty_tL^3_x}\|\vec{\nabla}\varphi\|_{L^3_tL^\infty_x} \leq C. \qquad (3.2.20)$$

* Le terme (III) dans (3.2.18) découle immédiatement du fait que $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$, en effet nous avons

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_k|^2(\vec{u}_k\cdot\vec{\nabla})\varphi dyd\tau \leq \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_k|^3|\vec{\nabla}\varphi|dyd\tau \leq C\|\vec{\nabla}\varphi\|_{L^\infty_{t,x}}\|\vec{u}_k\|^3_{L^\infty_tL^3_x} \leq C. \qquad (3.2.21)$$

* Pour le dernier terme (IV) de (3.2.18), par l'inégalité de Hölder ($1=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$) nous avons

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k)\cdot(\varphi\vec{u}_k)dyd\tau\leq C\int_0^1\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k(\tau,\cdot)\|_{L^2(B)}\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^6(B)}\|\vec{u}_k(\tau,\cdot)\|_{L^3(B)}d\tau,$$

maintenant, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la variable temps, nous obtenons

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k)\cdot(\varphi\vec{u}_k)dyd\tau\leq C\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k\|_{L^2_{t,x}}\|\varphi\|_{L^2_tL^6_x}\|\vec{u}_k\|_{L^\infty_tL^3_x}.$$

Comme, $\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k\|_{L^2_tL^2_x}\leq\lambda_k\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_tL^2_x}$ par (3.2.10) et $\|\vec{u}_k\|_{L^\infty_tL^3_x}\leq C$ par (3.2.16), on a

$$\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k)\cdot(\varphi\vec{u}_k)dyd\tau\leq C\lambda_k^{\frac{1}{2}}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\|_{L^2_{t,x}}\leq C, \tag{3.2.22}$$

où nous avons utilisé le fait que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

Ainsi, à partir des estimations (3.2.19)-(3.2.22), nous déduisons qu'il existe une constante $C>0$ (indépendante de k) telle que le côté gauche de (3.2.18) satisfait $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_k|^2\varphi dy+\int_a^b\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_k|^2\varphi dyd\tau\leq C$. Par conséquent, nous obtenons que pour toute fonction de test $\varphi\in\mathcal{D}(]0,1[\times\mathbb{R}^3)$, la suite

$$(\varphi\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}\quad\text{reste uniformément bornée dans}\quad L^\infty_tL^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x. \tag{3.2.23}$$

De plus, puisque $(\vec{u}_k,p_k)$ satisfait les équations de Navier-Stokes (3.2.9), il est possible d'obtenir que $(\varphi\partial_t\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reste uniformément borné dans $L^{\frac{3}{2}}_tH^{-\frac{3}{2}}_x$, (voir par exemple l'étape 3 de la preuve du Théorème 14.1 du livre [61]). Donc, par le théorème de Rellich-Lions (voir [61, Théorème 12.1]), on peut trouver une sous-suite $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que dans le domaine $]0,1[\times\mathbb{R}^3$ on a d'une part que $\vec{u}_{k_j}$ converge faiblement-$*$ vers $\vec{u}_\infty$ dans $(L^\infty_tL^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x)_{loc}$ et d'autre part que $\vec{u}_{k_j}$ converge fortement vers $\vec{u}_\infty$ dans $(L^2_tL^2_x)_{loc}$.

De plus, on peut déduire que l'on a

$$\vec{u}_{k_j}\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow}\vec{u}_\infty\quad\text{dans}\quad(L^3_tL^3_x)_{loc}, \tag{3.2.24}$$

En effet, puisque $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $(L^\infty_tL^2_x\cap L^2_tL^6_x)_{loc}$ par (3.2.23) et dans $L^\infty_tL^3_x$ par (3.2.16), en utilisant un argument d'interpolation, nous obtenons $\|\vec{u}_{k_j}\|_{L^4_tL^4_x}\leq\|\vec{u}_{k_j}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2_tL^6_x}\|\vec{u}_{k_j}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_tL^3_x}\leq C<+\infty$. Ainsi, $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $(L^4_tL^4_x)_{loc}$. Ce fait, ainsi que la convergence forte dans $(L^2_tL^2_x)_{loc}$, qui est donnée par le théorème de Rellich-Lions, implique la convergence forte dans $(L^3_tL^3_x)_{loc}$.

Nous avons terminé l'étude de la suite $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

En résumé, nous avons obtenu, à une sous-suite près, que le triplet $(\vec{u}_k,p_k,\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k)$ converge vers $(\vec{u}_\infty,p_\infty,0)$ dans un certain sens (fort ou faible), et nous pouvons alors déduire que $(\vec{u}_\infty,p_\infty)$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes en $]0,1[\times\mathbb{R}^3$,

$$\partial_t\vec{u}_\infty=\Delta\vec{u}_\infty-\operatorname{div}(\vec{u}_\infty\otimes\vec{u}_\infty)-\vec{\nabla}p_\infty. \tag{3.2.25}$$

De plus, à partir de la convergence faible de $(p_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ donnée dans (3.2.15) et de la convergence forte de $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ dans $(L^3_t L^3_x)_{loc}$ donnée dans (3.2.24), il est possible de déduire que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ est une solution adaptée des équations de Navier-Stokes en $]0,1[\times\mathbb{R}^3$, au sens de la Définition 2.1.3, page 39. Ce fait peut être vu avec tous les détails dans l'étape 4 de la preuve du Théorème 14.1 du livre [61].

Nous exploiterons cette propriété par la suite, mais nous avons besoin d'autres propriétés sur $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ afin d'obtenir la contradiction finale. En effet, nous montrerons que d'une part, cette solution est une solution non triviale des équations de Navier-Stokes, et d'autre part, en utilisant la théorie de l'unicité de la équations de la chaleur développée dans [34], [61] ou [91], nous déduirons que cette solution doit être identiquement nulle, ce qui nous conduira à la contradiction souhaitée.

Prouvons maintenant que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ est une solution non triviale. Pour cela nous allons étudier de manière plus fine la limite qui nous a conduit à $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$. Soit $0 < \mathfrak{a} \ll \frac{1}{2}$ un petit paramètre qui sera fixé plus tard. Puisque $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptées avec (t_0, x_0) un point partiellement singulier, on peut considérer k suffisamment grand pour que $0 < \mathfrak{a}\lambda_k \leq \frac{R}{4}$ et on peut utiliser la caractérisation des points singuliers donnée dans la Proposition 2.4.4 page 130 (qui est valable pour tout rayon $0 < \mathfrak{a}\lambda_k < 1$) pour obtenir l'existence d'un petit paramètre $\epsilon > 0$, donné par le Théorème 2.3.2, page 106, tel que

$$0 < \epsilon < \frac{1}{(\mathfrak{a}\lambda_k)^2} \int_{Q_{\mathfrak{a}\lambda_k}(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds,$$

Maintenant, observons que par un changement d'échelle, nous avons

$$\epsilon < \frac{1}{(\mathfrak{a}\lambda_k)^2} \int_{Q_{\mathfrak{a}\lambda_k}(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds = \frac{1}{\mathfrak{a}^2} \int_{1-\mathfrak{a}^2}^{1} \int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 + |p_k|^{\frac{3}{2}} dyds. \tag{3.2.26}$$

Pour étudier plus en détail l'expression précédente, nous devons obtenir quelques estimations sur la pression $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Puisque $(\vec{u}_k, p_k)$ est une solution du système (3.2.9) qui peut être considéré comme les équations de Navier-Stokes avec une force externe $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}_k$, la pression satisfait $-\Delta p_k = \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}_k \otimes \vec{u}_k))$. Par conséquent, en suivant les mêmes arguments que dans (3.2.4), nous pouvons décomposer la pression $p_k = \widetilde{\mathfrak{p}}_k + \widetilde{\Pi}_k$ où $\widetilde{\mathfrak{p}}_k = \frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\phi\vec{u}_k \otimes \vec{u}_k))$ avec ϕ une fonction de test positive supportée dans $B_{0,2\mathfrak{a}}$ telle que $\phi = 1$ dans $B_{0,\mathfrak{a}}$, et $\widetilde{\Pi}_k$ est une fonction harmonique définie par $\widetilde{\Pi}_k = p_k - \widetilde{\mathfrak{p}}_k$. Maintenant, en utilisant le fait que les transformées de Riesz sont bornées dans $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathfrak{p}}_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}_x(B_{0,2\mathfrak{a}})} &\leq \|\widetilde{\mathfrak{p}}_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \left\| \frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\phi\vec{u}_k \otimes \vec{u}_k))(t,\cdot) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|\phi(\vec{u}_k \otimes \vec{u}_k)(t,\cdot)\|^2_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

De plus, puisque $\operatorname{supp}(\phi) \subset B_{0,2\mathfrak{a}}$, nous avons

$$\|\widetilde{\mathfrak{p}}_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}_x(B_{0,2\mathfrak{a}})} \leq C\|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}_k(t,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})} \leq C\|\vec{u}_k(t,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})}. \tag{3.2.27}$$

Comme $\widetilde{\Pi}_k$ est une fonction harmonique, par les mêmes arguments que dans (3.2.6), *i.e.*, les estimations locales pour les fonctions harmoniques, nous obtenons

$$\|\widetilde{\Pi}_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{0,\mathfrak{a}})} \leq C\|\widetilde{\Pi}_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})} \leq C\|\widetilde{\mathfrak{p}}_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})} + C\|p_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})},$$

et en utilisant l'estimation (3.2.27), nous avons

$$\|\widetilde{\Pi}_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(B_{0,\mathfrak{a}})} \leq C\|\vec{u}_k(t,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})} + C\|p_k(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})}. \tag{3.2.28}$$

En revenant à (3.2.26), en utilisant que $p_k = \widetilde{\mathfrak{p}}_k + \widetilde{\Pi}_k$, nous avons

$$\begin{aligned}\epsilon &< \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 + |p_k|^{\frac{3}{2}} dyds \leq \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 + C|\widetilde{\mathfrak{p}}_k|^{\frac{3}{2}} + C|\widetilde{\Pi}_k|^{\frac{3}{2}} dyds\\ &< \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 dyds + \frac{C}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\widetilde{\mathfrak{p}}_k|^{\frac{3}{2}} dyds + \frac{C}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\widetilde{\Pi}_k|^{\frac{3}{2}} dyds.\end{aligned} \tag{3.2.29}$$

Étudions chaque terme de l'expression ci-dessus. Pour le premier, il est facile de voir que l'on a

$$\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 dyds \leq \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-(2\mathfrak{a})^2}^1\int_{B_{0,2\mathfrak{a}}} |\vec{u}_k|^3 dyds = \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\|\vec{u}_k\|^3_{L^3_t L^3_x(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))}. \tag{3.2.30}$$

Pour le deuxième terme de (3.2.29), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\widetilde{\mathfrak{p}}_k|^{\frac{3}{2}} dyds &\leq \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-(2\mathfrak{a})^2}^1 \|\widetilde{\mathfrak{p}}_k(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})} ds \leq \frac{C}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-(2\mathfrak{a})^2}^1 \|\vec{u}_k(s,\cdot)\|^3_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})} ds\\ &\leq \frac{C}{\mathfrak{a}^2}\|\vec{u}_k\|^3_{L^3_t L^3_x(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))}.\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Pour le troisième terme de (3.2.29), comme $\|\widetilde{\Pi}_k(s,\cdot)\|_{L^\infty(B_{0,a})} \leq C\|\vec{u}_k(s,\cdot)\|^2_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})} + C\|p_k(s,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})}$ par (3.2.28), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\widetilde{\Pi}_k|^{\frac{3}{2}} dyds &\leq C\mathfrak{a}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1 \|\widetilde{\Pi}_k(t,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty(B_{0,\mathfrak{a}})} ds\\ &\leq C\mathfrak{a}\left(\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1 \|\vec{u}_k(s,\cdot)\|^3_{L^3(B_{0,2\mathfrak{a}})} + \int_{1-\mathfrak{a}^2}^1 \|p_k(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2\mathfrak{a}})} ds\right)\\ &\leq C\mathfrak{a}\left(\|\vec{u}_k\|^3_{L^\infty_t L^3_x} + \|p_k\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $(\vec{u}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.16) et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est uniformément borné dans $(L^{\frac{3}{2}}(]0,1[, L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)))_{loc}$ par (3.2.14), nous obtenons que

$$\frac{1}{\mathfrak{a}^2}\int_{1-\mathfrak{a}^2}^1\int_{B_{0,\mathfrak{a}}} |\widetilde{\Pi}_k|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C\mathfrak{a}. \tag{3.2.32}$$

Ensuite, en regroupant toutes les estimations (3.2.30)-(3.2.32) dans (3.2.29), nous obtenons

$$\epsilon < \frac{C}{\mathfrak{a}^2}\|\vec{u}_k\|^3_{L^3_t L^3_x(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))} + C\mathfrak{a},$$

que nous réécrivons de la manière suivante $\mathfrak{a}^2\epsilon - C_*\mathfrak{a}^3 < C\|\vec{u}_k\|^3_{L^3_t L^3_x(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))}$. En considérant $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} < \frac{\epsilon}{C_*}$, nous pouvons trouver une constante $\epsilon_* > 0$, $0 < \epsilon_* < \mathfrak{a}^2\epsilon - C_*\mathfrak{a}^3$ telle que

$$0 < \epsilon_* < C\|\vec{u}_k\|^3_{L^3_{t,x}(Q_{2\mathfrak{a}}(1,0))}.$$

Ainsi, à partir de la convergence forte dans $(L^3_{t,x})_{loc}$ de $(\vec{u}_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ donnée dans (3.2.24), nous obtenons

$$0 < \epsilon_* < \int_{Q_{2\mathfrak{a}}} |\vec{u}_\infty|^3 dyds. \tag{3.2.33}$$

Nous avons ainsi prouvé que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ est une solution non triviale des équations de Navier-Stokes.

Nous allons maintenant démontrer une contradiction en montrant que $\vec{u}_\infty \equiv 0$. Pour cela, nous rappelons que la solution limite $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ satisfait les équations de Navier-Stokes (3.2.25) et que nous pouvons donc considérer les théories d'unicité rétrograde développées dans l'article [34], qui peuvent être résumées dans la proposition suivante :

Proposition 3.2.1 (Unicité rétrograde)**.** *Soit $(\vec{v}, h)$ une solution des équations de Navier-Stokes sur $]0,1[\times\mathbb{R}^3$, i.e. nous avons*

$$\partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}h, \quad \mathrm{div}(\vec{v}) = 0.$$

Supposons en outre que $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(]0,1[\times\mathbb{R}^3)$, le couple $(\vec{v}, h)$ satisfait l'inégalité d'énergie locale suivante

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}|^2\phi(t,\cdot)dy + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2\phi dyds \leq & \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_t\phi + \Delta\phi)|\vec{v}|^2 dyds \\ & + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} h(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds + \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{v}|^2(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds.\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Si $\vec{v} \in L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{v}(1,\cdot) = 0$, alors $\vec{v} = 0$ sur $]0,1]\times\mathbb{R}^3$.

Pour une preuve de cette proposition, nous renvoyons au livre [61, Théorème 15.4] dont la démonstration est basée de l'article [34].

Vérifions maintenant que le couple $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ satisfait les hypothèses de la proposition précédente. Tout d'abord, remarquons que $(\vec{u}_\infty, p_\infty)$ satisfait l'inégalité d'énergie locale (3.2.34) puisqu'il s'agit d'une solution adaptée des équations de Navier-Stokes (3.2.25). De plus, nous avons également que $\vec{u} \in L^\infty(]0,1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.17), il suffit donc de prouver que $\vec{u}_\infty(1,\cdot) = 0$. Pour ce faire, remarquons que pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons $\vec{u}_{k_j} \in L^\infty(]0,1[, L^2(\mathbb{R}^3)) \subset L^1(]0,1[, H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ et comme $L^2(\mathbb{R}^3) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et que nous avons $\partial_t\vec{u}_{k_j} \in L^{\frac{3}{2}}(]0,1[, H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)) \subset L^1(]0,1[, H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$. Par conséquent, en suivant les mêmes lignes qui nous ont conduit à déduire (3.2.2), (voir aussi [61, pag 402]), nous pouvons obtenir que

$$\vec{u}_{k_j} \in \mathcal{C}([0,1], H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)).$$

Ainsi, si l'on considère $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\phi = 1$ sur $]-\infty, \frac{3}{2}[$ et $\phi = 0$ sur $]2, +\infty[$, en écrivant pour tout $t \in [0,1]$,

$$\vec{u}_{k_j}(t,\cdot) = -\int_t^2 \partial_t(\phi\vec{u}_{k_j})ds,$$

on obtient que $\vec{u}_\infty(t,\cdot)$ est la limite faible-$*$ de $\vec{u}_{k_j}(t,\cdot)$ dans $H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Il s'ensuit que pour tout $t \in [0,1]$, $\vec{u}_\infty(t,\cdot)$ est bien défini dans un sens distributionnel. En particulier, $\vec{u}_\infty(1,\cdot)$ est la limite faible de $\vec{u}_{k_j}(1,\cdot)$ dans $H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. De plus, pour tout $\mathfrak{r} > 0$, puisque $\vec{u}_k(1,\cdot) = \lambda_k\vec{\underline{u}}(t_0, x_0 + \lambda_k\cdot)$ et par le changement de variable $z = x_0 + \lambda_{k_j}y$, nous avons

$$\int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\vec{u}_{k_j}(1,y)|^3 dy = \int_{B_{0,\mathfrak{r}}} \lambda^3_{k_j}|\vec{\underline{u}}(t_0, x_0 + \lambda_{k_j}y)|^3 dy = \int_{B_{x_0,\lambda_{k_j}\mathfrak{r}}} |\vec{\underline{u}}(t_0, z)|^3 dz.$$

Remarquons que $\vec{u}(t_0,\cdot)\in L^3(B_{x_0,\frac{R}{2}})$ par (3.2.3) et puisque $\underline{\vec{u}}=\vec{u}|_{Q_{\frac{R}{2}}(t_0,x_0)}$, nous avons que $\underline{\vec{u}}(t_0,\cdot)\in L^3(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, comme $\lambda_{k_j}=\sqrt{t_0-t_{k_j}}\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0$, la fonction $\mathbb{1}_{B_{x_0,\lambda_{k_j}\mathfrak{r}}}$ converge ponctuellement vers 0 lorsque $j\to+\infty$. Par conséquent, en vertu du théorème de convergence dominée, on a

$$\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|\vec{u}_{k_j}(1,y)|^3dy=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{B_{x_0,\lambda_{k_j}\mathfrak{r}}}(z)|\underline{\vec{u}}(t_0,z)|^3dz\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Par conséquent, la suite $(\vec{u}_{k_j}(1,\cdot))_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement-$*$ vers 0 dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et par l'unicité de la limite, nous obtenons que $\vec{u}_\infty(1,\cdot)=0$.

Nous disposons maintenant de toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer la Proposition 3.2.1 (*i.e.*, $(\vec{u}_\infty,p_\infty)$ est une solution adaptée, $\vec{u}_\infty\in L^\infty(]0,1[,L^3(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.17) et $\vec{u}_\infty(1,\cdot)=0$) nous obtenons donc que $\vec{u}_\infty=0$ sur $]0,1]\times\mathbb{R}^3$, et alors

$$\int_{Q_{2\mathfrak{a}}}|\vec{u}_\infty|dyds=0,$$

ce qui est une contradiction avec (3.2.33). Nous pouvons conclure que $\vec{u}$ est en fait borné dans $Q_r(t_0,x_0)$ pour tout $0<r\leq\frac{R}{2}$. Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.1. ■

3.2.2. Une caractérisation des points partiellement singuliers

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 (Version globale)**.** *Soit $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ une solution faible sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ du système micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2) *avec $\vec{u},\vec{\omega}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x$ tels que pour $0<\delta<T<+\infty$ nous avons $\vec{u}\in L^\infty(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))$. Alors la vitesse $\vec{u}\in\mathcal{C}(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))$ si et seulement si chaque point $(t_0,x_0)\in]\delta,T[\times\mathbb{R}^3$ est un point partiellement régulier.*

La principale différence entre ce résultat et le Théorème 3.2.2, réside dans le fait que nous ne requérons plus ici la condition de solution partiellement adaptée. En effet, comme nous le verrons plus loin, l'hypothèse $\vec{u}\in L^\infty(]0,T[,L^3(\mathbb{R}^3))$ est suffisamment forte pour assurer une estimation globale intéressante. Notons que dans ce théorème, nous obtenons, à partir d'une seule hypothèse sur $\vec{u}$, le caractère borné du champ de vitesse $\vec{u}$ et ceci implique la régularité de $(\vec{u},\vec{\omega})$.

Démonstration du Théorème 3.2.2. Soit $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ une solution faible de type Leray des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2) telle que $\vec{u},\vec{\omega}\in L^\infty(]0,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]0,+\infty[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et nous supposons que pour $0<\delta<T<+\infty$, nous avons $\vec{u}\in L^\infty(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))$. Notre but consiste à prouver que, sous les hypothèses précédentes, la condition $\vec{u}\in\mathcal{C}(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))$ est équivalente au fait que tout point $(t_0,x_0)\in]\delta,T[$ est partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1.

Pour ce faire, nous allons d'abord établir quelques propriétés de la solution faible $(\vec{u},p,\vec{\omega})$.

- Prouvons d'abord que $\vec{u}(t,\cdot)\in L^3(\mathbb{R}^3)$ pour tout $t\in[\delta,T]$. Observons que contrairement à la preuve du Théorème 3.2.1, nous pouvons utiliser ici les propriétés des solutions faibles des équations de Navier-Stokes. En effet, puisque $(\vec{u},p)$ est une solution faible de l'équation (3.1.1) qui peut être vue comme les équations de Navier-Stokes avec une force extérieure $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\in L^2_{t,x}$, il est possible de déduire que $\vec{u}$ est $L^2(\mathbb{R}^3)$ faiblement continue en temps *i.e.,* pour tout $t\in[\delta,T]$ l'application

$$t\longmapsto\int_{\mathbb{R}^3}\vec{u}(t,x)\vec{\varphi}(x)dx,\tag{3.2.35}$$

est continue pour tout $\vec{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Voir par exemple le Théorème 3.8 dans le livre [85] ou le Lemme 3.4 dans [98] pour une preuve de ce fait en plus de détails. Maintenant, fixons $t \in [\delta, T]$ et considérons une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $]\delta, T[$ telle que $t_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} t$. Puisque $\|\vec{u}(t_k,\cdot)\|_{L^3} \leq \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^3_x}$, en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(\vec{u}(t_{k_j},\cdot))_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\vec{u}(t_{k_j},\cdot) \longrightarrow \vec{v}(t,\cdot)$ faiblement-$*$ dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, comme l'application (3.2.35) est continue pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, en particulier elle est continue pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$, et donc nous avons $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t_{k_j},x)\psi(x)dx \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t,x)\psi(x)dx$. Puisque $\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ est dense dans $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, par l'unicité de la limite, nous obtenons $\vec{u}(t,\cdot) = \vec{v}(t,\cdot) \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Nous avons donc prouvé que

$$\text{pour tout} \quad t \in [\delta, T], \quad \vec{u}(t,\cdot) \in L^3(\mathbb{R}^3). \tag{3.2.36}$$

- Nous prouvons maintenant que, pour tout ensemble ouvert $B \subset \mathbb{R}^3$, le triplet $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée des équations des fluides micro-polaires dans $]\delta, T[\times B$ au sens de la Définition 2.3.2, page 69. En effet, puisque $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]0, +\infty[L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ nous avons immédiatement $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]\delta, T[, L^2(B)) \cap L^2(]\delta, T[, \dot{H}^1(B))$. Ainsi, il suffit de montrer que $p \in L^{\frac{3}{2}}(]\delta, T[, L^{\frac{3}{2}}(B))$ et $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ satisfait l'inégalité d'énergie locale suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(]\delta, T[\times B)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2\phi(t,\cdot)dx + 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\phi dyds \leq& \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t\phi + \Delta\phi)|\vec{u}|^2 dyds \\ &+ 2\int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi)dyds + \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\phi dyds \\ &+ \int_{s<t}\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot(\phi\vec{u})dyds.\end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Pour prouver que $p \in L^{\frac{3}{2}}(]\delta, T[, L^{\frac{3}{2}}(B))$, rappelons que la pression satisfait l'équation $p = \frac{1}{(-\Delta)}\operatorname{div}\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})$ sur $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, en utilisant le fait que les transformées de Riesz sont bornés dans $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\|p(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(B)} \leq \left\|\frac{1}{(-\Delta)}\operatorname{div}\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})(t,\cdot)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^3(\mathbb{R}^3)}.$$

En considérant la norme $L^{\frac{3}{2}}$ dans l'intervalle de temps $]\delta, T[$, dans l'expression ci-dessus, et puisque $\vec{u} \in L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse, on a

$$\|p\|_{L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x(]\delta,T[\times B)} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^{\frac{3}{2}}(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))} \leq C\|\vec{u}\|^2_{L^\infty(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))} < +\infty. \tag{3.2.38}$$

Prouvons maintenant que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ satisfait l'inégalité d'énergie locale (3.2.37). Puisque $\vec{u} \in L^2_t\dot{H}^1_x \subset L^2_tL^6_x$ et $\vec{u} \in L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse, en utilisant un argument d'interpolation, nous avons

$$\|\vec{u}\|_{L^4(]\delta,T[,L^4(B))} \leq \|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(]\delta,T[,L^3(B))}\|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(]\delta,T[,L^6(B))} \leq \|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(]\delta,T[,L^3(\mathbb{R}^3))}\|\vec{u}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(]\delta,T[,L^6(\mathbb{R}^3))} < +\infty.$$

Ainsi, comme $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ satisfait la première équation des équations des fluides micro-polaires (3.1.1), et nous avons déduit que $\vec{u} \in L^4(]\delta, T[, L^4(B))$ et $p \in L^{\frac{3}{2}}(]\delta, T[, L^{\frac{3}{2}}(B))$, il est possible de voir que chaque terme de l'inégalité d'énergie locale (3.2.37) est bien défini, voir [61, Proposition 13.3]. Par conséquent, puisque $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]\delta, T[, L^2(B)) \cap L^2(]\delta, T[, \dot{H}^1(B))$, $p \in L^{\frac{3}{2}}(]\delta, T[, L^{\frac{3}{2}}(B))$, et que l'inégalité locale d'énergie est satisfaite, on obtient que pour tout ensemble ouvert $B \subset \mathbb{R}^3$, le triplet $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée sur $]\delta, T[\times B$.

Après avoir obtenu les deux points précédents, nous continuons avec la preuve du Théorème 3.2.2.

Montrons tout d'abord que si $\vec{u} \in \mathcal{C}(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ alors chaque point $(t_0, x_0) \in]\delta, T[\times \mathbb{R}^3$ est partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1. Remarquons que, puisque $\vec{u} \in L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$, pour tout $(t_0, x_0) \in]\delta, T[\times\mathbb{R}^3$, il existe $0 < R < \sqrt{t_0 - \delta}$ tel que $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(t_0, x_0))$. De plus, comme nous avons montré que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée sur $Q_R(t_0, x_0)$ au sens de la Définition 2.3.2, on peut appliquer le Théorème 3.2.1, et donc il existe un rayon $0 < r \leq \frac{R}{2}$ tel que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(Q_r(t_0, x_0))$ et donc le point (t_0, x_0) est partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1, page 129. Nous avons donc montré la première implication.

Passons maintenant vers l'autre direction : supposons que tout $(t_0, x_0) \in]\delta, T[\times\mathbb{R}^3$ est un point partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1 et nous cherchons à prouver que nous avons

$$\vec{u} \in \mathcal{C}(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Pour ce faire, nous déduirons tout d'abord que la vitesse $\vec{u}$ satisfait aux conditions suivantes : $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]\delta, T[\times\mathbb{R}^3)$ et $\vec{u} \in \mathcal{C}([\delta, T], L^2(\mathbb{R}^3))$

En effet, prouvons que $\vec{u}$ est borné sur $]\delta, T[\times\mathbb{R}^3$. Fixons $t_0 \in]\delta, T[$ et $0 < R < \sqrt{t_0 - \delta}$. Puisque $\vec{u} \in L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse et $p \in L^{\frac{3}{2}}(]\delta, T[, L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.38), nous avons

$$\lim_{|x_0| \longrightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \int_{Q_R(t_0, x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds = 0.$$

Ainsi, pour $\epsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $|x_0| > K$, nous avons $\frac{1}{R^2} \int_{Q_R(t_0, x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds \leq \epsilon$. Par conséquent, par le Théorème 2.3.2, il existe $0 < r \leq \frac{R}{2}$ tel que $\|\vec{u}\|_{L^\infty_{t,x}(Q_r(t_0, x_0))} < C$. Comme cette borne est valable pour tout $|x_0| > K$, on en déduit que

$$\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B^c_{0,K}). \tag{3.2.39}$$

Nous allons maintenant montrer que $\vec{u}$ est borné sur $]t_0 - \rho^2, t_0[\times \bar{B}_{0,K}$, pour un certain $\rho > 0$ qui sera défini plus tard. Remarquons que pour tout $y \in \bar{B}_{0,K}$, le point (t_0, y) est partiellement régulier par hypothèse et donc il existe $0 < \mathfrak{r}_y < \sqrt{t_0 - \delta}$ tel que

$$\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(Q_{\mathfrak{r}_y}(t_0, y)), \quad \text{où} \quad Q_{\mathfrak{r}_y}(t_0, y) =]t_0 - \mathfrak{r}_y^2, t_0[\times B_{y, \mathfrak{r}_y}. \tag{3.2.40}$$

Remarquons que la famille $\{B_{y,\mathfrak{r}_y} : y \in \bar{B}_{0,K}\}$ forme un recouvrement de $\bar{B}_{0,K}$. Ainsi, par la compacité de $\bar{B}_{0,K}$ et (3.2.40), il existe un sous recouvrement fini $\{B_{\mathfrak{r}_{y_i}}(t_0, y_i) : i = 1, \dots, n\}$ de $\bar{B}_{0,K}$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(Q_{\mathfrak{r}_{y_i}}(t_0, y_i))$. En considérant $\rho = \min\{\mathfrak{r}_{y_1}, \dots, \mathfrak{r}_{y_n}\}$, nous avons $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - \rho^2, t_0[\times \bigcup_{i=1}^n B_{y_i, \mathfrak{r}_{y_i}})$. Maintenant, puisque $\bar{B}_{0,K} \subset \bigcup_{i=1}^n B_{y_i, \mathfrak{r}_{y_i}}$, nous avons $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - \rho^2, t_0[\times \bar{B}_{0,K})$ et ensuite, à partir des informations précédentes et par (3.2.39), nous déduisons que $\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - \min \rho, r\}^2, t_0[\times\mathbb{R}^3)$. De plus, comme $t_0 \in]\delta, T[$ est arbitraire, on a

$$\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]\delta, T[\times\mathbb{R}^3). \tag{3.2.41}$$

Prouvons maintenant que $\vec{u} \in \mathcal{C}([\delta, T], L^2(\mathbb{R}^3))$. Pour cela, nous remarquons qu'il est connu qu'il suffit de vérifier que $\vec{u} \in L^2(]\delta, T[, H^1(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t \vec{u} \in L^2(]\delta, T[, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ pour obtenir ce fait (voir par exemple

[85, Théorème 1.33]). Ainsi, puisque $\vec{u} \in L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse, nous avons

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2_{L^2(]\delta,T[,H^1(\mathbb{R}^3))} &= \|\vec{u}\|^2_{L^2(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} + \|\vec{u}\|^2_{L^2(]\delta,T[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq C\|\vec{u}\|^2_{L^\infty(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} + \|\vec{u}\|^2_{L^2(]\delta,T[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} < +\infty. \end{aligned}$$

et nous obtenons donc que $\vec{u} \in L^2(]\delta,T[, H^1(\mathbb{R}^3))$. Maintenant, pour prouver $\partial_t \vec{u} \in L^2(]\delta,T[, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$, rappelons que $\vec{u}$ satisfait l'équation $\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}$ où $\mathbb{P}(\cdot)$ est le projecteur de Leray. Ainsi, puisque $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et que $\mathbb{P}$ est un opérateur borné dans $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|\partial_t\vec{u}(t,\cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\partial_t\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|\Delta\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|\Delta\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + C\|\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

et nous pouvons écrire

$$\|\partial_t\vec{u}(t,\cdot)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^3)} \leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} + C\|(\vec{u}\otimes\vec{u})(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|\vec{\omega}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

En considérant la norme L^2 dans l'intervalle de temps $]\delta,T[$ dans l'expression ci-dessus, puisque $\vec{u},\vec{\omega} \in L^\infty(]\delta,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]\delta,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse et puisque $\vec{u} \in L^\infty(]\delta,T[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.41), nous avons

$$\begin{aligned} \|\partial_t\vec{u}\|_{L^2(]\delta,T[,H^{-1}(\mathbb{R}^3))} &\leq \|\vec{u}\|_{L^2(]\delta,T[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} + \|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{L^2(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} + \frac{1}{2}\|\vec{\omega}\|_{L^2(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} \\ &\leq \|\vec{u}\|_{L^2(]\delta,T[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} + C\|\vec{u}\|_{L^\infty(]\delta,T[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}\|\vec{u}\|_{L^\infty(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} + C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty(]\delta,T[,L^2(\mathbb{R}^3))} < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\vec{u} \in L^2(]\delta,T[, H^1(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t\vec{u} \in L^2(]\delta,T[, H^{-1}(\mathbb{R}^3))$, il est possible de déduire que $\vec{u} \in \mathcal{C}([\delta,T], L^2(\mathbb{R}^3))$ (cf. [85, Théorème 1.33].

Après avoir établi que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]\delta,T[\times\mathbb{R}^3)$ et $\vec{u} \in \mathcal{C}([\delta,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, nous allons maintenant prouver que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]\delta,T[, L^3(\mathbb{R}^3))$, *i.e.*, nous étudierons la continuité de la fonction

$$\begin{aligned}]\delta,T[&\longrightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \\ t &\longmapsto \vec{u}(t,\cdot). \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

Remarquons que la fonction précédente est bien définie puisque pour tout $t \in [\delta,T]$, nous avons $\vec{u}(t,\cdot) \in L^3(\mathbb{R}^3)$ par (3.2.36). Maintenant, supposons que $\epsilon > 0$ et $t_1, t_2 \in]\delta,T[$. Puisque $\vec{u} \in L^\infty(]\delta,T[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ par (3.2.41), nous avons

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t_1,\cdot)-\vec{u}(t_2,\cdot)\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}(t_1,x)-\vec{u}(t_2,x)|^3dx &= \int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}(t_1,x)-\vec{u}(t_2,x)|^2|\vec{u}(t_1,x)-\vec{u}(t_2,x)|dx \\ &\leq 2\|\vec{u}\|_{L^\infty(]\delta,T[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}(t_1,x)-\vec{u}(t_2,x)|^2dx. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\vec{u} \in \mathcal{C}([\delta,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, il existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que si $|t_1-t_2| \leq \delta$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}(t_1,x)-\vec{u}(t_2,x)|^2dx \leq \frac{\epsilon}{2\|\vec{u}\|_{L^\infty(]\delta,T[,L^\infty(\mathbb{R}^3))}}.$$

Il existe donc $\delta = \delta(\epsilon)$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, nous avons

$$\|\vec{u}(t_1,\cdot) - \vec{u}(t_2,\cdot)\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)} < \epsilon. \tag{3.2.43}$$

Ainsi, la fonction (3.2.42) est continue et nous concluons donc que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$, ce qui termine la démonstration du Théorème 3.2.2. ■

3.3. L'effet de concentration de la norme L^3

Avant de présenter le résultat de concentration, nous allons tout d'abord vérifier l'explosion de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ des solutions de type Leray des équations micro-polaires, laquelle s'obtiendra d'après les résultats de la section précédente.

3.3.1. Un critère d'explosion pour les solutions de type Leray

Rappelons d'abord la définition les solutions faibles de type Leray des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2) qui ont été introduites dans la Section 1.2.1. Pour $\vec{u}_0, \vec{\omega}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ des données initiales telle que $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$, nous disons que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution faible de type Leray des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2) avec des valeurs initiales $\vec{u}_0$ et $\vec{\omega}_0$ si $\vec{u} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, $\vec{\omega} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, H^1(\mathbb{R}^3))$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$ ils satisfont l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|\vec{\omega}(t,\cdot)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t (\|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} + \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|^2_{H^1} + 2\|\operatorname{div}(\vec{\omega})(s,\cdot)\|^2_{L^2})ds \\ \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{\omega}_0\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons le résultat suivant

Théorème 3.3.1. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible de type Leray des équations micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2). *Soit $0 < \mathcal{T} \leq +\infty$ le temps maximal tel que nous avons le contrôle $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Si $\mathcal{T} < +\infty$, alors*

$$\sup_{0<t<\mathcal{T}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3} = +\infty. \tag{3.3.1}$$

Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.3.1. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible de type Leray des équations micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2) *telle que pour tout $0 < T_1 < +\infty$ nous avons $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_1[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1) *Pour un certain $0 < T_2 < +\infty$ tel que $T_1 < T_2$, la vitesse $\vec{u}$ peut être prolongée à l'intervalle de temps $]0, T_2[$ avec le contrôle $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$.*
2) *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, tout point (T_1, x_0) est partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1.*

Preuve. Prouvons que 1) implique 2). Supposons que pour une certaine $T_2 > 0$ telle que $0 < T_1 < T_2 < +\infty$, la vitesse $\vec{u}$ puisse être étendue à $]0, T_2[$ de telle sorte que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Remarquons que puisque $T_2 < +\infty$ nous avons $\vec{u} \in L^\infty(]0, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$ et que nous avons aussi $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ puisqu'il s'agit d'une solution faible de type Leray. Nous pouvons donc appliquer le Théorème 3.2.2 et nous obtenons que tout point $(t,x) \in]0, T_2[\times \mathbb{R}^3$ est partiellement régulier au sens de la définition 2.4.1. Puisque $0 < T_1 < T_2$ par hypothèse, il s'en résulte que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, le point (T_1, x_0) est partiellement régulier, ce qui complète la preuve de la première implication.

Maintenant, nous montrons la réciproque *i.e.* nous prouverons que 2) implique 1). Supposons que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, le point (T_1, x_0) est partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1. Remarquons d'abord que tout point $(t,x) \in]0, T_1] \times \mathbb{R}^3$ est aussi partiellement régulier au sens de la définition 2.4.1. En effet, puisque $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_1[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse, et que $T_1 < +\infty$, nous avons $\vec{u} \in L^\infty(]0, T_1[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Puisque $(\vec{u}, \vec{\omega})$ est une solution de type Leray, nous avons $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. Ainsi, par le Théorème 3.2.2, tout point $(t,x) \in]\delta, T_1[\times \mathbb{R}^3$ est partiellement régulier. Rappelons que le cas $t = T_1$ découle de l'hypothèse (2).

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour déduire (3.2.41), nous avons que $L^\infty_t L^\infty_x L^\infty_{t,x}(]0, T_1] \times \mathbb{R}^3)$ et de la même manière nous pouvons déduire que $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_1], L^2(\mathbb{R}^3))$. Par conséquent, en suivant les mêmes lignes que dans (3.2.43), nous avons $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_1], L^3(\mathbb{R}^3))$. Notons que nous considérons maintenant l'intervalle $]0, T_1]$.

Pour continuer et afin d'étendre la solution au delà de $t = T_1$, nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 3.3.1. *Soit $\vec{f} :]0, T[\times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une force extérieure avec $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, telle que $\vec{f} \in L^p(]0, T[, L^q(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 3$ et $\frac{3}{2} < q < 3$. Considérons que $\vec{v}_0$ est une donnée initiale à divergence nulle dans $L^3(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe $0 < T_0 < T$ et une solution unique $(\vec{v}, h)$ des équations de Navier-Stokes*

$$\begin{cases} \partial \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} h + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v}(0, \cdot) = \vec{v}_0, \end{cases}$$

tel que $\vec{v} \in \mathcal{C}([0, T_0[, L^3(\mathbb{R}^3)) \cap L^4(]0, T_0[, L^6(\mathbb{R}^3))$.

Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons au Théorème 15.5 dans [61]. Remarquons que, puisque $\vec{\omega} \in L^2_t \dot{H}^1_x$ par hypothèse, nous avons pour tout $1 \ll \kappa < +\infty$ que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \in L^2(]0, \kappa T_1[, L^2(\mathbb{R}^3)) \subset L^{\frac{4}{3}}(]0, \kappa T_1[, L^2(\mathbb{R}^3))$. Par conséquent, en considérant la proposition précédente avec $\vec{u}(T_1, \cdot) \in L^3(\mathbb{R}^3)$ comme données initiales et $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ comme force externe dans $L^{\frac{4}{3}}_t(]T_1, \kappa T_1[, L^2_x(\mathbb{R}^3))$, il existe $0 < T_1 < T_2 < \kappa T_1$ et une solution $(\vec{v}, h)$ des équations de Navier-Stokes tels que $\vec{v} \in \mathcal{C}([T_1, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Puisque $(\vec{u}, p)$ peut être vu comme une solution faible de type Leray de la même équation satisfaite par $(\vec{v}, h)$ (à partir des mêmes données initiales), par un argument d'unicité faible-forte, nous avons que $\vec{u} = \vec{v} \in \mathcal{C}([T_1, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$ et donc la solution peut être étendue au-delà de $t = T_1$ de telle sorte que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, T_2[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Ceci complète la preuve de la deuxième implication et prouve la Proposition 3.3.1. ■

Démonstration du Théorème 3.3.1. Soit $0 < \mathcal{T} \leq +\infty$ le temps maximal tel que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Rappelons que nous voulons prouver que si $\mathcal{T} < +\infty$, alors $\sup\limits_{0<t<\mathcal{T}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^3} = +\infty$. Supposons alors que nous avons $\vec{u} \in L^\infty(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$.

Puisque $0 < \mathcal{T} < +\infty$ est le temps maximal tel que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$, d'après la Proposition 3.3.1, il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\mathcal{T}, x_0)$ est un point partiellement singulier au sens de la Définition 2.4.1.

D'un autre côté, comme $\vec{u} \in L^\infty(]0, \mathcal{T}[, L^3(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse, nous pouvons trouver $0 < R < \sqrt{\mathcal{T}}$ tel que $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(\mathcal{T}, x_0))$. De plus, comme $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution de type Leray, nous avons

$\vec{u}, \vec{\omega} \in L^\infty_t L^2_x(Q_R(\mathcal{T}, x_0)) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R(\mathcal{T}, x_0))$. Puis, par le fait que $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée dans $Q_R(\mathcal{T}, x_0)$ et $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x(Q_R(\mathcal{T}, x_0))$, nous pouvons appliquer le Théorème 3.2.1 et il s'en résulte que $(\mathcal{T}, x_0)$ est en fait un point partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1. Ceci, c'est une contradiction puisque nous avons vu que $(\mathcal{T}, x_0)$ est partiellement singulier. Ainsi, la quantité $L^\infty_t L^3_x$ doit exploser, ce qui termine la preuve du Théorème 3.3.1. ■

Observons ainsi que nous avons obtenu un premier critère d'explosion pour les équations micro-polaires de la norme $L^\infty_t L^3_x$. Cependant, étant donné que l'argument utilisé est par contradiction, ces estimations sont uniquement qualitatives. Afin d'obtenir une meilleure compréhension du comportement de la solution en ces points, nous montrerons un effet de concentration de la norme L^3 de la vitesse $\vec{u}$ autour d'un éventuel point partiellement singulier $(\mathcal{T}, 0)$ au sens de la Définition 2.4.1 lorsque $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$.

3.3.2. L'effet de concentration de la norme L^3

Nous pouvons à présent énoncer le théorème principal de ce chapitre

Théorème 3.3.2. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible de type Leray des équations micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2) *avec $0 < \mathcal{T} < +\infty$ le temps maximal tel que nous avons le contrôle $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$. Supposons en plus que le point $(\mathcal{T}, 0)$ soit un point partiellement singulier au sens de la Définition 2.4.1, page 129 et que le temps $\mathcal{T}$ satisfasse la condition suivante : pour $r_0 > 0$ tel que $0 < \mathcal{T} - r_0^2$, on a*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{r \in]0, r_0]} \sup_{t \in]\mathcal{T} - r^2, \mathcal{T}]} \frac{1}{r} \int_{B_{x_0, r}} |\vec{u}(t, x)|^2 dx = \mathfrak{M} < +\infty. \tag{3.3.2}$$

Il existe alors $\epsilon > 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) > 0$ et $\delta = \delta(\mathfrak{S}, r_0, \mathcal{T}) > 0$ de sorte que pour tout $t \in]\mathcal{T} - \delta, \mathcal{T}[$, nous avons

$$\int_{B_{0, \sqrt{\frac{\mathcal{T} - t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t, x)|^3 dx \geq \epsilon. \tag{3.3.3}$$

Observons qu'à partir de l'estimation (3.3.3), nous pouvons constater le phénomène de concentration de la norme L^3_x du champ de vitesse $\vec{u}$ lorsque t tend vers $\mathcal{T}$. Il est important de préciser que notre étude se concentre sur la variable $\vec{u}$, et donc l'étude du comportement de la variable $\vec{\omega}$ en les points partiellement singuliers reste encore un axe de recherche possible.

Parlons maintenant de l'hypothèse (3.3.2) qui est connue dans la littérature sous le nom d'explosion de type I pour le temps $\mathcal{T}$ (voir [6], [52]). Remarquons que cette condition concerne un contrôle invariant par rapport au changement d'échelle (3.1.4) et qu'elle est liée au taux de croissance spécifique d'une solution proche d'un moment d'explosion. Pour plus de détails concernant cette quantité nous renvoyons à l'article [3]. Étant donné que les équations micro-polaires sont un système couplé avec les équations de Navier-Stokes, si nous étudions la vitesse, nous retrouverons la même condition que ci-dessus. Il est important de noter que dans l'article [7], des estimations quantitatives d'explosion dans le cadre local pour les équations de Navier-Stokes ont été obtenues sous cette condition.

Remarquons d'autre part, qu'il existe différentes façons de représenter cette condition de type I, voir par exemple [3] ou [6]. Cependant, dans notre cas d'étude, l'hypothèse (3.3.2) est vue en termes d'espaces de type Morrey. En effet, si $\vec{u}$ satisfait la condition (3.3.2), alors nous avons $\vec{u} \in L^\infty_t \mathcal{M}^{2,3}_x \subset \mathcal{M}^{2,5}_{t,x}$ (voir l'expression (2.1.6), page 42). Bien-sûr, le fait que $\vec{u} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}$ avec $p = 2$

et $q = 5$ se situe en dehors du champ d'application du critère de régularité de Serrin énoncé en termes d'espaces de Morrey où nous devons imposer que $5 < q$ (voir Théorème 2.2.1, page 45). La valeur $q = 5$ semble donc constituer un seuil : au-dessus de cette valeur, les informations supplémentaires de Morrey impliqueront une intégrabilité suffisante pour déduire un gain de régularité, tandis qu'à $q = 5$ ou en dessous, le contrôle de type Morrey ne produira pas de gain d'information conséquent.

Maintenant, présentons le Théorème 3.3.2 pour lequel nous devons introduire quelques notions et propositions auxiliaires.

Quelques informations préliminaires

Tout au long de cette section, la notion suivante sera très utile

Définition 3.3.1 (Solution locale partielle de Leray). *Nous dirons que $\vec{u}, \vec{\omega} :]0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $p :]0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une* solution locale partielle de Leray *des équations des fluides micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2) *avec des données initiales $\vec{u}_0, \vec{\omega}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ si :*

1) *le triplet $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution partiellement adaptée sur $]0, T[\times \mathbb{R}^3$ au sens de la Définition 2.3.2, page 69,*
2) *nous avons* $\displaystyle\sup_{0<t<T} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{B_{x,1}} |\vec{u}|^2 dy + \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_0^T \int_{B_{x,1}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dydt < +\infty,$
3) *pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^3$, nous avons*
$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \int_K |\vec{u}(t, y) - \vec{u}_0(y)|^2 dy = 0, \tag{3.3.4}$$
4) *Pour tout $R > 0$ on a* $\displaystyle\lim_{|x_0|\to+\infty} \int_0^{\min\{R^2,T\}} \int_{B_{x_0,R}} |\vec{u}|^2 dyds = 0.$

Remarque 3.3.1. *Il est intéressant de noter que si $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution locale partielle de Leray des équations des fluides micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2) *au sens de la Définition 3.3.1, on peut dire que $(\vec{u}, p)$ est une solution locale de Leray des équations de Navier-Stokes forcées au sens de la Définition 14.1 du livre [61] où la quantité $\frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \in L^2_{t,x}$ peut être considérée comme une force externe, i.e.,*
$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

Remarque 3.3.2. *Observons que si $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ est une solution locale partielle de Leray des équations des fluides micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2)*, alors elle vérifie également l'inégalité d'énergie locale suivante,*
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \phi(t, \cdot) dy + 2\int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi dyds \leq \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_t \phi + \Delta\phi)|\vec{u}|^2 dyds + 2\int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\phi) dyds \\ + \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\phi dyds + \int_{s<t} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\phi \vec{u}) dyds.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Nous présentons maintenant quelques lemmes pour mettre en évidence les propriétés de ce type de solutions. Tout d'abord, nous remarquons que la pression peut être étudiée de la même manière que dans les équations de Navier-Stokes classiques puisque la variable $\vec{\omega}$ n'est pas présente dans l'équation (3.1.3). Ainsi, nous avons la décomposition locale suivante

Lemme 3.3.2. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution locale partielle de Leray au sens de la Définition 3.3.1 des équations des fluides micro-polaires* (3.1.1) *et* (3.1.2)*. La pression p peut alors être décomposée comme suit : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$, il existe $\mathfrak{h} \in L^{\frac{3}{2}}(]0,T[)$ tel que*

$$
\begin{aligned}
p(x,t) - \mathfrak{h}(t) &= \frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathbb{1}_{B_{x_0,3r}}\vec{u}\otimes\vec{u}))) + \int_{|y-x_0|>3r}(\mathbb{K}(x-y)-\mathbb{K}(-y))\vec{u}\otimes\vec{u}(t,y))dy \\
&= \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2, \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

où $\mathbb{K}$ est le noyau de l'opérateur intégral singulier $\frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}))$.

Pour une preuve de ce lemme dans le cadre des équations de Navier-Stokes, nous nous référons à [53, Lemme 3.4], voir aussi [6, Théorème 4] et le livre [91].

Nous observons maintenant que puisque $\vec{u}$ satisfait la condition (3.3.4), il est possible de réécrire l'inégalité locale d'énergie (3.3.5) en termes de la donnée initiale $\vec{u}_0$, de la manière suivante.

Lemme 3.3.3. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution locale partielle de Leray au sens de la définition 3.3.1 sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$. Pour tout $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $\in]0,T[$ nous avons*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}|^2\Phi dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\Phi dyds \leq \int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}_0|^2\Phi dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}|^2\Delta\Phi dyds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\cdot\vec{u}\Phi dyds \\
+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}(|\vec{u}|^2 + 2[\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2])\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\Phi dyds. \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

Observons que nous sommes capables de prendre ici des fonctions tests constantes en temps dans l'inégalité locale d'énergie. Voir l'article [74, Remarque 1.2] pour une preuve de ce résultat.

Après avoir annoncé ces résultats, nous présentons maintenant l'outil principal pour prouver l'effet de concentration de la norme L^3 énoncé dans le Théorème 3.3.2.

Lemme 3.3.4. *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution locale partielle de Leray des équations des fluides micro-polaires sur $]0,1[\times\mathbb{R}^3$ au sens de la Définition 3.3.1, associée aux données initiales $\vec{u}_0, \vec{\omega}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, telle qu'il existe $M > 0$ avec*

$$\sup_{0<t<1}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x,1}}|\vec{u}(t,x)|^2dy + \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x,1}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds \leq M. \qquad (3.3.8)$$

Supposons en outre qu'il existe $0 < R < \frac{1}{12}$ et $S > 0$ tels que nous avons

$$\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < CR, \qquad (3.3.9)$$

et

$$\sup_{R<\mathfrak{r}\leq 1}\frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|\vec{u}_0|^2dy = S < +\infty. \qquad (3.3.10)$$

Alors, il existe $T_1 = T_1(M,S) < 1$ et une constante universelle $T_1 = T_1(M,S) < 1$ et une constante universelle $\mathfrak{c} > 1$ telle que pour tout $\mathfrak{r} > 0$ avec $R \leq \mathfrak{r} \leq \frac{1}{3}$ et pour $t > 0$ tel que $0 < t \leq T^* = \min\{T_1, \mathfrak{c}\lambda\mathfrak{r}^2\}$ avec $\lambda = \frac{1}{1+S^2}$, nous avons le contrôle

$$E_{\mathfrak{r}}(t) = \sup_{0<s<t}\frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|\vec{u}|^2dy + \frac{1}{\mathfrak{r}}\int_0^t\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds + \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|p-\mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}}dyds < CS. \qquad (3.3.11)$$

Ce résultat a été initialement établi dans le cadre des équations équations de Navier-Stokes classiques sans force dans [52, Théorème 3.1]. Dans notre cas, puisqu'il s'agit des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2), nous devons prendre en compte le terme $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ dans l'équation liée à l'évolution de $\vec{u}$.

Preuve du Lemme 3.3.4. Soit $r > 0$ tel que $R \leq r \leq \frac{1}{3}$ soit un rayon fixe et $0 < t < T^* < 1$ pour un certain $T^* > 0$ à fixer plus tard. Remarquons tout d'abord que la décomposition locale de la pression donnée dans le Lemme 3.3.2, nous avons $p - \mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ où $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont donnés dans (3.3.6). Alors $E_r(t)$ peut être écrit de la manière suivante

$$E_r(t) = \sup_{0<s<t} \frac{1}{r} \int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^2 dy + \frac{1}{r} \int_0^t \int_{B_{0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds + \frac{1}{r^2} \int_0^t \int_{B_{0,r}} |\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}} dyds.$$

De plus, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} E_r(t) \quad &\leq \quad \left(\sup_{0<s<t} \frac{1}{r} \int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^2 dy + \frac{1}{r} \int_0^t \int_{B_{0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds \right) \\ &\quad + \frac{C}{r^2} \int_0^t \int_{B_{0,2r}} |\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}} + |\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}} dyds. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Afin de contrôler l'expression ci-dessus en termes de (3.3.10), nous allons étudier plus en détail les termes entre parenthèses ci-dessus. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'inégalité locale d'énergie (3.3.7) en considérant une fonction test particulière. En effet, considérons $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction positive telle que $\phi = 1$ dans $B_{0,r}$, $\text{supp}(\phi) \subset B_{0,2r}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^3$, tel que $|\alpha| \leq k$ nous avons $\|D^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq C_k r^{-k}$. Maintenant, si nous introduisons cette fonction auxiliaire dans l'inégalité locale d'énergie (3.3.7), on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \phi dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi dyds \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_0|^2 \phi dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \Delta \phi dyds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot (\vec{u}\phi) dyds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (|\vec{u}|^2 + 2[\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2]) \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi dyds. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, nous avons

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot (\vec{u}\phi) dyds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\vec{\omega}\phi) dyds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\omega} \cdot \vec{u}) \wedge \vec{\nabla} \phi dyds,$$

et donc nous obtenons que les termes entre parenthèses du côté gauche de l'expression (3.3.12) peuvent être bornés comme suit

$$\begin{aligned} \sup_{0<s<t} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \phi dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \phi dyds \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_0|^2 \phi dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \Delta \phi dyds \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\vec{\omega}\phi) dyds \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\omega} \cdot \vec{u}) \wedge \vec{\nabla} \phi dyds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi dyds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} 2[\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2] \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi dyds. \end{aligned}$$

Maintenant, par les propriétés de la fonction de test ϕ nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup_{0<s<t} \int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^2 dy + \int_0^t \int_{B_{0,r}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dyds \quad &\leq \quad C \int_{B_{0,2r}} |\vec{u}_0|^2 dy + \frac{C}{r^2} \int_0^t \int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dyds \\ &\quad + C \int_0^t \int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla} \wedge \vec{u}| |\vec{\omega}| dyds + \frac{C}{r} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\omega}| |\vec{u}| dyds \\ &\quad + \frac{C}{r} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^3 dyds + \frac{C}{r} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{p}_1| |\vec{u}| + |\mathfrak{p}_2| |\vec{u}| dyds. \end{aligned}$$

Notons qu'à partir de l'inégalité de Hölder ($1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$) et de l'inégalité de Young, on a pour le dernier terme ci-dessus l'estimation $\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\mathfrak{p}_1||\vec{u}|+|\mathfrak{p}_2||\vec{u}|dyds\leq C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}+|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}+|\vec{u}|^3dyds$, Par conséquent, en appliquant l'estimation précédente à l'inégalité ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{0<s<t}\int_{B_{0,r}}|\vec{u}|^2dy+\int_0^t\int_{B_{0,r}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds &\leq C\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}_0|^2dy+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^2dyds\\ &+C\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds+\frac{C}{r}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\omega}||\vec{u}|dyds\\ &+\frac{C}{r}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{u}|^3dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds.\end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant par $\frac{1}{r}$ dans l'expression ci-dessus, nous obtenons la borne suivante pour les termes entre parenthèses dans (3.3.12)

$$\begin{aligned}\sup_{0<s<t}\frac{1}{r}\int_{B_{0,r}}|\vec{u}|^2dy+\frac{1}{r}\int_0^t\int_{B_{0,r}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dyds &\leq \frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}_0|^2dy+\frac{C}{r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^2dyds\\ &+\frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\omega}||\vec{u}|dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^3dyds\\ &+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds.\end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant l'estimation précédente dans (3.3.12), on obtient

$$\begin{aligned}E_r(t)\leq&\Bigg(\frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}_0|^2dy+\frac{C}{r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^2dyds+\frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds\\ &+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\omega}||\vec{u}|dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^3dyds+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}dyds\\ &+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds\Bigg)+\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}+|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds\\ \leq&\frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}_0|^2dy+\underbrace{\frac{C}{r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^2dyds}_{I_1}+\underbrace{\frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds}_{I_2}+\underbrace{\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{\omega}||\vec{u}|dyds}_{I_3}\\ &+\underbrace{\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\vec{u}|^3dyds}_{I_4}+\underbrace{\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}dyds}_{I_5}+\underbrace{\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds}_{I_6}. \qquad (3.3.13)\end{aligned}$$

Afin d'obtenir l'estimation souhaitée (3.3.11) et pour $R\leq\mathfrak{r}\leq\frac{1}{3}$, nous allons étudier l'expression suivante

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t)=\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq\frac{1}{3}}E_r(t).$$

Remarquons que nous avons par construction $E_{\mathfrak{r}}(t)\leq\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t)$, et pour étudier le terme $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t)$ nous avons divisé le supremum en deux parties :

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t)\leq\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq\frac{1}{12}}E_r(t)+\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}}E_r(t). \qquad (3.3.14)$$

Dans ce qui suit, nous étudions chacun des termes ci-dessus séparément.

- Supposons que $\mathfrak{r} \leq r \leq \frac{1}{12}$. Notons que d'après (3.3.13), nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} E_r(t) \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}_0|^2 dy + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \sum_{j=1}^{6} I_j \tag{3.3.15}$$

Pour le terme I_1 de (3.3.15), par la définition de $E_r(t)$ et puisque $\mathfrak{r} < 2r < \frac{1}{6} < \frac{1}{3}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_1 &= \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dyds = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{2C}{r^2}\int_0^t \frac{1}{2r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dyds \\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{2C}{r^2}\int_0^t E_{2r}(s)ds \leq \frac{C}{R^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s)ds. \end{aligned}\tag{3.3.16}$$

Pour le terme I_2 dans (3.3.15), par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_2 &= \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds \\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{u}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{16r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{u}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dyds.\end{aligned}$$

Puisque $|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}|^2 \leq 2|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2$ et que $B_{0,2r}\subset B_{0,1}$ en raison du fait que $2r<1$, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_2 &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{8r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dyds \\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{8r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|^2_{L^2(B_{0,1})}ds.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la définition de $E_r(t)$, nous obtenons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_2 \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{4}E_{2r}(t) + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{Ct}{r}\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))}.$$

Puis, puisque $\frac{1}{r}\leq\frac{1}{\mathfrak{r}}$ et par la définition de $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}$, nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_2 \leq \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}} + \frac{Ct}{\mathfrak{r}}\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))}.$$

De plus, comme $\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < CR \leq C\mathfrak{r}$ par l'hypothèse (3.3.9) (et puisque nous supposons que $R\leq\mathfrak{r}\leq\frac{1}{3}$), nous obtenons finalement

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_2 \leq \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}} + Ct. \tag{3.3.17}$$

Pour le terme I_3 dans (3.3.15), on remarque qu'il peut être réécrit comme suit

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_3 = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}||\vec{u}|dyds = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} C\int_0^t\int_{B_{0,2r}} \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}|\vec{\omega}|\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}|\vec{u}|dyds.$$

Par conséquent, par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_3 &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{2r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dyds\\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t E_{2r}(s)ds.\end{aligned}$$

De nouveau, puisque $B_{0,2r}\subset B_{0,1}$ nous écrivons

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_3 &\leq \sup_{R\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,1}} |\vec{\omega}|^2 dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t E_{2r}(s)ds\\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{Ct}{r}\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t E_{2r}(s)ds. \end{aligned}\tag{3.3.18}$$

Par conséquent, puisque $\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < CR \leq C\mathfrak{r}$ par (3.3.9) et par la définition de $\mathcal{E}_\mathfrak{r}$, nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_3 \leq Ct + \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_\mathfrak{r}(s)ds. \tag{3.3.19}$$

Pour le terme I_4 dans (3.3.15), on remarque d'abord que par l'inégalité classique de Gagliardo-Nirenberg avec $\frac{1}{3}=\theta(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\frac{1-\theta}{2}$, on obtient

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3(B_{0,2r})} \leq \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}\|\vec{u}(t,\cdot)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(B_{0,2r})} + \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2(B_{0,2r})}.$$

De plus, par l'inégalité ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^3 dyds &= \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^3(B_{0,2r})}ds\\ &\leq \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})} + \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,2r})}ds.\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

Par conséquent, l'estimation précédente et l'inégalité de Young pour la somme (avec $1=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$) nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_4 = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^3 dyds\\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})} + \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,2r})}ds\\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \int_0^t \frac{1}{r^{\frac{3}{4}}}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}\frac{C}{r^{\frac{5}{4}}}\|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}ds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,2r})}ds\\ &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{8r}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{L^2(B_{0,2r})}ds + \frac{C}{r^5}\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^6_{L^2(B_{0,2r})}ds + \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,2r})}ds,\end{aligned}$$

et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_4 \leq& \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{8r}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{L^2(B_{0,2r})}ds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{8C}{r^2}\int_0^t \left(\frac{1}{2r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dy\right)^3 ds\\ &+ \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{2^{\frac{3}{2}}C}{r^{\frac{1}{2}}}\int_0^t \left(\frac{1}{2r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dy\right)^{\frac{3}{2}} ds.\end{aligned}$$

Maintenant, par la définition de $E_r(t)$, nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_4 \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{4}E_{2r}(t) + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t E^3_{2r}(s)ds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^{\frac{1}{2}}}\int_0^t E^{\frac{3}{2}}_{2r}(s)ds,$$

mais comme $r<1$, il s'ensuit que $\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{r^2}$ et nous obtenons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_4 \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{4}E_{2r}(t) + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t E^3_{2r}(s)ds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t E^{\frac{3}{2}}_{2r}(s)ds,$$

En utilisant une nouvelle fois le fait que $\frac{1}{r}\leq\frac{1}{\mathfrak{r}}$ et par la définition de $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t)$, nous avons finalement

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_4 \leq \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}^3_{\mathfrak{r}}(s)ds + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{r}}(s)ds. \tag{3.3.21}$$

Nous allons maintenant étudier le terme I_5 de (3.3.15). Remarquons tout d'abord que la définition de $\mathfrak{p}_1$ donnée dans (3.3.6) et que le noyau $\mathbb{K}(\cdot)=\frac{1}{(-\Delta)}\operatorname{div}\operatorname{div}(\cdot)$ est borné dans $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (puisque les transformées de Riesz sont bornées dans de tels espaces), on a

$$\|\mathfrak{p}_1\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(B_{0,2r})} \leq \left\|\frac{1}{(-\Delta)}(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathbb{1}_{B_{0,3r}}\vec{u}\otimes\vec{u})))\right\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\mathbb{1}_{B_{0,3r}}|\vec{u}|^2\|^{\frac{3}{2}}_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} = C\int_{B_{0,3r}}|\vec{u}|^3dy.$$

Alors, nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_5 = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}}|\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}ds \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_{B_{0,3r}}|\vec{u}|^3dy. \tag{3.3.22}$$

De plus, puisque $3r<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$ (rappelons $\mathfrak{r}\leq r\leq\frac{1}{12}$), nous pouvons utiliser les mêmes arguments que pour le terme I_4 et nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_5 \leq \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}^3_{\mathfrak{r}}(s)ds + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{r}}(s)ds. \tag{3.3.23}$$

Nous allons maintenant étudier le terme I_6 de (3.3.15). Ce terme est le plus technique, et nous suivrons les mêmes lignes que celles données dans la preuve de [52, Théorème 3.1]. Ainsi, rappelons d'abord l'estimation suivante pour le noyau $\mathbb{K}$: pour tout $x\in B_{0,2r}$ et $y\in\mathbb{R}^3\setminus B_{0,3r}$, nous avons

$$|\mathbb{K}(x-y)-\mathbb{K}(y)|\leq\frac{|x|}{|y|^4}. \tag{3.3.24}$$

Par la définition de $\mathfrak{p}_2$ donnée dans (3.3.6) et puisque $x\in B_{0,2r}$, nous avons $|x|<2r$ et

$$\begin{aligned}|\mathfrak{p}_2(t,x)| = \left|\int_{|y|>3r}(\mathbb{K}(x-y)-\mathbb{K}(-y))(\vec{u}\otimes\vec{u})(t,y)dy\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{0,3r}}\frac{|x|}{|y|^4}|\vec{u}|^2dy\\ &\leq 2r\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{0,3r}}\frac{1}{|y|^4}|\vec{u}|^2dy.\end{aligned} \tag{3.3.25}$$

Maintenant, afin d'estimer plus en détail l'expression ci-dessus, nous devons étudier le domaine d'intégration de l'intégrale précédente. Remarquons que puisque $3r<\frac{1}{4}$, on peut déduire qu'il existe $\mathcal{N}=\mathcal{N}(r)\in\mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{R}^3\setminus B_{0,3r}\subset\bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}}A_k(r)\cup(\mathbb{R}^3\setminus B_{0,\frac{1}{4}}),$$

où $A_k(r) = B_{0,2^k r} \setminus B_{0,2^{k-1}r}$ et tel que pour tout $1 \leq k \leq \mathcal{N}$ nous avons $2^k r \leq \frac{1}{3}$. Ainsi, à partir de (3.3.25), on a

$$|\mathfrak{p}_2(s,x)| \leq 2r \int_{\bigcup_{k=1}^{\mathcal{N}} A_k(r) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}})} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \leq 2r \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \int_{A_k(r)} \frac{|\vec{u}|^2}{|y|^4} dy + 2r \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy.$$

Comme $A_k(r) = B_{0,2^k r} \setminus B_{0,2^{k-1}r}$, et $2r < \frac{1}{6} < 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{p}_2(s,x)| &\leq \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} 2r \int_{B_{0,2^k r} \setminus B_{0,2^{k-1}r}} \frac{|\vec{u}|^2}{|y|^4} dy + 2r \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{2r}{2^{4(k-1)} r^4} \int_{B_{0,2^k r} \setminus B_{0,2^{k-1}r}} |\vec{u}|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{C}{2^{4(k-1)} r^3} \int_{B_{0,2^k r}} |\vec{u}|^2 dy + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy. \qquad (3.3.26)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier chaque terme de l'expression ci-dessus séparément. Pour le premier, on remarque que par la définition de $E_r(t)$, on a

$$\frac{1}{2^{4(k-1)} r^3} \int_{B_{0,2^k r}} |\vec{u}|^2 dy = \frac{C}{2^{3k} r^2} \left(\frac{1}{2^k r} \int_{B_{0,2^k r}} |\vec{u}|^2 dy \right) \leq \frac{1}{2^{3k} r^2} E_{2^k r}(s).$$

Ainsi, puisque pour tout $1 \leq k \leq \mathcal{N}$ nous avons $2^k r \leq \frac{1}{3}$, et $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$ il s'en suit que

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{C}{2^{4(k-1)} r^3} \int_{B_{0,2^k r}} |\vec{u}|^2 dy \leq \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{2C}{2^{3k} r^2} E_{2^k r}(s) \leq \frac{C}{r^2} \mathcal{E}_R(s) \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{2^{3k}} \leq \frac{C}{r^2} \mathcal{E}_R(s).$$

Étudions maintenant le second terme de (3.3.26). Puisque $\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}} \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_{0,2^{k-1}} \setminus B_{0,2^{k-2}}$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_{0,2^{k-1}} \setminus B_{0,2^{k-2}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{k-2})^4} \int_{B_{0,2^k}} |\vec{u}|^2 dy. \qquad (3.3.27)$$

Remarquons que par un changement de variable et puisque $\vec{u}$ satisfait l'estimation (3.3.8), nous obtenons

$$\int_{B_{0,2^k}} |\vec{u}(t,y)|^2 dy = (2^k)^3 \int_{B_{0,1}} |\vec{u}(t, \frac{z}{2^k})|^2 dz \leq 2^{3k} \sup_{0<t<1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{B_{x,1}} |\vec{u}(t,y)|^2 dy \leq 2^{3k} M.$$

En considérant l'égalité précédente dans (3.3.27), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{0,\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4} |\vec{u}|^2 dy \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2^k)^3}{(2^{k-2})^4} M \leq CM \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \leq CM. \qquad (3.3.28)$$

Par conséquent, en appliquant (3.3.27) et l'expression ci-dessus dans (3.3.26), pour tout $\mathfrak{r} \leq r \leq \frac{1}{12}$, nous obtenons

$$|\mathfrak{p}_2(s,x)| \leq \frac{C}{r^2} \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + CM.$$

De l'estimation précédente, il résulte que pour le terme I_6 de (3.3.15) nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_6 = \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds$$
$$\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} \frac{C}{r^3}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)dyds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{1}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} CM^{\frac{3}{2}}dyds.$$

De plus, comme $|B_{0,2r}| = Cr^3$ et $r < \frac{1}{12} < 1$ on a

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} I_6 \leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds + \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} rCM^{\frac{3}{2}}t \leq \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds + CM^{\frac{3}{2}}t. \tag{3.3.29}$$

Nous avons terminé l'étude du terme I_j avec $1 \leq j \leq 6$ donnée dans (3.3.15). Ainsi, en rassemblant les estimations (3.3.16)-(3.3.19), (3.3.21), (3.3.23) et (3.3.29) dans (3.3.15), et puisque $\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} \frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}_0|^2dy < S$ par (3.3.10) (rappelons aussi que nous avons $R \leq \mathfrak{r}$), nous avons prouvé que pour tout $\mathfrak{r} \leq r < \frac{1}{12}$ nous avons

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} E_r(t) \leq S + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s)ds + \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}} + Ct$$
$$+ Ct + \frac{1}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s)ds + \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s)ds + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds.$$
$$+ \frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s)ds + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds + CM^{\frac{3}{2}}t + \frac{C}{R^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s)ds$$
$$\leq S + Ct + CM^{\frac{3}{2}}t + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds,$$

et nous réécrivons l'estimation précédente comme suit :

$$\sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq \frac{1}{12}} E_r(t) \leq S + \mathfrak{C}_1(M)t + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds. \tag{3.3.30}$$

Étudions maintenant le deuxième terme de la partie de droite de (3.3.14).

- <u>Supposons que $\frac{1}{12} < r \leq \frac{1}{3}$</u> : comme dans le cas précédent, remarquons que d'après (3.3.13), nous avons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq \frac{1}{3}} E_r(t) \leq \sup_{\frac{1}{12}<r\leq \frac{1}{3}} \frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}_0|^2dy + \sup_{\frac{1}{12}<r\leq \frac{1}{3}} \sum_{j=1}^6 I_j. \tag{3.3.31}$$

Pour le terme I_1 de (3.3.31) nous avons $B_{0,2r} \subset B_{0,1}$ puisque $2r \leq \frac{2}{3} < 1$, $\frac{1}{r} < 12$ et $\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} \leq M$ par l'hypothèse (3.3.8), il s'ensuit que

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq \frac{1}{3}} I_1 = \sup_{\frac{1}{12}<r\leq \frac{1}{3}} \frac{C}{r^3}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2dyds \leq C\int_0^t\int_{B_{0,1}} |\vec{u}|^2dyds \leq CMt. \tag{3.3.32}$$

Pour le terme I_2 dans (3.3.31), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et puisque $\frac{1}{r} \leq 12$ et $B_{0,2r} \subset B_{0,1}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_2 &= \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dyds \\ &\leq \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} C\int_0^t \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{\nabla}\wedge\vec{u}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))}\int_0^t \|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2(B_{0,1})}ds.\end{aligned}$$

De plus, puisque $|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}|^2 \leq 2|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la variable temps, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_2 &\leq C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2(B_{0,1})}ds \\ &\leq C\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_t L^2_x(Q_1(1,0))}t^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2_t L^2_x(Q_1(1,0))} < M$ par (3.3.8), $\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < CR < C$ par (3.3.9) (rappelons $R < 1$), nous avons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_2 \leq CM^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3.33}$$

Pour le terme I_3 de (3.3.31), puisque $\frac{1}{r} \leq 12$ et par l'inégalité de Hölder nous avons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_3 = \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}||\vec{u}|dyds \leq C\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}}\int_0^t \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{\omega}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} ds$$

Puis, puisque $B_{0,2r} \subset B_{0,1}$, on a

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_3 \leq C\int_0^t \|\vec{\omega}(s,\cdot)\|_{L^2(B_{0,1})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2(B_{0,1})}ds.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < M$ par (3.3.8) et $\|\vec{\omega}\|_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} < C$, on a

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_3 \leq CM^{\frac{1}{2}}t. \tag{3.3.34}$$

Pour le terme I_4 dans (3.3.31), en utilisant les mêmes arguments que dans (3.3.20) nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_4 = \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}|^3 dyds &\leq \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,2r})}ds \\ &+ \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,2r})}ds.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{r^2} \leq C$ et $B_{0,2r} \subset B_{0,1}$, on obtient

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_4 \leq C\|\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,1})}ds + t\|\vec{u}\|^3_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder ($1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$) dans la variable temps, et puisque $2r < 1$, et $t < 1$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_4 &\leq Ct^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}\left(\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{L^2(B_{0,2r})}ds\right)^{\frac{3}{4}} + t\|\vec{u}\|^3_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}\\ &\leq Ct^{\frac{1}{4}}\|\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^{\frac{3}{2}}_{L^2_t L^2_x(Q_1)} + t\|\vec{u}\|^3_{L^\infty_t L^2_x(Q_1)}.\end{aligned}$$

Comme $\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t L^2_x(Q_1(1,0))} \leq M$ et $\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2_t L^2_x(Q_1(1,0))} \leq M$ par (3.3.8), nous avons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_4 \leq CM^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{2}}t. \tag{3.3.35}$$

Pour le terme I_5 de (3.3.31), rappelons que de (3.3.22), nous obtenons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_5 = \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\mathfrak{p}_1|^{\frac{3}{2}}dyds \leq \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{C}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,3r}} |\vec{u}|^3 dyds.$$

Puisque $3r \leq 1$, nous pouvons appliquer les mêmes arguments que dans (3.3.35), et nous avons

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_5 \leq M^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}} + M^{\frac{3}{2}}t. \tag{3.3.36}$$

Pour le dernier terme I_6 de (3.3.31), on remarque d'abord que par l'estimation (3.3.25) et puisque $\frac{1}{4} \leq 3r$, on obtient

$$|\mathfrak{p}_2(s,x)| \leq C\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{0,3r}} \frac{1}{|y|^4}|\vec{u}|^2dy \leq C\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_{0,\frac{1}{4}}} \frac{1}{|y|^4}|\vec{u}|^2dy.$$

Par conséquent, en utilisant les mêmes arguments que dans (3.3.28), on a $|\mathfrak{p}_2(s,x)| \leq CM$. Puisque $r \leq \frac{1}{3} < 1$, il s'en suit que

$$\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} I_6 = \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} \frac{1}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,2r}} |\mathfrak{p}_2|^{\frac{3}{2}}dyds \leq \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} rCM^{\frac{3}{2}}t \leq CM^{\frac{3}{2}}t. \tag{3.3.37}$$

Ainsi, en rassemblant les estimations (3.3.32)-(3.3.37) dans (3.3.13), puisque $\frac{C}{r}\int_{B_{0,2r}} |\vec{u}_0|^2dy < S$ par (3.3.10), et $t < t^{\frac{1}{2}} < t^{\frac{1}{4}}$ du fait de $t < 1$, il s'en suit que pour tout $\frac{1}{12} \leq r \leq \frac{1}{3}$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} E_r(t) &\leq S + CMt + CM^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} + CM^{\frac{1}{2}}t + CM^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}} + CM^{\frac{3}{2}}t + CM^{\frac{3}{2}}t\\ &\leq S + \mathfrak{C}_2(M)t^{\frac{1}{4}},\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

et ceci termine l'étude de la quantité précédente dans le cas où $\frac{1}{12} < r \leq \frac{1}{3}$.

Ainsi, en appliquant les estimations (3.3.30) et (3.3.38) dans (3.3.14), nous avons prouvé que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) &\leq \sup_{\mathfrak{r}\leq r\leq\frac{1}{12}} E_r(t) + \sup_{\frac{1}{12}<r\leq\frac{1}{3}} E_r(t)\\ &\leq S + \mathfrak{C}_1(M)t + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{R^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}^3_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{r}}(s)ds + S + \mathfrak{C}_2(M)t^{\frac{1}{4}}\\ &\leq 2S + \mathfrak{C}_1(M)t + \mathfrak{C}_2(M)t^{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}^3_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}^{\frac{3}{2}}_{\mathfrak{r}}(s)ds.\end{aligned}$$

Fixons maintenant le temps $T_1 > 0$ tel que

$$T_1 = \min\{1, \frac{S}{2\mathfrak{C}_1}, \frac{S^4}{2\mathfrak{C}_2^4}\}. \tag{3.3.39}$$

Remarquons que pour tout $t < T_1$, on a $\mathfrak{C}_1 t \leq \frac{S}{2}$ et $\mathfrak{C}_2 t^{\frac{1}{4}} \leq \frac{S}{2}$, d'où il s'en suit que

$$\frac{1}{4}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) \leq 3S + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}(s)ds.$$

En observant que si $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}} > 1$ on a $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}} < \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3$ et si $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}} \leq 1$ on a $\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}} < \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}$, il suffit alors d'étudier pour tout $t \leq T_1$ l'expression

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) \leq 12S + \frac{C}{\mathfrak{r}^2}\int_0^t \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(s) + \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}^3(s)ds. \tag{3.3.40}$$

Afin d'estimer l'expression ci-dessus, nous pouvons utiliser l'inégalité de type Gronwall suivante

Lemme 3.3.5. *Soit $f \in L^\infty_{loc}([0, T_1[)$ une fonction telle que pour tout $t \in]0, T_1[$, pour certains $a, b > 0$ et $m \geq 1$, on a*

$$f(t) \leq a + b\int_0^t (f(s) + f^m(s))ds.$$

Il existe alors une constante universelle $\mathfrak{c} > 1$ telle que pour tout $t \in]0, T]$ avec $T = \min\left\{T_1, \frac{\mathfrak{c}}{b(1+a^{m-1})}\right\}$, on a $f(t) \leq 2a$.

Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons à [10, Lemme 2.2]. Maintenant, en appliquant le lemme précédent à l'expression (3.3.40) avec $a = 12S$, $b = \frac{C}{\mathfrak{r}^2}$ et $m = 3$, il existe une constante universelle $\mathfrak{c} > 1$ telle que pour

$$T^* = \min\{T_1, \mathfrak{c}\lambda\mathfrak{r}^2\}, \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{1}{(1+S^2)},$$

nous avons pour tout $0 < t < T^*$ l'estimation

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) \leq 24S.$$

Puisque nous avons $E_{\mathfrak{r}}(t) \leq \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}(t) = \sup_{\mathfrak{r} \leq r \leq \frac{1}{3}} E_r(t)$, nous obtenons finalement

$$E_{\mathfrak{r}}(t) \leq CS, \tag{3.3.41}$$

ce qui termine la preuve du Lemme 3.3.4. ∎

Corollaire 3.3.1. *Sous les hypothèses du lemme 3.3.4, pour tout $R \leq r \leq \frac{1}{3}$, telle que $\sqrt{\lambda}r \leq \sqrt{\frac{T_1}{\mathfrak{c}}}$ où T_1 est donné dans* (3.3.39), *$\lambda = \frac{1}{1+S^2}$ et $\mathfrak{c} > 1$, nous avons*

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 + |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}}dyds < C(S^{\frac{3}{2}} + S).$$

Preuve. Notons tout d'abord que $0 < R < \frac{1}{12}$ est arbitraire et qu'il peut être choisi arbitrairement petit, de sorte que les conditions $R \leq r < \frac{1}{3}$ et $\sqrt{\lambda} r \leq \sqrt{\frac{T_1}{\mathfrak{c}}}$ sont compatibles. Remarquons maintenant qu'à partir de l'estimation (3.3.20), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq \frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,r})}\|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,r})} ds + \frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2} \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,r})} ds \\
\leq \frac{1}{r^2}\sup_{0<s<\lambda r^2} \|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,r})}\int_0^{\lambda r^2} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,r})} ds \\
+ C\lambda \sup_{0<s<\lambda r^2} \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,r})}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder dans la variable temps ($1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$), on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq \frac{C\lambda^{\frac{1}{4}}}{r^{\frac{3}{2}}} \sup_{0<s<\lambda r^2} \|\vec{u}(s,\cdot)\|^{\frac{3}{2}}_{L^2(B_{0,r})} \left(\int_0^{\lambda r^2} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|^2_{L^2(B_{0,r})} ds\right)^{\frac{3}{4}} \\
+ C\lambda \sup_{0<s<\lambda r^2} \|\vec{u}(s,\cdot)\|^3_{L^2(B_{0,r})},
\end{aligned}$$

qui peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq C\lambda^{\frac{1}{4}} \sup_{0<s<\lambda r^2} \left(\frac{1}{r}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^2 dy\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{r}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds\right)^{\frac{3}{4}} \\
+ C\lambda r^{\frac{3}{2}} \sup_{0<s<\lambda r^2} \left(\frac{1}{r}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}(s,y)|^2 dy\right)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Comme $E_r(t) = \sup_{0<s<t} \frac{1}{r}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^2 dy + \frac{1}{r}\int_0^t\int_{B_{0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dyds + \frac{1}{r^2}\int_0^t\int_{B_{0,r}} |p - \mathfrak{h}(t)|^{\frac{3}{2}} dyds$, et si nous écrivons $t = \lambda r^2$, on a

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq C\lambda^{\frac{1}{4}} E_r^{\frac{3}{2}}(\lambda r^2) + C\lambda r^{\frac{3}{2}} E_r^{\frac{3}{2}}(\lambda r^2) \leq C(\lambda^{\frac{1}{4}} + r^{\frac{3}{2}}\lambda) E_r^{\frac{3}{2}}(\lambda r^2).$$

Cependant, puisque $r < 1$ et $\lambda < 1$, nous avons

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq C E_r^{\frac{3}{2}}(\lambda r^2).$$

Puisque $E_r(t)$ est une fonction croissante en t, et que $\mathfrak{c} > 1$ on a $E_r^{\frac{3}{2}}(\lambda r^2) < E_r^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{c}\lambda r^2)$. Ainsi, puisque nous avons considéré $0 < r < 1$ tel que $\mathfrak{c}\lambda r^2 \leq T_1$, et qu'il découle de (3.3.41) que $E_r(\mathfrak{c}\lambda r^2) < CS$, alors

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 dyds \leq C E_r^{\frac{3}{2}}(\mathfrak{c}\lambda r^2) < CS^{\frac{3}{2}}.$$

D'autre part, la définition de E_r nous donne immédiatement

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds \leq E_r(\lambda r^2) \leq E_r(\mathfrak{c}\lambda r^2) \leq CS.$$

En utilisant les deux estimations précédentes, on trouve que pour $\lambda = \frac{1}{1+S^2}$ et pour tout $R \leq r \leq \frac{1}{3}$ tel que $\sqrt{\lambda}r \leq T_1$, on a

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{u}|^3 + |p-\mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds < C(S^{\frac{3}{2}} + S),$$

ce qui termine la preuve du Corollaire 3.3.1. ■

Démonstration du Théorème 3.3.2. Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible de type Leray des équations des fluides micro-polaires (3.1.1) et (3.1.2). Soit $\mathcal{T} > 0$ le temps maximal tel que $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$ et le point $(\mathcal{T}, 0)$ est un point partiellement singulier au sens de la Définition 2.4.1. Supposons que pour un $r_0 > 0$ fixé avec $0 < \mathcal{T} - r_0^2$, on a

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\ \sup_{r\in]0,r_0]}\ \sup_{t\in]\mathcal{T}-r^2,\mathcal{T}]} \frac{1}{r}\int_{B_{x_0,r}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx = \mathfrak{M} < +\infty. \tag{3.3.42}$$

L'objectif consiste à prouver qu'il existe $\epsilon > 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ et $\delta > 0$ de sorte que pour tout $t \in]\mathcal{T}-\delta, \mathcal{T}[$, nous avons

$$\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^3 dx \geq \epsilon. \tag{3.3.43}$$

Tout d'abord, observons qu'il suffit de montrer qu'il existe $\epsilon_* > 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ et $\delta > 0$ de telle sorte que pour tout $t \in]\mathcal{T} - \delta, \mathcal{T}[$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{T}-t}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \geq \epsilon_*, \tag{3.3.44}$$

En effet, si nous avons (3.3.44), par l'inégalité de Hölder ($1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$) nous avons

$$\epsilon_* \leq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{T}-t}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \leq \frac{C}{\sqrt{\mathfrak{S}}}\left(\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^3 dx\right)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui implique (3.3.43) avec $\epsilon = (\epsilon_*)^{\frac{3}{2}}\frac{\mathfrak{S}^{\frac{3}{4}}}{C}$.

Pour prouver (3.3.44), nous allons utiliser un argument de contradiction. Ainsi, supposons que pour tout $\epsilon_* > 0$, pour tout $0 < \mathfrak{S} < 1$ et pour $\delta = \min\{\sqrt{\frac{\mathcal{T}}{2}}, \frac{r_0\mathfrak{S}^{\frac{3}{2}}}{2}\}$, il existe $\mathcal{T} - \delta^2 \leq t_0 \leq \mathcal{T}$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{T}-t_0}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t_0,x)|^2 dx < \epsilon_*. \tag{3.3.45}$$

La stratégie consiste à appliquer un changement d'échelle à la solution $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ afin d'obtenir que le point $(\mathcal{T}, 0)$ soit partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1 nous conduisant à la contradiction souhaitée.

Soit $0 < \mathfrak{S} < 1$ et considérons $\gamma = \sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}$. Remarquons que puisque $\mathcal{T} - \delta^2 < t_0 < \mathcal{T}$ et $\delta^2 \leq r_0^2\mathfrak{S}^3 \leq r_0^2\mathfrak{S}$ (rappelons $0 < \mathfrak{S} < 1$), nous avons

$$\gamma = \sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}} < \sqrt{\frac{\delta^2}{\mathfrak{S}}} < r_0. \tag{3.3.46}$$

Maintenant, nous faisons un changement d'échelle pour les fonctions $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$ de la manière suivante : pour tout $(s,y)\in[0,\mathfrak{S}[\times\mathbb{R}^3$, nous considérons

$$\vec{u}^\gamma(s,y)=\gamma\vec{u}(t_0+\gamma^2 s,\gamma y),\ \ p^\gamma(s,y)=\gamma^2 p(t_0+\gamma^2 s,\gamma y)\ \text{ et }\ \vec{\omega}^\gamma(s,y)=\gamma^2\vec{\omega}(t_0+\gamma^2 s,\gamma y).$$

Rappelons que l'équation (3.1.1) est invariante par ce changement d'échelle.

Nous voulons maintenant appliquer le Lemme 3.3.4 et le Corollaire 3.3.1 afin d'obtenir qu'il existe $\tilde{\epsilon}>0$ et $\rho>0$ tels que

$$\frac{1}{\rho^2}\int_{\mathfrak{S}-\rho^2}^{\mathfrak{S}}\int_{B_{0,\rho}}|\vec{u}^\gamma|^3+|p^\gamma-\mathfrak{h}^\gamma|^{\frac{3}{2}}dyds\leq\tilde{\epsilon},$$

où $\mathfrak{h}^\gamma=\gamma^2\mathfrak{h}(\gamma^2\cdot)$, et $\mathfrak{h}$ est donné par la décomposition locale de la pression (voir le Lemme 3.3.2). Ensuite, en se revenant aux variables $(\vec{u},p)$ et en utilisant la théorie de la régularité ϵ dans le chapitre précédent, nous pourrons déduire que le point $(\mathcal{T},0)$ est partiellement régulier, ce qui est une contradiction.

Ainsi, puisque nous voulons appliquer le Lemme 3.3.4, nous avons besoin d'information sur les données initiales et pour cela, puisque $\vec{u}\in\mathcal{C}(]0,\mathcal{T}[,L^\infty(\mathbb{R}^3))$, nous pouvons considérer $\vec{u}^\gamma_0(\cdot)=\gamma\vec{u}(t_0,\gamma\cdot)$ comme des données initiales telle que $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ est une solution des équations forcées de Navier-Stokes

$$\begin{cases}\partial_t\vec{u}^\gamma=\Delta\vec{u}^\gamma-(\vec{u}^\gamma\cdot\vec{\nabla})\vec{u}^\gamma-\vec{\nabla}p^\gamma+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}^\gamma,\\ \vec{u}^\gamma(0,\cdot)=\vec{u}^\gamma_0.\end{cases}\tag{3.3.47}$$

Remarquons également que puisque $\vec{u}\in\mathcal{C}(]0,\mathcal{T}[,L^\infty(\mathbb{R}^3))$, nous avons que $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ est une solution forte du système ci-dessus, cependant nous voulons déduire que $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ est une solution locale de Leray du système ci-dessus. Pour cela, il sera commode de réécrire $\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}^\gamma=\operatorname{div}(W^\gamma)$ où nous avons

$$W^\gamma=\begin{pmatrix}0&\omega_3^\gamma&-\omega_2^\gamma\\ \omega_1^\gamma&0&-\omega_3^\gamma\\ -\omega_2^\gamma&\omega_1^\gamma&0\end{pmatrix},$$

et nous obtenons ainsi que le couple $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ est une solution du système suivant

$$\begin{cases}\partial_t\vec{u}^\gamma=\Delta\vec{u}^\gamma-(\vec{u}^\gamma\cdot\vec{\nabla})\vec{u}^\gamma-\vec{\nabla}p^\gamma+\frac{1}{2}\operatorname{div}(W^\gamma),\\ \vec{u}^\gamma(0,\cdot)=\vec{u}^\gamma_0.\end{cases}$$

A ce stade, nous pouvons appliquer la théorie des solutions locales de Leray des équations de Navier-Stokes qui est donnée dans le résultat suivant :

Lemme 3.3.6. *Soit $\vec{v}_0$ une donnée initiale et $\mathbb{F}$ un champ tensoriel tel que*

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x_0,1}}|\vec{v}_0(y)|^2dy\leq M^*\quad et\quad\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|\mathbb{F}|^2dyds\leq M^*.$$

Alors, il existe une solution locale de Leray $(\vec{v},q)$ au sens de la Définition 14.1 du livre [61] des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases}\partial_t\vec{v}=\Delta\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}-\vec{\nabla}q+\operatorname{div}(\mathbb{F}),\\ \vec{v}(0,\cdot)=\vec{v}_0,\end{cases}$$

sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$*, telle que* $T=\min\{1,\frac{1}{C(1+M^*)^4}\}$ *et*

$$\sup_{0<t<T}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x,1}}|\vec{v}(t,y)|^2dy+\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_0^T\int_{B_{x,1}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2dy\leq C(M^*).$$

Pour une preuve du lemme précédent, nous nous référons à [61, Théorème 14.1, pg 455]. Comme nous pouvons le voir, avec ce lemme, nous sommes en mesure de construire une solution de Leray locale tant que nous avons les contrôles uniformes suivants sur la donnée initiale $\vec{u_0^\gamma}$ et sur la force externe W^γ :

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x_0,1}}|\vec{u_0^\gamma}(y)|^2dy<+\infty, \tag{3.3.48}$$

et

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|W^\gamma|^2dyds<+\infty. \tag{3.3.49}$$

Étudions la donnée initiale. Puisque $\vec{u_0^\gamma}(\cdot)=\gamma\vec{u}(t_0,\gamma\cdot)$, par un changement de variable, nous obtenons

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x_0,1}}|\vec{u_0^\gamma}(y)|^2dy=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\frac{1}{\gamma}\int_{B_{\gamma x_0,\gamma}}|\vec{u}(t_0,y)|^2dy=\sup_{z\in\mathbb{R}^3}\frac{1}{\gamma}\int_{B_{z,\gamma}}|\vec{u}(t_0,y)|^2dy.$$

D'autre part, rappelons que par (3.3.46) nous avons $\gamma<r_0$ et $\mathcal{T}-\gamma^2<t_0<\mathcal{T}$. Ainsi, par l'hypothèse (3.3.42), nous avons

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^3}\frac{1}{\gamma}\int_{B_{z,\gamma}}|\vec{u}(t_0,y)|^2dy\leq\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\sup_{r\in]0,r_0]}\sup_{\mathcal{T}-r^2\leq t\leq\mathcal{T}}\frac{1}{r}\int_{B_{x_0,r}}|\vec{u}(t,x)|^2dx\leq\mathfrak{M}<+\infty,$$

et nous obtenons le contrôle suivant sur les données initiales $\vec{u_0^\gamma}$

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x_0,1}}|\vec{u_0^\gamma}(y)|^2dy\leq\mathfrak{M}<+\infty.$$

Étudions maintenant la force extérieure W^γ. Puisque $\omega_i^\gamma(\cdot,\cdot)=\gamma^2\omega_i(t_0+\gamma^2\cdot,\gamma\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|W^\gamma|^2dyds&=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}\sum_{i=1}^3 2|\omega_i^\gamma|^2dyds\\&=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}\sum_{i=1}^3 2|\gamma^2\omega_i(t_0+\gamma^2s,\gamma y)|^2dyds.\end{aligned}$$

De plus, par un changement de variable, on a

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|W^\gamma|^2dyds=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\frac{1}{\gamma}\int_{t_0}^{t_0+\gamma^2}\int_{B_{\gamma x_0,\gamma}}\sum_{i=1}^3 2|\omega(s,y)|^2dyds,$$

et puisque $\gamma<r_0$ par (3.3.46), on a

$$\begin{aligned}\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|W^\gamma|^2dyds&\leq C\sup_{z\in\mathbb{R}^3}\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\gamma^2}\frac{1}{\gamma}\gamma^2\int_{B_{z,\gamma}}|\vec{\omega}(t,y)|^2dy\\&\leq Cr_0\sup_{z\in\mathbb{R}^3}\sup_{t_0\leq t\leq t_0+\gamma^2}\int_{B_{z,\gamma}}|\vec{\omega}(t,y)|^2dy.\end{aligned}$$

Puisque $\vec{\omega}\in L^\infty_t L^2_x$, nous obtenons

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3}\int_0^1\int_{B_{x_0,1}}|W^\gamma|^2dyds\leq C\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x}<+\infty,$$

et nous obtenons le contrôle uniforme (3.3.49) sur la force extérieure.

Ainsi, à partir de l'estimation (3.3.48) et du contrôle précédent, nous pouvons appliquer le lemme 3.3.6, et donc pour $T=\min\{1,\frac{1}{C(1+M)^4}\}$ avec $M=M(\mathfrak{M},\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x})>0$, il existe une solution locale de Leray $(\vec{v},q)$ du système (3.3.47) (rappelons $\text{div}(W^\gamma)=\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}^\gamma$) sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$, telle que pour une certaine constante $M_1>0$,

$$\sup_{0<t<T}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{B_{x,1}}|\vec{v}(t,x)|^2dy+\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_0^T\int_{B_{x,1}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2dy\leq M_1. \tag{3.3.50}$$

Il convient de noter que puisque $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ est une solution forte de (3.3.47) par un argument d'unicité faible-forte (voir [61, Théorème 14.7]), il s'en suit que $\vec{u}^\gamma=\vec{v}$ et $p^\gamma=q$ sur $]0,\min(\mathfrak{S},T)[\times\mathbb{R}^3$. Ainsi, au lieu d'étudier $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$ sur $]0,\mathfrak{S}[\times\mathbb{R}^3$, nous appliquerons le Lemme 3.3.4 et le Corollaire 3.3.1 au couple $(\vec{v},q)$ sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$, puis en considérant $\mathfrak{S}\ll 1$ suffisamment petit (afin d'obtenir l'unicité sur l'intervalle $]0,\mathfrak{S}[$), nous pourrons revenir aux variables $(\vec{u}^\gamma,p^\gamma)$.

Vérifions que le triplet $(\vec{v},q,\vec{\omega}^\gamma)$ satisfait les hypothèses du Lemme 3.3.4. Remarquons que puisque $(\vec{v},q)$ est déjà une solution locale de Leray par construction et que nous avons le contrôle (3.3.50), nous devons seulement vérifier les points suivants :

- Nous avons
$$\|\vec{\omega}^\gamma\|^2_{L^\infty(]0,T[,L^2(B_{0,1}))}<C\sqrt{\mathfrak{S}}. \tag{3.3.51}$$
- Pour tout $\mathfrak{r}>0$ tel que $\sqrt{\mathfrak{S}}<\mathfrak{r}<1$, nous avons
$$\sup_{\sqrt{\mathfrak{S}}<\mathfrak{r}\leq 1}\frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{B_{0,\mathfrak{r}}}|\vec{u}^\gamma_0|^2dy<\epsilon_*. \tag{3.3.52}$$

Pour obtenir (3.3.51), puisque $T<1$ par construction et que $\vec{\omega}^\gamma(\cdot,\cdot)=\gamma^2\vec{\omega}(t_0+\gamma^2\cdot,\gamma\cdot)$, en utilisant un changement de variable, nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{\omega}^\gamma\|^2_{L^\infty(]0,T[,L^2(B_{0,1}))} &\leq \|\vec{\omega}^\gamma\|^2_{L^\infty(]0,1[,L^2(B_{0,1}))}\\ &\leq \|\gamma^2\vec{\omega}(t_0+\gamma^2\cdot,\gamma\cdot)\|^2_{L^\infty(]0,1[,L^2(B_{0,1}))}=\gamma\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty(]t_0,t_0+\gamma^2[,L^2(B_{0,\gamma}))}.\end{aligned}$$

Puisque $\vec{\omega}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x$ par hypothèse, nous obtenons $\|\vec{\omega}^\gamma\|^2_{L^\infty(]0,1[,L^2(B0,1))}\leq\gamma\|\vec{\omega}\|^2_{L^\infty_t L^2_x}\leq C\gamma$. De plus, puisque $\mathcal{T}-\delta^2<t_0<\mathcal{T}$, nous avons $\gamma=\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}<\sqrt{\frac{\delta^2}{\mathfrak{S}}}<r_0\mathfrak{S}$ (rappelons que $\delta=\min\{\sqrt{\frac{\mathcal{T}}{2}},\frac{r_0\mathfrak{S}^{\frac{3}{2}}}{2}\}$), et comme $\mathfrak{S}<1$, nous pouvons écrire

$$\|\vec{\omega}^\gamma\|^2_{L^\infty(]0,\mathfrak{S}[,L^2(B_{0,1}))}<C\mathfrak{S}\leq C\sqrt{\mathfrak{S}},$$

qui est l'estimation souhaitée (3.3.51).

Pour obtenir (3.3.52), fixons $\sqrt{\mathfrak{S}} < \mathfrak{r} < 1$. Puisque $\vec{u}^\gamma(0,\cdot) = \gamma\vec{u}(t_0,\gamma\cdot)$ et par le changement de variable $z = \gamma y$, nous avons

$$\int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\vec{u}^\gamma(0,y)|^2 dy = \int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\gamma\vec{u}(t_0,\gamma y)|^2 dy = \frac{1}{\gamma}\int_{B_{0,\gamma\mathfrak{r}}} |\vec{u}(t_0,z)|^2 dz.$$

De plus, puisque $\mathfrak{r} < 1$ et que $\gamma = \sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}$, il découle de l'hypothèse (3.3.45) que

$$\int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\vec{u}^\gamma(0,y)|^2 dy \leq \frac{\sqrt{\mathfrak{S}}}{\sqrt{\mathcal{T}-t_0}} \int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx < \sqrt{\mathfrak{S}}\epsilon_*,$$

Par conséquent, puisque $\sqrt{\mathfrak{S}} < \mathfrak{r}$, on a $\displaystyle\frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\vec{u}^\gamma(0,y)|^2 dy < \epsilon_*$. Comme $\sqrt{\mathfrak{S}} \leq \mathfrak{r} < 1$ est arbitraire, nous concluons que

$$\sup_{\sqrt{\mathfrak{S}}<\mathfrak{r}\leq 1} \frac{1}{\mathfrak{r}}\int_{B_{0,\mathfrak{r}}} |\vec{u}_0^\gamma|^2 dy < \epsilon_*.$$

Ainsi, nous avons prouvé que $(\vec{v}, q, \vec{\omega}^\gamma)$ vérifie les conditions (3.3.50), (3.3.51) et (3.3.52). Ensuite, nous pouvons appliquer le Lemme 3.3.4 et le Corollaire 3.3.1, ce qui nous permet d'obtenir un temps $T_1 = T_1(T,\mathfrak{M}) > 0$, et une constante $\mathfrak{c} > 1$ tels que pour tout $\sqrt{\mathfrak{S}} < r$ avec $\lambda r^2 \leq \frac{T_1}{\mathfrak{c}}$ et $\lambda = \frac{1}{1+\epsilon_*^2}$, nous avons

$$\frac{1}{r^2}\int_0^{\lambda r^2}\int_{B_{0,r}} |\vec{v}(s,y)|^3 + |q - \mathfrak{h}_q|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}}).$$

Maintenant, fixons $\mathfrak{S} \ll 1$ de telle sorte que pour $r = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}}$, nous ayons $\sqrt{\mathfrak{S}} < r$ et $\lambda r^2 < \frac{T_1}{\mathfrak{c}}$. Ainsi, en choisissant $r = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}}$ dans l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}\int_0^{\mathfrak{S}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}}}} |\vec{v}|^3 + |q - \mathfrak{h}_{\mathfrak{q}}|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}}).$$

Maintenant, puisque $\vec{u}^\gamma = \vec{v}$ et $p^\gamma = q$ sur $]0,\mathfrak{S}[\times\mathbb{R}^3$, nous avons

$$\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}\int_0^{\mathfrak{S}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathfrak{S}}{\lambda}}}} |\vec{u}^\gamma|^3 + |p^\gamma - \mathfrak{h}^\gamma|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}}).$$

Ainsi, puisque $\vec{u}^\gamma(s,y) = \gamma\vec{u}(t_0+\gamma^2 s,\gamma y)$ et $p^\gamma(s,y) = \gamma^2 p(t_0+\gamma^2 s,\gamma y)$, nous obtenons (rappelons que $\gamma = \sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\mathfrak{S}}}$)

$$\frac{\lambda}{\mathcal{T}-t_0}\int_{t_0}^{\mathcal{T}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\lambda}}}} |\vec{u}|^3 + |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}}).$$

Puisque $\lambda < 1$, nous avons $B_{0,\sqrt{\mathcal{T}-t_0}} \subset B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t_0}{\lambda}}}$ et nous pouvons donc écrire

$$\frac{\lambda}{\mathcal{T}-t_0}\int_{\mathcal{T}-(\sqrt{\mathcal{T}-t_0})^2}^{\mathcal{T}}\int_{B_{0,\sqrt{\mathcal{T}-t_0}}} |\vec{u}|^3 + |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}}),$$

qui peut être réécrite comme suit

$$\frac{1}{(\sqrt{\mathcal{T}-t_0})^2}\int_{\mathcal{T}-(\sqrt{\mathcal{T}-t_0})^2}^{\mathcal{T}}\int_{B_{0,\sqrt{\mathcal{T}-t_0}}} |\vec{u}|^3 + |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds \leq C\frac{(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}})}{\lambda}.$$

Ainsi, puisque $\lambda = \frac{1}{1+\epsilon_*^2}$ et que $0 < \epsilon_* \ll 1$ peut être considéré suffisamment petit, nous pouvons trouver $0 < \tilde{\epsilon} \ll 1$ tel que $C(\epsilon_* + \epsilon_*^{\frac{3}{2}})\frac{1}{\lambda} < \tilde{\epsilon}$. Pour $\rho = \sqrt{\mathcal{T} - t_0}$, nous obtenons

$$\frac{1}{\rho^2}\int_{\mathcal{T}-\rho^2}^{\mathcal{T}}\int_{B_{0,\rho}} |\vec{u}(s,y)|^3 + |p - \mathfrak{h}|^{\frac{3}{2}} dyds < \tilde{\epsilon}.$$

Maintenant, puisque $(\vec{u}, p - \mathfrak{h}, \vec{\omega})$ est également une solution partielle appropriée des équations des fluides micro-polaires, nous pouvons appliquer le Théorème 2.3.2, page 106, ce qui implique que $(\mathcal{T}, 0)$ est un point partiellement régulier au sens de la Définition 2.4.1. Cela contredit le fait que $(\mathcal{T}, 0)$ est partiellement singulier selon l'hypothèse.

Nous avons donc prouvé qu'il existe $\epsilon_* > 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M})$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $t \in]\mathcal{T} - \delta, \mathcal{T}[$, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{T} - t}}\int_{B_{0,\sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx \geq \epsilon_*.$$

ce qui, comme mentionné précédemment, implique l'effet de concentration de la norme L^3 de la vitesse autour du point singulier $(\mathcal{T}, 0)$. Cela termine la preuve du Théorème 3.3.2. ■

Remarquons maintenant que dans la dernière section, nous nous sommes concentrés sur la relation entre la variable $\vec{u}$ et les points partiellement singuliers qui, rappelons-le, sont les points où $\vec{u}$ n'est pas bornée (voir Définition 2.4.1, page 129). En particulier, nous espérons qu'à partir de ce type de résultat, il sera possible dans le futur d'obtenir également des estimations quantitatives d'explosion de la norme L^3 comme dans [7]. D'autre part, l'étude de la variable $\vec{\omega}$ et des points où cette variable est non bornée est aussi un axe de recherche possible.

Finissons ce chapitre en rappelant que nous nous sommes focalisés sur l'étude de la régularité des équations micro-polaires évolutives (2.1.1) et (2.3.67), en soulignant l'effet dominant de la vitesse tel que défini dans la Définition 2.1.1, page 38. D ans le chapitre suivant, nous changerons notre axe d'étude et nous nous concentrerons sur la relation entre les variables $(\vec{u}, \vec{\omega})$ pour les équations micro-polaires stationnaires.

4 Les équations micro-polaires stationnaires

4.1. Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'interdépendance des variables des équations des fluides micro-polaires stationnaires incompressibles. Plus précisément, nous allons étudier le système suivant

$$\begin{cases} -\left(\upsilon + \frac{\nu}{2}\right)\Delta\vec{u} & = -(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \nu\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ -(\beta+\gamma)\Delta\vec{\omega} & = -(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} + (\alpha + \frac{\beta}{3} - \gamma)\vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \nu\vec{\omega} + \nu\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \vec{g}, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où nous rappelons que $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ représente la vitesse du fluide, $p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression interne et $\vec{\omega} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la vitesse de micro-rotation. De plus, nous considérons $\vec{f}$ et $\vec{g}$, deux forces externes connues telle que $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, et les paramètres positifs α, β, γ, ν et υ représentent des constantes de viscosité liées aux propriétés du fluide.

Il est important de noter que, contrairement aux chapitres précédents où nous avons étudié les critères de régularité pour le cas évolutif, les constantes de viscosité n'ont joué aucun rôle déterminant. Cependant, dans le cas stationnaire, elles peuvent plus facilement influencer le comportement de la solution.

En effet, dans l'article [71] où le problème d'existence et d'unicité du système (4.1.1) a été étudié sur des ensembles bornés $\Omega \subset \mathbb{R}$ avec des conditions de Dirichlet nulles, l'unicité est obtenue sous la condition que la viscosité υ soit suffisamment grande. D'autre part, si l'on considère le même problème mais avec des données initiales non régulières sur le bord de Ω, c'est-à-dire $(\vec{u}, \vec{\omega}) = (h_1, h_2) \in L^2$ sur le bord de Ω, nous pouvons citer l'article [71] où l'existence a été déduite ainsi que l'unicité si $\upsilon \gg 1$. Enfin, nous pouvons citer l'article [32] où l'existence et l'unicité sont étudiées dans le cas de domaines extérieurs quand la viscosité υ est grande.

Nous pouvons également citer l'article [101] où il a été observé numériquement que si la viscosité de micro-rotation ν est grande, il existe un effet de ralentissement sur la vitesse de translation, tandis que la vitesse de micro-rotation $\vec{\omega}$ diminue avec l'augmentation de la viscosité υ. Dans l'article [55] des phénomènes similaires sont démontrés numériquement dans d'autres types d'expériences. Nous observons donc que les paramètres de viscosité peuvent jouer un rôle important dans le système (4.1.1).

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système suivant

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} = -(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ -\Delta\vec{\omega} = -(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{\nabla}\operatorname{div}(\vec{\omega}) - \mathfrak{m}\vec{\omega} + \vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \vec{g}, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

où $\mathfrak{m} \gg 1$ est une constante dont le rôle est essentiellement technique mais qui est liée d'une certaine aux constantes de viscosité ν et υ. Nous allons tout d'abord montrer l'existence de solutions faibles $(\vec{u},\vec{\omega})$ dans l'espace naturel d'énergie $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\times H^1(\mathbb{R}^3)$ et nous allons étudier leurs propriétés. En particulier, nous verrons que ces solutions sont régulières et nous mettrons en lumière l'influence d'une variable sur l'autre. Il est important de remarquer que comme $\vec{\omega}$ n'est pas à divergence nulle, l'étude de la deuxième équation de (4.1.2) nécessitera un traitement différent.

Observons en plus qu'afin d'obtenir l'existence de solutions, nous devrons passer par un argument de compacité, ce qui ne nous permet pas de conclure des résultats d'unicité. Pour surmonter ce problème, et en suivant le travail pionnier de Galdi dans [40] pour les équations de Navier-Stokes stationnaires, nous montrerons que si nous supposons une information supplémentaire, sous la forme d'un espace de Banach approprié E qui fournit d'une certaine décroissance à l'infini, nous pouvons obtenir un résultat d'unicité. Ces résultats sont connus dans la littérature comme des théorèmes de "*type Liouville*". Ce type de résultat a été étudiée intensivement dans [24], [49], [56] et [92] et reste encore un problème largement ouvert.

Concernant le problème d'unicité pour les équations micro-polaires stationnaires, nous pouvons citer l'article [54] où l'unicité des solutions a été obtenue en considérant des conditions supplémentaires d'intégrabilité pour *toutes* les variables. Néanmoins, nous allons voir ici qu'il est possible de se débarrasser de toutes les hypothèses sur $\vec{\omega}$. En fait, nous verrons que grâce à la structure intrinsèque du système micro-polaire nous pouvons considérer une séparation de l'information entre les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$.

En récapitulant, dans la première Section 4.2, nous montrerons l'existence de solutions faibles dans l'espace d'énergie $(\vec{u},\vec{\omega})\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\times H^1(\mathbb{R}^3)$ et ensuite nous étudierons la régularité de ces solutions. Enfin, dans la Section 4.3, nous aborderons le problème d'unicité des solutions.

4.2. Existence et régularité des solutions faibles

Tout d'abord, nous déduisons l'existence de solutions faibles pour le système micro-polaire (4.1.2).

4.2.1. Existence des solutions faibles

Le principal résultat de cette section est le suivant :

Théorème 4.2.1 (Existence)**.** *Soient* $\vec{f},\vec{g}\in\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)\cap\dot{H}^{-2}(\mathbb{R}^3)$ *deux forces externes avec* $\operatorname{div}(\vec{f})=0$ *mais* $\operatorname{div}(\vec{g})\neq 0$*. Alors, il existe* $\mathfrak{m}_1>0$ *(cf.* (4.2.17)*) tel que pour tout* $\mathfrak{m}\geq\mathfrak{m}_1$*, il existe au moins une solution faible* $(\vec{u},p,\vec{\omega})$ *des équations micro-polaires stationnaires* (4.1.2) *telle que* $\vec{u}\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$*,* $\vec{\omega}\in H^1(\mathbb{R}^3)$ *et* $p\in\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$*.*

Pour démontrer ce résultat relativement classique, nous commençons par une régularisation d'hyperviscosité du système (4.1.2) et nous étudions l'existence de solutions en utilisant le théorème de point fixe de Schaefer. Ensuite, en utilisant des estimations *a priori*, et un argument de compacité nous pouvons obtenir une solution du problème (4.1.2).

Démonstration du Théorème 4.2.1. Comme $\text{div}(\vec{u}) = \text{div}(\vec{f}) = 0$, nous pouvons appliquer le projecteur de Leray à la première équation de (4.1.2) et nous obtenons

$$\begin{cases} 0 = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}] + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega} + \vec{f}, \\ \\ 0 = \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}\,\text{div}(\vec{\omega}) - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \mathfrak{m}\vec{\omega} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{u} + \vec{g}. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Notons que la pression p est absente du système précédent, mais nous pouvons l'obtenir à partir de la formule suivante

$$p = \frac{1}{(-\Delta)}\left(\text{div}(\text{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))\right). \tag{4.2.2}$$

Maintenant, pour $R > 1$, nous définissons la fonction auxiliaire $\theta_R(x) = \theta(\frac{x}{R})$ où $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est une fonction régulière telle que $0 \le \theta(x) \le 1$, $\theta(x) = 1$ pour $|x| \le 1$ et $\theta(x) = 0$ pour $|x| > 2$. Notons en particulier que pour $1 \le p \le +\infty$, nous avons

$$\|D^\alpha\theta_R\|_{L^p} \le R^{-|\alpha|+\frac{3}{p}}\|D^\alpha\theta\|_{L^p}, \tag{4.2.3}$$

en particulier, nous avons

$$\|\theta_R\|_{L^\infty} \le 1. \tag{4.2.4}$$

Ensuite, pour $0 < \epsilon < 1$, nous considérons la régularisation d'hyperviscosité suivante des équations (4.2.1)

$$\begin{cases} 0 = -\epsilon\Delta^2\vec{u} + \Delta\vec{u} - \mathbb{P}\big[\big((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\big)(\theta_R\vec{u})\big] + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \vec{f}, \\ \\ 0 = -\epsilon\Delta^2\vec{\omega} + \Delta\vec{\omega} + \vec{\nabla}(\theta_R\,\text{div}(\vec{\omega})) - \big((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\big)(\theta_R\vec{\omega}) - \mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + \vec{g}, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

où $\Delta^2\vec{\phi} = \Delta(\Delta\vec{\phi})$. Observons que si nous laissons $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, nous retrouvons formellement le problème initial (4.2.1).

Ainsi, si l'on définit $\vec{U} = \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}$, alors le système ci-dessus peut être réécrit sous la forme suivante

$$\vec{U} = T_{R,\epsilon}(\vec{U}), \tag{4.2.6}$$

où

$$T_{R,\epsilon}(\vec{U}) = \frac{1}{[\epsilon\Delta^2 + (-\Delta)]}\begin{pmatrix} -\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right] + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \vec{f} \\ \vec{\nabla}(\theta_R div(\vec{\omega})) - \left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega}) - \mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + \vec{g}\end{pmatrix}. \tag{4.2.7}$$

La stratégie consiste maintenant à appliquer un théorème de point fixe à l'opérateur $T_{\epsilon,R}$ afin d'obtenir une solution du problème régularisé (4.2.6). Pour cela, nous utiliserons le résultat suivant (voir le Théorème 16.1 dans [61]) :

Lemme 4.2.1 (Schaefer). *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E$ une application continue et compacte. S'il existe une constante $M > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $e = \lambda T(e)$ implique $\|e\|_E \le M$, alors il existe au moins un élément $e \in E$ tel que $T(e) = e$.*

Ainsi, pour obtenir une solution au problème (4.2.6), il suffit de prouver que l'opérateur $T_{R,\epsilon}$ donné dans (4.2.7) vérifie les hypothèses du Lemme 4.2.1 ci-dessus. Pour cela, nous diviserons l'étude en trois propositions : d'abord, nous étudierons la continuité de l'application $T_{R,\epsilon}$, puis nous verrons que l'opérateur est compact. Enfin, nous obtiendrons des estimations a priori qui nous permettront d'obtenir le résultat souhaité.

Pour cela, nous considérons l'espace $E = \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$, muni de la norme

$$\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{\dot{H}^1} + \sqrt{\epsilon}\|\cdot\|_{\dot{H}^2},$$

et nous définissons le sous-espace E_σ de E par

$$E_\sigma = \big\{\vec{\phi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{\phi} \in E,\ \operatorname{div}(\vec{\phi}) = 0\big\},$$

cet espace sera muni de la même norme $\|\cdot\|_E$, mais par souci de clarté, il sera dénoté par $\|\cdot\|_{E_\sigma}$.

Proposition 4.2.1 (Continuité)**.** *Dans le cadre général du Théorème 4.2.1, l'application $T_{R,\epsilon}$ définie dans* (4.2.7) *est continue dans l'espace $E_\sigma \times E$.*

Preuve. Nous allons étudier la continuité de l'application $T_{R,\epsilon}$ dans l'espace fonctionnel $E_\sigma \times E$, muni de la norme $\|(\vec{u}, \vec{\omega})\|_{E_\sigma \times E} = \|\vec{u}\|_{E_\sigma} + \|\vec{\omega}\|_E$. Observons que nous avons

$$\|T_{R,\epsilon}(\vec{U})\|_{E_\sigma\times E} =$$
$$\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]} \begin{pmatrix} -\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right] + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}) + \vec{f} \\ \vec{\nabla}(\theta_R \operatorname{div}(\vec{\omega})) - \left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega}) - \mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}) + \vec{g} \end{pmatrix} \right\|_{E_\sigma\times E},$$

et donc nous écrivons

$$\begin{aligned} \|T_{R,\epsilon}(\vec{U})\|_{E_\sigma\times E} \leq\ & \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{E_\sigma}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}}_{(2)} \\ & + \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\vec{f}\right\|_{E_\sigma}}_{(3)} + \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R \operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{E}}_{(4)} \\ & + \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_{E}}_{(5)} + \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{E}}_{(6)} \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right\|_{E}}_{(7)} + \underbrace{\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\vec{g}\right\|_{E}}_{(8)}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Avant de passer à l'étude des termes ci-dessus, nous énonçons un lemme qui sera utile dans la suite

Lemme 4.2.2. *Soient $0 < \epsilon < 1$ et $1 \leq \sigma \leq 2$ deux paramètres. Alors, pour toute fonction $\vec{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ il existe une constante $C > 0$ telle que nous avons l'estimation suivante*

$$\left\| \frac{(-\Delta)^\sigma}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]}\vec{\phi}\right\|_{L^2} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\vec{\phi}\|_{L^2}.$$

En effet, comme le symbole de Fourier associé à l'opérateur $\dfrac{(-\Delta)^{\sigma}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}$ est $\frac{|\xi|^{2\sigma}}{\epsilon|\xi|^4+|\xi|^2}$, et comme $1\leq \sigma\leq 2$ nous obtenons facilement le contrôle uniforme par rapport à σ par $\frac{C}{\epsilon}$ annoncé dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Maintenant en utilisant le lemme précédent nous pouvons étudier chaque terme dans (4.2.8) :

- Pour le premier terme de l'expression (4.2.8), nous avons :

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{E_\sigma}=\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{\dot{H}^1}$$
$$+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{\dot{H}^2}.$$

Maintenant, comme le projecteur de Leray est borné dans $\dot{H}^1$ et commute avec $\frac{1}{\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)}$, et en introduisant les opérateurs $(-\Delta)$ et $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{E_\sigma}\\
\leq\ &\left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^1}\\
&+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^2},
\end{aligned}$$

et en appliquant le Lemme 4.2.2 avec σ égal à 1 et $\frac{3}{2}$ respectivement, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{E_\sigma}\\
&\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^1}+\left(\frac{C}{\epsilon}\right)\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^2}\\
&\leq C\left\|\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^{-1}}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\left\|\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^{-1}}\\
&\leq\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\left\|\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^{-1}}.
\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

Par l'inclusion de Hardy-Littlewood-Sobolev $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, l'inégalité de Hölder avec $\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ et (4.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|\left[(\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right](\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C\sum_{i=1}^{3}\|(\theta_R u_i)\,\partial_{x_i}(\theta_R\vec{u})\|_{L^{\frac{6}{5}}}\leq C\sum_{i=1}^{3}\|\theta_R u_i\|_{L^3}\|\partial_{x_i}(\theta_R\vec{u})\|_{L^2}\\
&\leq C\sum_{i=1}^{3}\|\theta_R\|_{L^6}\|u_i\|_{L^6}\left(\|\partial_{x_i}\theta_R\|_{L^3}\|\vec{u}\|_{L^6}+\|\theta_R\|_{L^\infty}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\right)\\
&= C\sum_{i=1}^{3}R^{\frac{1}{2}}\|\theta\|_{L^6}\|u_i\|_{L^6}\left(\|\partial_{x_i}\theta\|_{L^3}\|\vec{u}\|_{L^6}+\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. Par l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous obtenons facilement l'estimation suivante

$$\left\|\left[(\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right](\theta_R\vec{u})\right\|_{\dot{H}^{-1}}\leq C_R\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1},$$

donc, nous obtenons

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\right\|_{E_\sigma}\leq C_{R,\epsilon}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\leq C_{R,\epsilon}\|\vec{u}\|_{E_\sigma}\|\vec{u}\|_{E_\sigma}. \quad (4.2.10)$$

- Pour le terme (2) dans (4.2.8), en utilisant l'identité $\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})=\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})-\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)$, nous avons,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}\leq&\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^1}\\&+\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^1}\\&+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^2}\\&+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^2},\end{aligned}$$

et en introduisant les opérateurs $(-\Delta)$ et $(-\Delta)^{\frac{3}{2}}$ dans les termes ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}\\&\quad\leq\left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^1}+\left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^1}\\&+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^2}+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, par le Lemme 4.2.2 nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}\leq&\, C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^1}+C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^1}\\&+\frac{C}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^2}+\frac{C}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\right\|_{\dot{H}^2}.\end{aligned}$$

Puisque les transformées de Riesz sont bornées dans les espaces de Sobolev homogènes, nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}&\leq C\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^2}+C\|\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\|_{\dot{H}^{-1}}\\&\quad+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^2}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\|_{\dot{H}^{-1}}\\&\leq C\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^2}+C\|\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\|_{L^{\frac{6}{5}}}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^2}\\&\quad+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\vec{\omega}\wedge\vec{\nabla}(\theta_R^2)\|_{L^{\frac{6}{5}}}, \quad (4.2.11)\end{aligned}$$

où, dans la dernière inégalité, nous avons utilisé à nouveau l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, par les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$ et (4.2.3) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma} &\leq \left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R^2\|_{L^3}\|\vec{\omega}\|_{L^6}+\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\vec{\omega}\|_{L^6}\|\vec{\nabla}(\theta_R^2)\|_{L^{\frac{3}{2}}}\\ &\leq \left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)R\|\theta\|_{L^3}\|\vec{\omega}\|_{L^6}+2\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)R\|\vec{\omega}\|_{L^6}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

et en utilisant l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\subset L^6(\mathbb{R}^3)$ nous avons

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\right\|_{E_\sigma}\leq C_{R,\epsilon}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}\leq C_{R,\epsilon}\|\vec{\omega}\|_E. \tag{4.2.12}$$

- La quantité (3) dans (4.2.8) est traitée comme suit :

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{f}\right\|_{E_\sigma}=\left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{f}\right\|_{\dot{H}^1}+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{\Delta^2}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^2}\vec{f}\right\|_{\dot{H}^2},$$

et par le Lemme 4.2.2 nous obtenons

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{f}\right\|_{E_\sigma}\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{f}\right\|_{\dot{H}^1}+\frac{C}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^2}\vec{f}\right\|_{\dot{H}^2}\leq C\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-2}}<+\infty,$$

et cette quantité est bornée par l'hypothèse sur la force extérieure $\vec{f}$.

- Pour le terme (4) de (4.2.8), nous écrivons :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E &= \left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^2}.\end{aligned}$$

Donc, par le Lemme 4.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E &\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\frac{C}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^2},\end{aligned}$$

et puisque les transformées de Riesz sont bornées dans les espaces de Sobolev et (4.2.3), nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E &\leq C\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2}\\ &= \left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2}\\ &\leq \left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}\\ &\leq \left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E\leq C_\epsilon\|\vec{\omega}\|_E.$$

- Le terme (5) de (4.2.8) est donné par $\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_E$ et il peut être traité de la même manière que le premier terme de (4.2.8) : en effet, avec les mêmes arguments nous obtenons (voir l'estimation (4.2.10)) :

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_E \leq C_{R,\epsilon}\|\vec{u}\|_{E_\sigma}\|\vec{\omega}\|_E.$$

- Pour le terme (6) de (4.2.8), nous écrivons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_E &= \left\|\frac{(-\Delta)}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^2},\end{aligned}$$

et en appliquant encore une fois le Lemme 4.2.2 nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_E &\leq C\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^1}+\frac{C}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^2}\\ &\leq \mathfrak{m}\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{\dot{H}^{-1}}.\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

En utilisant l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, par les inégalités de Hölder (avec $\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$) et par les inégalités de Sobolev, nous pouvons écrire

$$\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{\dot{H}^{-1}}\leq\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^{\frac{6}{5}}}\leq\|\theta_R^2\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\vec{\omega}\|_{L^6}\leq R^2\|\theta\|_{L^{\frac{3}{2}}}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1},$$

et l'on en déduit

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_E\leq C_{R,\epsilon}\mathfrak{m}\|\vec{\omega}\|_E.$$

- Le terme (7) de (4.2.8) peut être traité comme la quantité (2) (voir (4.2.12)) et nous avons

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\right\|_E\leq C_{R,\epsilon}\|\vec{u}\|_{E_\sigma}.$$

- Enfin, la quantité (8) de (4.2.8) est traitée de la même manière que le terme (3) et nous obtenons

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{g}\right\|_E\leq C\|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-2}}<+\infty,$$

par l'hypothèse sur la force extérieure $\vec{g}$.

Avec toutes les estimations précédentes pour les termes (1)-(8) de (4.2.8), nous en déduisons finalement la continuité de l'application $T_{R,\epsilon}$ dans l'espace $E_\sigma\times E$ et la preuve de la Proposition 4.2.1 est terminée. ■

Proposition 4.2.2 (Compacité)**.** *Dans le cadre général du Théorème 4.2.1, l'application $T_{R,\epsilon}$ définie dans* (4.2.7) *est compacte.*

Preuve. Pour montrer la compacité de l'application $T_{R,\epsilon}$, on considère désormais une suite bornée $(\vec{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $E_\sigma \times E$ et on va montrer qu'il existe une sous-suite $(T_{R,\epsilon}(\vec{U}_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $E_\sigma \times E$.

Tout d'abord, remarquons que comme la suite $(\theta_R \vec{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée en $E_\sigma \times E$, et $R > 0$ est fixé, nous pouvons utiliser le lemme de Rellich-Kondrachov (voir le Théorème 9.16 de [11]) et donc il existe une sous-suite $(\theta_R \vec{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ pour $1 \leq p < 6$. Par conséquent, afin d'en déduire la compacité de l'opérateur $T_{R,\epsilon}$, nous devons borner chaque terme de (4.2.8) par une norme L^p_{loc} appropriée.

Même si certains des calculs sont liés à ceux effectués dans la proposition 4.2.1 précédente, nous donnons ici tous les détails. Remarquons en particulier que les termes (3) et (8) de (4.2.8) étant reliés aux forces externes, nous n'avons pas besoin de les étudier.

- Pour le premier terme de (4.2.8), en suivant les mêmes idées données dans (4.2.9), nous obtenons l'estimation suivante
$$\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]} \mathbb{P}\left[\left((\theta_R \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \right) (\theta_R \vec{u}) \right] \right\|_{E_\sigma} \leq \left(C + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \right) \left\| \left((\theta_R \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \right) (\theta_R \vec{u}) \right\|_{\dot{H}^{-1}}. \quad (4.2.14)$$
Nous utilisons maintenant l'identité (rappelons que $\vec{u}$ est a divergence nulle)
$$\left((\theta_R \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \right) (\theta_R \vec{u}) = \operatorname{div}(\theta_R^2 (\vec{u} \otimes \vec{u})) - \theta_R (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta_R) \vec{u},$$
pour écrire
$$\begin{aligned} \left\| \left((\theta_R \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \right) (\theta_R \vec{u}) \right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \| \operatorname{div}(\theta_R^2 (\vec{u} \otimes \vec{u})) \|_{\dot{H}^{-1}} + \| \theta_R (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta_R) \vec{u} \|_{\dot{H}^{-1}} \\ &\leq C \| \theta_R^2 (\vec{u} \otimes \vec{u}) \|_{L^2} + \| \theta_R (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta_R) \vec{u} \|_{\dot{H}^{-1}}. \end{aligned}$$
Par les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ pour le premier terme ci-dessus et par l'inclusion d'espace $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et l'inégalité de Hölder avec $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ pour la deuxième quantité ci-dessus et (4.2.3), on a
$$\begin{aligned} \left\| \left((\theta_R \vec{u}) \cdot \vec{\nabla} \right) (\theta_R \vec{u}) \right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C \| \theta_R^2 \|_{L^{10}} \| \vec{u} \|_{L^5(B_R)} \| \vec{u} \|_{L^5(B_R)} + \| \theta_R (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta_R) \vec{u} \|_{L^{\frac{6}{5}}} \\ &\leq C R^{\frac{3}{10}} \| \theta \|_{L^{10}} \| \vec{u} \|_{L^5(B_R)} \| \vec{u} \|_{L^5(B_R)} + \| \theta \|_{L^3} \| \vec{u} \|_{L^4(B_R)} \| \vec{\nabla} \theta \|_{L^\infty} \| \vec{u} \|_{L^4(B_R)}, \end{aligned}$$
et l'on obtient ainsi le contrôle souhaité avec des normes L^p_{loc} avec $1 \leq p < 6$.
- Pour le terme (2) de (4.2.8) nous avons, d'après (4.2.11)
$$\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]} \theta_R^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \right\|_{E_\sigma} \leq C \| \theta_R^2 \vec{\omega} \|_{L^2} + C \| \vec{\omega} \wedge \vec{\nabla}(\theta_R^2) \|_{L^{\frac{6}{5}}} + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \| \theta_R^2 \vec{\omega} \|_{L^2} + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \| \vec{\omega} \wedge \vec{\nabla}(\theta_R^2) \|_{L^{\frac{6}{5}}},$$
et d'après (4.2.3), nous en déduisons facilement l'estimation
$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2 + (-\Delta)]} \theta_R^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}) \right\|_{E_\sigma} &\leq C \| \theta_R^2 \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^2(B_R)} + C \| \vec{\nabla}(\theta_R^2) \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)} \\ &\quad + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \| \theta_R^2 \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^2(B_R)} + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \| \vec{\nabla}(\theta_R^2) \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)} \\ &\leq C \| \vec{\omega} \|_{L^2(B_R)} + \frac{C}{R} \| \vec{\nabla} \theta \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)} \\ &\quad + \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \| \vec{\omega} \|_{L^2(B_R)} + \frac{C}{\sqrt{\epsilon} R} \| \vec{\nabla} \theta \|_{L^\infty} \| \vec{\omega} \|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

ce qui est l'inégalité souhaitée en termes de normes L^p_{loc} avec $1 \leq p < 6$.

- Pour le terme (4) de (4.2.8), nous écrivons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E &= \left\|\frac{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^1}\\ &+\sqrt{\epsilon}\left\|\frac{(-\Delta)^2}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\frac{1}{(-\Delta)^2}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^2},\end{aligned}$$

et donc, par le Lemme 4.2.2 nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_E &\leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{3}{2}}}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\left\|\frac{1}{(-\Delta)^2}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\right\|_{\dot{H}^2}\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^{-1}}+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^{-1}}\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^{-1}},\end{aligned}$$

où, dans la dernière estimation, nous avons utilisé le caractère borné des transformées de Riesz dans les espaces de Sobolev. Nous utilisons maintenant l'identité $\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})=\operatorname{div}(\theta_R\vec{\omega})-\vec{\nabla}\theta_R\cdot\vec{\omega}$ et nous avons (par l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$)

$$\begin{aligned}\|\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \|\operatorname{div}(\theta_R\vec{\omega})\|_{\dot{H}^{-1}}+\left\|\vec{\nabla}\theta_R\cdot\vec{\omega}\right\|_{\dot{H}^{-1}}\leq\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}+\left\|\vec{\nabla}\theta_R\cdot\vec{\omega}\right\|_{L^{\frac{6}{5}}}\\ &\leq \|\theta_R\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{L^2(B_R)}+\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)}\\ &\leq \|\vec{\omega}\|_{L^2(B_R)}+\frac{1}{R}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)}\end{aligned}$$

qui est le contrôle souhaité en fonction de normes L^p_{loc} avec $1\leq p<6$.

- La quantité (5) de (4.2.8) est traitée comme suit : par les mêmes arguments utilisées dans (4.2.14), nous pouvons écrire

$$\left\|\frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_E\leq\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\left\|\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^{-1}}.$$

Comme $\vec{u}$ est à divergence nulle nous avons toujours l'identité

$$\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})=\operatorname{div}(\theta_R^2(\vec{\omega}\otimes\vec{u}))-\theta_R(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta_R)\vec{\omega},$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq \left\|\operatorname{div}(\theta_R^2(\vec{\omega}\otimes\vec{u}))\right\|_{\dot{H}^{-1}}+\left\|\theta_R(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta_R)\vec{\omega}\right\|_{\dot{H}^{-1}}\\ &\leq C\left\|\theta_R^2(\vec{\omega}\otimes\vec{u})\right\|_{L^2}+C\left\|\theta_R(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta_R)\vec{\omega}\right\|_{L^{\frac{6}{5}}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé encore une fois le caractère borné des transformées de Riesz dans les espaces de Sobolev ainsi que l'intégration $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)\subset\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Par les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{2}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ et $\frac{5}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ et (4.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|(\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\,(\theta_R\vec{\omega})\right\|_{\dot{H}^{-1}} &\leq C\|\theta_R^2\|_{L^{10}}\|\vec{\omega}\|_{L^5(B_R)}\|\vec{u}\|_{L^5(B_R)}+C\|\theta_R\|_{L^3}\|\vec{u}\|_{L^4(B_R)}\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{L^4(B_R)}\\ &\leq CR^{\frac{3}{10}}\|\theta\|_{L^{10}}\|\vec{\omega}\|_{L^5(B_R)}\|\vec{u}\|_{L^5(B_R)}+C\|\theta\|_{L^3}\|\vec{u}\|_{L^4(B_R)}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{L^4(B_R)},\end{aligned}$$

et nous obtenons les estimations nécessaires avec des normes L^p_{loc} avec $1\leq p<6$.

- Pour le terme (6) de (4.2.8), par l'estimation (4.2.13) nous obtenons facilement (en utilisant l'injection $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$)

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\right\|_E &\leq \mathfrak{m}\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{\dot{H}^{-1}} \leq \mathfrak{m}\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\theta_R^2\vec{\omega}\|_{L^{\frac{6}{5}}}\\ &\leq \mathfrak{m}\left(C+\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right)\|\vec{\omega}\|_{L^{\frac{6}{5}}(B_R)},\end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi le contrôle souhaité.
- Pour la quantité (7) de (4.2.8), il suffit de procéder comme le deuxième terme de (4.2.8) et d'appliquer les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir l'estimation (4.2.15).

Nous avons obtenu des contrôles appropriés pour chacun des termes de (4.2.8) en fonction de normes L^p_{loc} avec $1 \leq p < 6$, à partir desquels par le théorème de Rellich-Kondrachov nous obtenons la compacité de l'application $T_{R,\epsilon}$. La preuve de la Proposition 4.2.2 est ainsi terminée. ■

Nous avons prouvé la continuité et la compacité de l'application $T_{R,\epsilon}$ et afin d'appliquer le Théorème 4.2.1, nous devons maintenant établir quelques contrôles uniformes

Proposition 4.2.3 (Estimations *a priori.*)**.** *Dans le cadre général du Théorème 4.2.1, il existe* $\mathfrak{m}_1 > 0$ *donné dans* (4.2.17) *tel que pour tout* $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$*, il existe une constante* $M > 0$ *tel que, pour tout* $\lambda \in [0,1]$*, si* $\vec{U} = \lambda T_{R,\epsilon}(\vec{U})$ *nous avons* $\|\vec{U}\|_{E_\sigma \times E} \leq M$*.*

Preuve. Soit $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$ avec $\mathfrak{m}_1$ qui sera fixé plus tard. Puisque nous avons $\vec{U} = \lambda T_{R,\epsilon}(\vec{U})$ pour tout $\lambda \in [0,1]$, en utilisant les expressions (4.2.6)-(4.2.7) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \lambda T_{R,\epsilon}(\vec{U})\\ \begin{pmatrix}\vec{u}\\ \\ \vec{\omega}\end{pmatrix} &= \frac{\lambda}{[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]}\begin{pmatrix} -\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]+\frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})+\vec{f}\\ \\ \vec{\nabla}(\theta_R\,\mathrm{div}(\vec{\omega}))-\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})-\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})+\frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})+\vec{g}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit le système

$$\begin{aligned}[\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]\vec{u} &= -\lambda\left(\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]+\frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})+\vec{f}\right)\\ [\epsilon(-\Delta)^2+(-\Delta)]\vec{\omega} &= \lambda\left(\vec{\nabla}(\theta_R\,\mathrm{div}(\vec{\omega}))-\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})-\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})+\frac{1}{2}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})+\vec{g}\right).\end{aligned}$$

Maintenant, si nous multiplions la première équation ci-dessus par $\vec{u}$, la seconde par $\vec{\omega}$ et nous intégrons sur $\mathbb{R}^3$, nous pouvons écrire (après une intégration par parties dans le côté gauche) :

$$\begin{aligned}\epsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dx &= -\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}\left[\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{u})\right]\cdot\vec{u}\,dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot\vec{u}\,dx\\ &\quad+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}\,dx,\\ \epsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{\omega}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}|^2dx &= \lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\theta_R\,\mathrm{div}(\vec{\omega}))\cdot\vec{\omega}\,dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\left((\theta_R\vec{u})\cdot\vec{\nabla}\right)(\theta_R\vec{\omega})\cdot\vec{\omega}\,dx\\ &\quad-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\cdot\vec{\omega}\,dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\cdot\vec{\omega}\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx.\end{aligned}$$

Notons maintenant que, puisque $\operatorname{div}(\vec{u})=0$ et par les propriétés du projecteur de Leray $\mathbb{P}$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{P}[(\theta_R\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(\theta_R\vec{u})]\cdot\vec{u}\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}(\theta_R\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(\theta_R\vec{u})\cdot\vec{u}\,dx=0\quad\text{et}\quad\int_{\mathbb{R}^3}(\theta_R\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(\theta_R\vec{\omega})\cdot\vec{\omega}\,dx=0,$$

ainsi, en additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned}&\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{u}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta\vec{\omega}|^2dx\right)+\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}|^2dx\\&=\frac{\lambda}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot\vec{u}\,dx+\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\cdot\vec{\omega}\,dx\right)+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\cdot\vec{\omega}\,dx\\&-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\mathfrak{m}(\theta_R^2\vec{\omega})\cdot\vec{\omega}\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx.\end{aligned}$$

Maintenant, par une intégration par parties, nous avons l'identité

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega})\cdot\vec{u}\,dx&=\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\wedge(\theta_R^2\vec{u})dx\\&=\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\cdot\vec{\omega}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\theta_R^2)\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{u})dx,\end{aligned}$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|_{\dot{H}^2}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^2}^2\right)+\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}^2&=\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\cdot\vec{\omega}\,dx+\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R\vec{\nabla}(\theta_R)\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{u})dx\\&+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\cdot\vec{\omega}\,dx-\lambda\mathfrak{m}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2|\vec{\omega}|^2dx\\&+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx.\end{aligned}$$

Notant que $\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\theta_R\operatorname{div}(\vec{\omega}))\cdot\vec{\omega}\,dx=-\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R|\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2dx$, nous avons

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|_{\dot{H}^2}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^2}^2\right)+\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}^2&=\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2(\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\cdot\vec{\omega}\,dx+C\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}(\theta_R)||\theta_R\vec{\omega}||\vec{u}|dx\\&-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R|\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2dx-\lambda\mathfrak{m}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2|\vec{\omega}|^2dx\\&+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}\,dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx,\end{aligned}$$

qui peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned}&\epsilon\left(\|\vec{u}\|_{\dot{H}^2}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^2}^2\right)+\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}^2+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R|\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2dx\leq\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\theta_R^2||\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dx\\&+C\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}(\theta_R)||\theta_R\vec{\omega}||\vec{u}|dx-\lambda\mathfrak{m}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2|\vec{\omega}|^2dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}\;dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx.\end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R|\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2dx\geq0$, nous avons

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|_{\dot{H}^2}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^2}^2\right)+\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}^2+\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}^2&\leq\lambda\|\theta_R\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\theta_R||\vec{\nabla}\wedge\vec{u}||\vec{\omega}|dx+C\lambda\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}(\theta_R)||\theta_R\vec{\omega}||\vec{u}|dx\\&-\lambda\mathfrak{m}\int_{\mathbb{R}^3}\theta_R^2|\vec{\omega}|^2dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{f}\cdot\vec{u}dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}\vec{g}\cdot\vec{\omega}\,dx.\end{aligned}$$

En rappelant que $\|\theta_R\|_{L^\infty} \leq 1$ par (4.2.3), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les inégalités de Hölder avec $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ainsi que la dualité $\dot{H}^{-1} - \dot{H}^1$, nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^2}\right) + \|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1} \quad &\leq \quad \lambda\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\|_{L^2} + C\lambda\|\vec{\nabla}(\theta_R)\|_{L^3}\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{u}\|_{L^6}\\ &\quad -\lambda\mathfrak{m}\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \lambda\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + \lambda\|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}.\end{aligned}$$

De plus, comme $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, nous avons $\|\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\|_{L^2} = \|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}$ et donc en utilisant l'inégalité de Young pour la somme, nous avons

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^2}\right) + \|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1} \quad &\leq \quad \lambda\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + C\lambda\|\vec{\nabla}(\theta_R)\|_{L^3}\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{u}\|_{L^6}\\ &\quad -\lambda\mathfrak{m}\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \lambda\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + \lambda\|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}.\\ &\leq \quad \frac{3}{2}\lambda\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \frac{1}{6}\lambda\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + C\lambda\|\vec{\nabla}(\theta_R)\|_{L^3}\|\theta_R\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\\ &\quad -\lambda\mathfrak{m}\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \lambda\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + \lambda\|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}.\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'injection de Sobolev $L^6(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ dans l'estimation ci-dessus. Nous observons maintenant que par homogénéité nous avons $\|\vec{\nabla}(\theta_R)\|_{L^3} = \|\vec{\nabla}\theta\|_{L^3}$, et en utilisant les inégalités de Young pour la somme nous obtenons

$$\begin{aligned}\epsilon(\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^2}) + \|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1} &\leq \frac{3}{2}\lambda\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \frac{1}{6}\lambda\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{3}{2}\lambda\|\vec{\nabla}\theta\|^2_{L^3}\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2}\\ &+ \frac{1}{6}\lambda\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} - \lambda\mathfrak{m}\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \frac{3}{2}\lambda\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \frac{1}{6}\lambda\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + 2\lambda\|\vec{g}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \frac{\lambda}{4}\|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1}\\ &\leq \lambda\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\|\vec{\nabla}\theta\|^2_{L^3} - \mathfrak{m}\right)\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2} + \frac{1}{2}\lambda\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{3}{2}\lambda\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \lambda\|\vec{g}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \frac{\lambda}{2}\|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité

$$\begin{aligned}\epsilon\left(\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^2}\right) + (1 - \frac{\lambda}{3})\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + (1 - \frac{\lambda}{4})\|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1} \quad &+\lambda\left(\mathfrak{m} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}\|\vec{\nabla}\theta\|^2_{L^3}\right)\|\theta_R\vec{\omega}\|^2_{L^2}\\ &\leq \tfrac{3}{2}\lambda\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \lambda\|\vec{g}\|^2_{\dot{H}^{-1}}.\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Rappelons que $0 \leq \lambda \leq 1$. On peut fixer une constante $\mathfrak{m}_1 > 0$ de sorte que l'on ait

$$\mathfrak{m}_1 > \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\|\vec{\nabla}\theta\|^2_{L^3}, \tag{4.2.17}$$

et par conséquent nous avons que pour tout $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$, nous avons

$$\epsilon\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^2} + \epsilon\|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^2} + \|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1} + \|\vec{\omega}\|^2_{\dot{H}^1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}} + \|\vec{g}\|^2_{\dot{H}^{-1}}\right). \tag{4.2.18}$$

D'où l'on déduit (puisque $\vec{f}, \vec{g} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ par hypothèse) l'estimation

$$\|\vec{U}\|^2_{E_\sigma\times E} \leq M < +\infty.$$

La preuve de la Proposition 4.2.3 est donc terminée. ■

Ainsi, en utilisant les Propositions 4.2.1, 4.2.2 et 4.2.3, nous avons vérifié toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer le Lemme 4.2.1 au système (4.2.6). Donc, on obtient l'existence d'une solution $(\vec{u}_{R,\epsilon}, \vec{\omega}_{R,\epsilon})$ qui dépendant de R et ϵ et satisfait le système (4.2.5) ainsi que l'estimation (4.2.18).

Il convient de remarquer ici que les estimations ci-dessus nous permettent obtenir encore plus d'information. En effet, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 4.2.1 (Estimation a priori de l'énergie pour $\vec{\omega}_{R,\epsilon}$)**.** *Dans le cadre général du Théorème 4.2.1, si nous supposons en plus que* $\mathfrak{m}_1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\|\vec{\nabla}\theta\|_{L^3}^2 > 1$, *nous avons pour tout* $R > 1$ *et pour tout* $0 < \epsilon \leq 1$, *le contrôle uniforme*

$$\|\vec{\omega}_{R,\epsilon}\|_{L^2}^2 \leq C(\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}^2).$$

Ce résultat est une conséquence directe de l'inégalité (4.2.16) et nous verrons plus loin comment exploiter cette estimation uniforme.

Fin de la preuve du Théorème 4.2.1. Nous allons maintenant obtenir une solution du problème initial (4.2.1) en faisant tendre $R \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$. Pour cela, nous fixons d'abord $\epsilon > 0$ et nous prenons la limite $R \to +\infty$. En effet, comme nous disposons de l'estimation (4.2.18) uniforme en R, nous pouvons extraire une sous-suite $(\vec{u}_{R_k,\epsilon}, \vec{\omega}_{R_k,\epsilon})$ qui converge faiblement dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ vers une limite $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon)$ (par le théorème de Banach-Alaoglu). De plus, par le lemme de Rellich-Kondrachov, nous avons aussi la convergence forte de $(\vec{u}_{R_k,\epsilon}, \vec{\omega}_{R_k,\epsilon})$ vers une limite $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon)$ dans l'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ avec $1 \leq p < 6$. Ces arguments nous permettent d'obtenir une convergence faible (dans un espace de Sobolev $H^{-k}(\mathbb{R}^3)$ avec $k \gg 1$) des termes $\mathbb{P}\big[\big((\theta_R \vec{u}_{R_k,\epsilon}) \cdot \vec{\nabla}\big)(\theta_R \vec{u}_{R_k,\epsilon})\big]$ et $\big((\theta_R \vec{u}_{R_k,\epsilon}) \cdot \vec{\nabla}\big)(\theta_R \vec{\omega}_{R_k,\epsilon})$ vers $\mathbb{P}\big[\big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{u}_\epsilon\big]$ et $\big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{\omega}_\epsilon$ lorsque $R \to +\infty$, respectivement (notons que le projecteur de Leray est borné dans les espaces de Sobolev $H^{-k}(\mathbb{R}^3)$). On obtient ainsi un vecteur $(\vec{u}_\epsilon, \vec{\omega}_\epsilon)$ qui est solution du problème

$$\begin{cases} 0 = -\epsilon\Delta^2\vec{u}_\epsilon + \Delta\vec{u}_\epsilon - \mathbb{P}\big[\big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{u}_\epsilon\big] + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}_\epsilon + \vec{f}, \\ \\ 0 = -\epsilon\Delta^2\vec{\omega}_\epsilon + \Delta\vec{\omega}_\epsilon + \vec{\nabla}\,\mathrm{div}(\vec{\omega}_\epsilon) - \big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{\omega}_\epsilon - \mathfrak{m}\vec{\omega}_\epsilon + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_\epsilon + \vec{g}. \end{cases}$$

Par les mêmes arguments que précédemment, puisque nous avons toujours l'inégalité uniforme $\|\vec{u}_\epsilon\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{\omega}_\epsilon\|_{\dot{H}^1}^2 \leq C(\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\vec{g}\|_{\dot{H}^{-1}}^2)$ en ϵ, donnée dans l'estimation (4.2.18), il existe une sous-suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(\vec{u}_{\epsilon_k}, \vec{\omega}_{\epsilon_k})$ converge faiblement vers une limite $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, toujours par le lemme de Rellich-Kondrachov, on obtient la convergence forte de $(\vec{u}_{\epsilon_k}, \vec{\omega}_{\epsilon_k})$ vers $(\vec{u}, \vec{\omega})$ dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ avec $1 \leq p < 6$ et nous en déduisons la faible convergence des quantités $\mathbb{P}\big[\big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{u}_\epsilon\big]$ et $\big(\vec{u}_\epsilon \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{\omega}_\epsilon$ à $\mathbb{P}\big[\big(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{u}\big]$ et $\big(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\big)\vec{\omega}$ lorsque $\epsilon \to 0$, respectivement. Nous avons donc obtenu une solution $(\vec{u}, \vec{\omega})$ de l'équation initiale (4.2.1) telle que $\vec{u}, \vec{\omega} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Le Corollaire 4.2.1 ci-dessus nous donne une estimation uniforme de la norme L^2 (en R et ϵ) des termes $\vec{\omega}_{R,\epsilon}$, ce qui nous permet d'obtenir par des sous-suites que $\vec{\omega}_{R,\epsilon} \overset{*}{\longrightarrow} \vec{\omega}$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous avons alors $\vec{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et en plus on obtient $\vec{\omega} \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Pour terminer la preuve, il faut étudier la pression p. Rappelons que nous avons l'identité

$$p = \frac{1}{(-\Delta)}\,\mathrm{div}(\mathrm{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})). \tag{4.2.19}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\|p\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\,\mathrm{div}\,\big(\mathrm{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})\big) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}},$$

et en utilisant les lois de produit habituelles dans les espaces de Sobolev [1] on a $\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^1}$, d'où l'on déduit facilement que $p \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. La preuve du Théorème 4.2.1 est terminée. ■

Étudions maintenant la régularité des solutions que l'on vient d'obtenir.

4.2.2. Régularité de solutions des équations micro-polaires stationnaires

Le cadre donné dans le Théorème 4.2.1 est assez intéressant pour nos objectifs, puisque nous pouvons en déduire le résultat de régularité suivant

Théorème 4.2.2 (Régularité)**.** *Supposons pour plus de simplicité que $\vec{f} = \vec{g} = 0$. Pour tout $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$, avec $\mathfrak{m}_1$ donné dans* (4.2.17)*, nous considérons $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution des équations micro-polaires stationnaires* (4.1.2) *obtenue dans le Théorème 4.2.1 ci-dessus. Alors les fonctions $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$ sont régulières.*

La preuve de ce résultat est faite par un processus itératif. Nous commençons par une étude de la vitesse $\vec{u}$, mais comme il s'agit d'un système couplé, à un moment donné, la régularité de cette variable va dépendre de l'information que nous avons sur $\vec{\omega}$. Cependant, si nous injectons la nouvelle information de régularité obtenue sur $\vec{u}$, nous serons en mesure d'améliorer la régularité de $\vec{\omega}$. Enfin, en itérant ces idées, nous pouvons obtenir le résultat souhaité.

Démonstration du Théorème 4.2.2. Tout d'abord, grâce à l'expression (4.2.2), nous pouvons concentrer notre étude aux variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$. Ainsi, comme $\vec{u}$ est solution de la première équation de (4.1.2), il est facile de voir que l'on a

$$\vec{u} = \frac{1}{(-\Delta)}\left(-\mathbb{P}(\mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{u})) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right), \tag{4.2.20}$$

et nous avons alors

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} &\leq \left\|\frac{1}{(-\Delta)}\mathbb{P}(\mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))\right\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}\\ &\leq C\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les fait que le projecteur de Leray ainsi que les transformées de Riesz sont bornés dans les espaces de Sobolev. Remarquons que, comme $\vec{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)\cap\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ nous avons aussi $\vec{\omega} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (car $\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{\omega}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\vec{\omega}\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^1}$) et par les lois du produit dans l'espace de Sobolev, nous pouvons écrire

$$\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \leq C\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + C\|\vec{\omega}\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|\vec{\omega}\|^{\frac{1}{2}}_{\dot{H}^1} < +\infty,$$

ce qui nous permet de déduire un premier gain de régularité pour $\vec{u}$ puisque nous avons maintenant $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. En introduisant cette information dans (4.2.20), nous pouvons maintenant étudier un second gain de régularité pour $\vec{u}$. En effet, nous avons, par les mêmes arguments ci-dessus, que

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^2} &\leq \left\|\frac{1}{(-\Delta)}\mathbb{P}(\mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))\right\|_{\dot{H}^2} + \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\right\|_{\dot{H}^2}\\ &\leq C\|\vec{u}\otimes\vec{u}\|_{\dot{H}^1} + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} \leq C\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} < +\infty.\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

1. Rappelons que, pour $0 \leq s < +\infty$ et $0 < \delta < \frac{3}{2}$, nous avons $\|fg\|_{\dot{H}^{s+\delta-\frac{3}{2}}} \leq C\left(\|f\|_{\dot{H}^\delta}\|g\|_{\dot{H}^s} + \|g\|_{\dot{H}^\delta}\|f\|_{\dot{H}^s}\right)$. Voir [61, Lemme 7.3] pour une preuve de cette inégalité.

Il est importante de souligner, que comme on a $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$ on peut déduire (en travaillant au niveau de Fourier) que $\vec{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (voir également [16, Exercice 2.9]).

De plus, comme on peut le voir clairement à partir de l'estimation (4.2.21), la régularité de $\vec{u}$ est structurellement liée à celle de $\vec{\omega}$ et afin d'obtenir plus de régularité pour $\vec{u}$, nous devrons étudier la variable $\vec{\omega}$. En effet, comme $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$ nous allons voir qu'il est possible obtenir une amélioration de l'information que nous avons sur $\vec{\omega}$.

Pour cela, nous devrons faire une étude de la variable $\operatorname{div}(\vec{\omega})$. Ainsi, en appliquant l'opérateur de divergence à la deuxième équation de (4.1.2) et puisque nous avons $\operatorname{div}(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = 0$, nous obtenons :

$$2\Delta \operatorname{div}(\vec{\omega}) = \mathfrak{m} \operatorname{div}(\vec{\omega}) + \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}),$$

et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^1} &\leq C\mathfrak{m} \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{\omega}) \right\|_{\dot{H}^1} + C \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}) \right\|_{\dot{H}^1} \\ &\leq C\mathfrak{m}\|\vec{\omega}\|_{L^2} + C\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}\|_{L^2} \leq C\mathfrak{m}\|\vec{\omega}\|_{L^2} + C\|\vec{u}\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} < +\infty, \end{aligned}$$

et nous obtenons que $\operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Avec cette information préliminaire sur $\operatorname{div}(\vec{\omega})$, nous revenons à l'étude de la variable $\vec{\omega}$. En utilisant la deuxième équation de (4.1.2) nous déduisons la relation suivante

$$\vec{\omega} = \frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) - \mathfrak{m}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\omega} - \frac{1}{(-\Delta)}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla} \wedge \vec{u},$$

et nous écrivons

$$\begin{aligned} \|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^2} &\leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega}) \right\|_{\dot{H}^2} + \mathfrak{m} \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\vec{\omega} \right\|_{\dot{H}^2} + \left\| \frac{1}{(-\Delta)}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} \right\|_{\dot{H}^2} + C \left\| \frac{1}{(-\Delta)}\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \right\|_{\dot{H}^2} \\ &\leq C\, \|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^1} + C\mathfrak{m}\|\vec{\omega}\|_{L^2} + C\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}\|_{L^2} + C\|\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\|_{L^2} \\ &\leq C\, \|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{\dot{H}^1} + C\mathfrak{m}\|\vec{\omega}\|_{L^2} + C\|\vec{u}\|_{L^\infty}\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} + C\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} < +\infty, \end{aligned}$$

nous avons donc obtenu que $\vec{\omega} \in \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$.

Or, ce gain de régularité pour la variable $\vec{\omega}$ entraîne un gain de régularité pour la variable $\vec{u}$. En effet, par les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir (4.2.21) nous pouvons maintenant prouver que $\vec{u} \in \dot{H}^3(\mathbb{R}^3)$. Cela implique également que $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$ et donc nous pouvons déduire $\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Alors, comme précédemment, nous pouvons obtenir que $\operatorname{div}(\vec{\omega}) \in \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$, d'où nous déduisons facilement que $\vec{\omega} \in \dot{H}^3(\mathbb{R}^3)$. Ensuite, en itérant ces mêmes idées ci-dessus, nous obtenons que les variables $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$ sont régulières, ce qui met fin à la preuve du Théorème 4.2.2. ■

4.3. Un problème d'unicité

Tout d'abord observons que dans le cas où $\vec{f} = \vec{g} = 0$, il est facile de voir que $\vec{u} = 0$, $p = 0$ et $\vec{\omega} = 0$ est une solution du système (4.1.2). Mais cette solution triviale n'est pas unique : en effet, si nous définissons la fonction $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2$ et si nous remplaçons les fonctions $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$ par les expressions suivantes

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = \vec{\nabla}\psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -2x_3), \quad p(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}\|\vec{u}(x_1, x_2, x_3)\|^2 \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = 0,$$

alors il est possible de vérifier que le vecteur $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ donné par les expressions ci-dessus, satisfait au sens faible le système (4.1.2). Cependant, cette solution se situe en dehors du cadre du Théorème 4.2.1 car $(\vec{u}, \vec{\omega}) \notin \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$.

De plus, il est important de souligner qu'il y a un obstacle pour déduire l'unicité de la solution triviale $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$ sous l'hypothèse $(\vec{u}, \vec{\omega}) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$. En effet, d'après l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous avons $\vec{u} \in L^6(\mathbb{R}^3)$ et cette information ne permet pas de déduire que le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \cdot \vec{u}$ est bien défini et donc l'unicité de la solution triviale ne peut pas être déduite par des arguments classiques.

Ainsi, pour surmonter cette limitation et inspirés de la théorie des équations de Navier-Stokes stationnaires [40], [49], [61] et [92], on peut voir que si nous imposons une décroissance plus forte à l'infini nous pouvons obtenir l'unicité de la solution triviale. En particulier, dans le cadre des équations de Navier-Stokes stationnaires, observons que la condition $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$ est suffisante pour en déduire l'unicité de la solution (cf. [24]). Remarquons que la borne supérieure $q \leq \frac{9}{2}$ semble être la meilleure disponible à ce jour, et le cas $\frac{9}{2} < q \leq 6$ est un problème complètement ouvert. Pour plus de détails à ce sujet, nous nous référons à [49], [61] où [92].

D'autre part, dans les cas des équations micro-polaires, nous pouvons mentionner l'article [54], où il a été montré que si $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < p < \frac{9}{2}$ alors nous pouvons déduire que $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$. Observons cependant que, dans le cadre des solutions construites dans le Théorème 4.2.1, nous avons $(\vec{u}, \vec{\omega}) \in \dot{H}^1 \times H^1$ et en particulier, nous avons $\vec{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3)$ et donc par un argument d'interpolation il s'ensuit que $\vec{\omega} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $2 \leq q \leq 6$. Comme cette information est suffisant pour traiter le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}$, nous devons imposer des conditions supplémentaires uniquement à la vitesse. En effet, nous allons voir que si nous avons $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, nous pouvons déduire l'unicité de la solution triviale.

Notons également qu'aucune condition supplémentaire n'est demandée pour $\vec{\omega}$, laquelle par construction possède déjà une décroissance plus forte que $\vec{u}$. Cette étude séparée des variables est, à notre connaissance, nouvelle pour ce type de problème (4.1.2).

4.3.1. Un résultat de type Liouville

Présentons maintenant le principal résultat de cette section.

Théorème 4.3.1 (Un résultat de type Liouville)**.** *Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution des équations du fluide micro-polaire* (4.1.2) *avec $\vec{f} = \vec{g} = 0$. Il existe $\mathfrak{m}_1 > 0$, (cf.* (4.3.16)*) tel que pour tout $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$, si nous avons la condition $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, alors $\vec{u} = \vec{\omega} = 0$.*

Démonstration du Théorème 4.3.1. Soit $(\vec{u}, p, \vec{\omega})$ une solution faible du système (4.1.2) telle que $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, $p \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{\omega} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. De plus, par hypothèse nous avons l'information $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, d'où nous déduisons facilement que $p \in L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^3)$, en effet, nous pouvons l'écrire par l'expression (4.2.19) :

$$\|p\|_{L^{\frac{q}{2}}} = \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) \right\|_{L^{\frac{q}{2}}} \leq C\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^{\frac{q}{2}}} \leq C\|\vec{u}\|_{L^q}\|\vec{u}\|_{L^q} < +\infty. \tag{4.3.1}$$

Avec toutes ces informations pour $\vec{u}$, p et $\vec{\omega}$, nous allons prouver que si les forces externes sont nulles, alors la solution triviale est unique. Pour ce faire, nous considérons ϕ une fonction positive et lisse telle que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$ si $|x| < 1$ et $\phi(x) = 0$ si $|x| > 2$. De plus, pour $R \geq 1$ on définit la fonction $\phi_R(\cdot) = \phi(\frac{\cdot}{R})$. Notons en particulier que $\sup(\phi_R) \subset B_{0,R} := B_R$.

En multipliant les deux équations du système (4.1.2) par $\phi_R^2 \vec{u}$ et $\phi_R^2 \vec{\omega}$, respectivement, nous obtenons (rappelons que nous considérons ici $\vec{f} = \vec{g} = 0$) :

$$\begin{cases} \Delta \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) - [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) - \vec{\nabla} p \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) + \frac{1}{2}[\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}(\phi_R^2 \vec{u})] \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) = 0, \\ \\ \Delta \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) + [\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega})] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) - \mathfrak{m}\vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) - [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) + \frac{1}{2}[\vec{\nabla} \wedge \vec{u}] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) = 0. \end{cases}$$

Maintenant, en intégrant sur $\mathbb{R}^3$ et en additionnant ces deux équations, nous pouvons écrire, après quelques ré-arrangements :

$$\begin{aligned} & -\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} [\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega})] \cdot \phi_R^2 \vec{\omega} dx + \mathfrak{m} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\omega}|^2 dx \\ = & -\int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} p \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Puisque par le Théorème 4.2.2 nous avons suffisamment de régularité sur les fonctions $\vec{u}, p$ et $\vec{\omega}$, on peut réaliser une intégration par parties et donc obtenir les identités suivantes pour les trois premiers termes ci-dessus

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\phi_R^2) |\vec{u}|^2 dx \\ -\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\phi_R^2) |\vec{\omega}|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$-\int_{\mathbb{R}^3} [\vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{\omega})] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}(\phi_R^2) \cdot \vec{\omega} \operatorname{div}(\vec{\omega}) dx.$$

En remplaçant les identités précédentes dans (4.3.2), nous avons donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2 dx + \mathfrak{m} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\omega}|^2 dx \\ & = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\phi_R^2)(|\vec{u}|^2 + |\vec{\omega}|^2) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}(\phi_R^2) \cdot \vec{\omega} \operatorname{div}(\vec{\omega}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}] \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}] \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} p \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx. \end{aligned}$$

De plus, par une intégration par parties, nous observons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} \cdot (\phi_R^2 \vec{u}) dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\phi_R^2 \vec{u}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega} \cdot [\vec{\nabla}(\phi_R^2) \wedge \vec{u}] dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega}) dx. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2|\vec{\nabla}\otimes\vec{\omega}|^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2|\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2dx+\mathfrak{m}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2|\vec{\omega}|^2dx$$
$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\Delta(\phi_R^2)(|\vec{u}|^2+|\vec{\omega}|^2)dx}_{(1)}-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\phi_R^2)\cdot\vec{\omega}\operatorname{div}(\vec{\omega})dx}_{(2)}-\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}]\cdot(\phi_R^2\vec{u})dx}_{(3)}$$
$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\omega}\cdot[\vec{\nabla}(\phi_R^2)\wedge\vec{u}]dx}_{(6)}+\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})dx}_{(7)}. \tag{4.3.3}$$

Nous allons maintenant étudier chaque terme du côté droit de l'expression ci-dessus.

- Pour le premier terme ci-dessus, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Delta(\phi_R^2)\right|(|\vec{u}|^2+|\vec{\omega}|^2)dx\leq C\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\vec{\nabla}(\phi_R)|^2+|\phi_R\Delta(\phi_R)|\big)(|\vec{u}|^2+|\vec{\omega}|^2)dx,$$

  et nous remarquons que, par construction, nous avons

$$\operatorname{supp}(\vec{\nabla}(\phi_R))=\operatorname{supp}(\Delta(\phi_R))\subset\{x\in\mathbb{R}^3:R\leq|x|\leq 2R\}:=\mathcal{C}_R. \tag{4.3.4}$$

  On obtient alors, en appliquant l'inégalité de Hölder avec $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\big(|\vec{\nabla}(\phi_R)|^2+|\phi_R\Delta(\phi_R)|\big)(|\vec{u}|^2+|\vec{\omega}|^2)dx &\leq \|\vec{\nabla}(\phi_R)\|_{L^3}^2(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2+\|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2)\\ &\quad+\|\phi_R\|_{L^\infty}\|\Delta(\phi_R)\|_{L^{\frac{3}{2}}}(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2+\|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2).\end{aligned}$$

  Remarquons que, par homogénéité, nous avons $\|\vec{\nabla}(\phi_R)\|_{L^3}=\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3}$ et $\|\Delta(\phi_R)\|_{L^{\frac{3}{2}}}=\|\Delta\phi\|_{L^{\frac{3}{2}}}$ et puisque $\|\phi_R\|_{L^\infty}\leq C$, nous pouvons écrire

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\Delta(\phi_R^2)\right|(|\vec{u}|^2+|\vec{\omega}|^2)dx\leq C(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2+\|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2). \tag{4.3.5}$$

- Pour la quantité (2) dans (4.3.3), nous avons par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\phi_R^2)\cdot\vec{\omega}\operatorname{div}(\vec{\omega})dx &= 2\int_{\mathbb{R}^3}(\phi_R\vec{\nabla}\phi_R)\cdot\vec{\omega}\operatorname{div}(\vec{\omega})dx\leq C\|\operatorname{div}(\vec{\omega}\phi_R\|_{L^2}\|\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^2}\\ &\leq C\|\phi_R\|_{L^\infty}\|\operatorname{div}(\vec{\omega}\|_{L^2}\|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^3},\end{aligned}$$

  puisque $\|\phi_R\|_{L^\infty}\leq C$, $\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^3}=\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3}\leq C$ par homogénéité et $\|\operatorname{div}(\vec{\omega})\|_{L^2}\leq\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\phi_R^2)\cdot\vec{\omega}div(\vec{\omega})dx\leq C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}\|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}. \tag{4.3.6}$$

- Le terme (3) dans (4.3.3) est traité comme suit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}]\cdot(\phi_R^2\vec{u})dx &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{B_R}u_j(\partial_{x_j}u_i)(\phi_R^2u_i)dx=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2u_j(\partial_{x_j}u_i)u_idx\\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2u_j\left(\partial_{x_j}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)\right)dx,\end{aligned}$$

et par une intégration par parties nous obtenons

$$\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\phi_R^2 u_j\left(\partial_{x_j}\left(\frac{u_i^2}{2}\right)\right)dx=-\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\phi_R^2)\cdot\left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}\vec{u}\right)dx,$$

où nous avons utilisé le fait que $\text{div}(\vec{u})=0$. Nous avons donc

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}]\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right|dx\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}(\phi_R^2)||\vec{u}|^3dx\leq C\|\phi_R\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\phi_R||\vec{u}|^3dx.$$

Maintenant, par les inégalités de Hölder (avec $\frac{1}{\ell}+\frac{3}{q}=1$), par les propriétés du support de $\vec{\nabla}\phi_R$ (voir (4.3.4) ci-dessus) et puisque $\|\phi_R\|_{L^\infty}\leq C$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}]\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right|dx\leq\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^\ell}\|\vec{u}\|^3_{L^q(\mathcal{C}_R)},\tag{4.3.7}$$

de plus, par homogénéité, on obtient $\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^\ell}\leq R^{\frac{3}{\ell}-1}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\ell}$, et comme $\frac{1}{\ell}=1-\frac{3}{q}$, on a $\frac{3}{\ell}-1=2-\frac{9}{q}$ et il s'ensuit que $\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^\ell}\leq R^{2-\frac{9}{q}}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\ell}$. Mais, comme on a $3\leq q\leq\frac{9}{2}$ par hypothèse, on a $-1\leq 2-\frac{9}{q}\leq 0$, et comme $R>1$ on obtient donc que $R^{2-\frac{9}{q}}\leq 1$ et on peut écrire

$$\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^\ell}\leq\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^\ell}<+\infty.\tag{4.3.8}$$

Ainsi, en revenant à (4.3.7) nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}]\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right|dx\leq CR^{2-\frac{9}{q}}\|\vec{u}\|^3_{L^q(\mathcal{C}R)}.\tag{4.3.9}$$

- La quantité (4) dans (4.3.3) ne peut pas être traitée comme précédemment car le champ vectoriel $\vec{\omega}$ n'est pas à divergence nulle. Cependant, puisque $\text{div}(\vec{u})=0$ nous pouvons encore écrire par intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})dx=-\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})(\phi_R^2\vec{\omega})]\cdot\vec{\omega}dx,$$

d'où l'on déduit les identités

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})dx &= -\int_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\vec{u}\phi_R^2)\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{\omega}\right]\cdot\vec{\omega}dx-\int_{\mathbb{R}^3}[\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(\phi_R^2)]|\vec{\omega}|^2dx\\ -\int_{\mathbb{R}^3}[\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(\phi_R^2)]. &= -\int_{\mathbb{R}^3}\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}\right]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})dx-\int_{\mathbb{R}^3}[\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(\phi_R^2)]|\vec{\omega}|^2dx,\end{aligned}$$

et nous obtenons finalement

$$\int_{\mathbb{R}^3}[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})dx=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}[\vec{u}\cdot\vec{\nabla}(\phi_R^2)]|\vec{\omega}|^2dx.$$

Nous pouvons maintenant écrire, par les inégalités de Young pour la somme :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})\right|dx &\leq \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}|u_j\phi_R(\partial_{x_j}\phi_R)||\vec{\omega}|^2dx\leq\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(4|u_j\partial_{x_j}\phi_R|^2+\frac{|\phi_R|^2}{4}\right)|\vec{\omega}|^2dx\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^3}|u|^2|\vec{\nabla}\phi_R|^2|\vec{\omega}|^2dx+\frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_R\vec{\omega}|^2dx.\end{aligned}$$

Par les inégalités de Hölder avec $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})\right| dx \leq C\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2 + \frac{3}{4}\|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}^2,$$

et comme nous avons, par homogénéité, que $\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^6}^2 = R^{-1}\|\vec{\nabla}\phi\|_{L^6}^2 \leq CR^{-1}$, nous écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}]\cdot(\phi_R^2\vec{\omega})\right| dx \leq CR^{-1}\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2 + \frac{3}{4}\|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}^2. \tag{4.3.10}$$

- Pour le terme (5) dans (4.3.3), en utilisant le fait que $\vec{u}$ est à divergence nulle, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}p\cdot(\phi_R^2\vec{u})dx &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}(\partial_{x_i}p)\phi_R^2 u_i dx = -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} p\partial_{x_i}(\phi_R^2 u_i)dx \\ &= -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} p\partial_{x_i}(\phi_R^2)(u_i)dx = -\int_{\mathbb{R}^3}\vec{\nabla}(\phi_R^2)\cdot(p\vec{u})dx. \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

En utilisant à nouveau les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{\ell} + \frac{3}{q} = 1$ et par l'estimation (4.3.8) puisque nous travaillons avec le même ensemble d'exposants) et en prenant en compte les propriétés de support de $\vec{\nabla}\phi_R$, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{\nabla}p\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right| dx \leq C\|\phi_R\|_{L^\infty}\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\phi_R||p||\vec{u}|dx \\ &\leq C\|\phi_R\|_{L^\infty}\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^\ell}\left(\int_{\mathcal{C}_R}(|p||\vec{u}|)^{\frac{q}{3}}dx\right)^{\frac{3}{q}} \leq C\left(\int_{\mathcal{C}_R}(|p||\vec{u}|)^{\frac{q}{3}}dx\right)^{\frac{3}{q}}.\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Maintenant, puisque par hypothèse nous avons $\vec{u}\in L^q(\mathbb{R}^3)$ et par l'estimation (4.3.1) nous avons $p \in L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^3)$, donc par les inégalités de Hölder (avec $\frac{2}{q} + \frac{1}{q} = \frac{3}{q}$) nous pouvons écrire

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{\nabla}p\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right| dx \leq C\|p\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathcal{C}_R)}\|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)}. \tag{4.3.13}$$

- Pour le terme (6) dans (4.3.3), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités de Young pour la somme, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{\omega}\cdot[\vec{\nabla}(\phi_R^2)\wedge\vec{u}]\right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3}|\phi_R||\vec{\nabla}\phi_R||\vec{\omega}||\vec{u}\,|dx \leq \|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}\||\vec{\nabla}\phi_R||\vec{u}|\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}^2}{4} + 4\||\vec{\nabla}\phi_R||\vec{u}|\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ dans le dernier terme ci-dessus, nous avons

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{\omega}\cdot[\vec{\nabla}(\phi_R^2)\wedge\vec{u}]\right| dx \leq \frac{\|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}^2}{4} + 4\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^3}^2\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2.$$

En rappelant que, par homogénéité, on a $\|\vec{\nabla}\phi_R\|_{L^3} = \|\vec{\nabla}\phi\|_{L^3} < +\infty$, on obtient finalement

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left|\vec{\nabla}\wedge\vec{\omega}\cdot(\phi_R^2\vec{u})\right| dx \leq \frac{\|\phi_R\vec{\omega}\|_{L^2}^2}{4} + C\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2. \tag{4.3.14}$$

- Pour le dernier terme de (4.3.3) par l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega})\right| dx \leq C\|\phi_R \vec{\nabla} \wedge \vec{u}\|_{L^2} \|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2} \leq C\|\phi_R \vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2} \|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour la somme (en introduisant un petit paramètre technique $0 < \mathfrak{e} < 1$), nous observons que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left|\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \cdot (\phi_R^2 \vec{\omega})\right| dx \leq \mathfrak{e}\|\phi_R \vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2}^2 + C(\mathfrak{e})\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2. \tag{4.3.15}$$

Avec toutes ces estimations (4.3.5)-(4.3.15) en main, nous revenons à (4.3.3) et nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2 dx + \mathfrak{m} \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\omega}|^2 dx \\
&\quad \leq C(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2 + \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2) + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)} + C\|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)}^3 \\
&\quad + CR^{-1}\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2 + \frac{3}{4}\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2 + C\|\vec{u}\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathcal{C}_R)} \|p\|_{L^q(\mathcal{C}_R)} + \frac{1}{4}\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2 + C\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2 \\
&\quad + \mathfrak{e}\|\phi_R \vec{\nabla} \otimes \vec{u}\|_{L^2}^2 + C(\mathfrak{e})\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Nous remarquons maintenant que la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\operatorname{div}(\vec{\omega})|^2 dx$ dans la première ligne ci-dessus est positive, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
(1-\mathfrak{e}) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx \quad &+ \quad \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2 dx + (\mathfrak{m} - C(\mathfrak{e}) - 1)\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2 \\
&\leq \quad C(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2 + \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2) + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)} + C\|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)}^3 \\
&+ \quad CR^{-1}\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2 + C\|p\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathcal{C}_R)} \|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)} + C\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2.
\end{aligned}$$

Maintenant si nous fixons

$$\mathfrak{m}_1 > C(\mathfrak{e}) + 1, \tag{4.3.16}$$

nous avons pour tout $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1$, $(\mathfrak{m} - C(\mathfrak{e}) - 1)\|\phi_R \vec{\omega}\|_{L^2}^2 > 0$ et donc

$$\begin{aligned}
(1-\mathfrak{e}) \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} \phi_R^2 |\vec{\nabla} \otimes \vec{\omega}|^2 dx \quad &\leq \quad C(\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2 + \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2) + C\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1} \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)} \\
&\quad + C\|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)}^3 + CR^{-1}\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2 \\
&\quad + C\|p\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathcal{C}_R)} \|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)} + C\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}^2.
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Maintenant nous remarquons que, puisque $\vec{u}, \vec{\omega} \in L^6(\mathbb{R}^3)$, $\vec{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ et $p \in L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, alors les quantités

$$\|\vec{u}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}, \quad \|\vec{\omega}\|_{L^6(\mathcal{C}_R)}, \quad \|\vec{u}\|_{L^q(\mathcal{C}_R)}, \quad R^{-1}\|\vec{u}\|_{L^6}^2 \|\vec{\omega}\|_{L^6}^2, \quad \|p\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathcal{C}_R)},$$

qui sont présentes dans chaque terme de la partie du droite de l'estimation précédente, tendront vers 0 si $R \to +\infty$ et alors tout le côté droit de (4.3.17) ci-dessus tendra vers 0. Pour le côté gauche de (4.3.17), si nous faisons tendre $R \to +\infty$ nous obtenons les quantités $\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}$, $\|\vec{\omega}\|_{\dot{H}^1}$ et $\|\vec{\omega}\|_{L^2}$ qui convergent vers 0. Puisque nous avons l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous déduisons facilement que $\vec{u} = 0$ et $\vec{\omega} = 0$. La preuve du Théorème 4.3.1 est terminée. ■

Pour finir ce chapitre, rappelons que le fait d'avoir pris la constante $\mathfrak{m} \gg 1$ nous a permis de déduire l'existence des solutions dans le Théorème 4.2.1 et l'unicité de la solution triviale dans le Théorème 4.3.1, toutefois nous ne revendiquons aucune optimalité de cette constante.

Bibliographie

[1] D. Adams et J. Xiao. “Morrey Spaces in Harmonic Analysis”. *Ark. Mat.* 50 (2) : 201-230 (2012).

[2] D. Albritton. “Blow-up Criteria for the Navier-Stokes Equations in Non-Endpoint Critical Besov Spaces”. *Anal. PDE* 11 (6) : 1415-1456 (2018).

[3] D. Albritton et T. Barker. “On Local Type I Singularities of the NavierStokes Equations and Liouville Theorems”. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 21 (3) : 43 (2019).

[4] R. Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1990.

[5] Y. Baoquan. “Regularity of Weak Solutions to Magneto-Micropolar Fluid Equations”. *Acta Mathematica Scientia* 30 (5) : 1469-1480 (2010).

[6] T. Barker et C. Prange. “Localized Smoothing for the Navier-Stokes Equations and Concentration of Critical Norms near Singularities”. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 236 (3) : 1487-1541 (2020).

[7] T. Barker et C. Prange. “Quantitative Regularity for the Navier-Stokes Equations via Spatial Concentration”. *Comm. Math. Phys.* 385 (2) : 717-792 (2021).

[8] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.

[9] O. Bég et al. “Computational Modeling of Biomagnetic Micropolar Blood Flow and Heat Transfer in a Two-Dimensional Non-Darcian Porous Medium”. *Meccanica* 43 (4) : 391-410 (2008).

[10] Z. Bradshaw et T. P. Tsai. “Global Existence, Regularity, and Uniqueness of Infinite Energy Solutions to the Navier-Stokes Equations”. *Commun. Partial Differ. Equ.* 45 (9) : 1168-1201 (2020).

[11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. P. xiv+599.

[12] H. Brezis et P. Mironescu. “GagliardoNirenberg Inequalities and Non-Inequalities : The Full Story”. *Ann Inst Henri Poincaré Anal Non Linéaire* 35 (5) : 1355-1376 (2018).

[13] L. Caffarelli, R. Kohn et L. Nirenberg. “Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations”. *Commun. Pure Appl. Math.* 35 (6) : 771-831 (1982).

[14] T. Cazenave, Y. Martel et J. Nesetril. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford University Press, 2006.

[15] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volume 2*. Editorial AMARUN, 2017.

[16] D. Chamorro. *Introduction Aux Équations de Navier-Stokes*. 2022.

[17] D. Chamorro et J. He. "On the Partial Regularity Theory for the MHD Equations". *J. Math. Anal. Appl.* 494 (1) : 124449, 38 (2021).

[18] D. Chamorro et D. Llerena. "A Crypto-Regularity Result for the Micropolar Fluids Equations". *J. Math. Anal. Appl.* 520 (2) : 28 (2023).

[19] D. Chamorro et D. Llerena. "Interior ϵ-Regularity Theory for the Solutions of the Magneto-Micropolar Equations with a Perturbation Term". *J. Elliptic Parabol. Equ.* 8 (1) : 555-616 (2022).

[20] D. Chamorro et D. Llerena. "Partial Regularity and L^3-Norm Concentration Effects around Possible Blow-up Points for the Micropolar Fluid Equations". 2024. URL : https://hal.science/hal-04600217.

[21] D. Chamorro et D. Llerena. "Partial Suitable Solutions for the Micropolar Equations and Regularity Properties". *Ann. Math. Blaise Pascal* (2023).

[22] D. Chamorro, D. Llerena et G. Vergara-Hermosilla. "Some Remarks about the Stationary Micropolar Fluid Equations : Existence, Regularity and Uniqueness". *J. Math. Anal. Appl.* 536 (2) : 128201 (2024).

[23] D. Chamorro et al. "On the Local Regularity Theory for the Magnetohydrodynamic Equations". *Doc. Math.* 26 : 125-148 (2021).

[24] Diego Chamorro, Oscar Jarrín et Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset. "Some Liouville Theorems for Stationary Navier-Stokes Equations in Lebesgue and Morrey Spaces". *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire* 38 (3) : 689-710 (2021).

[25] H. Chen, C. Qian et T. Zhang. "Serrin-Type Regularity Criteria for the 3D MHD Equations via One Velocity Component and One Magnetic Component". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 61 (3) : 89 (2022).

[26] F. Cruz. "Global Strong Solutions for the Incompressible Micropolar Fluids Equations". *Arch. Math.* 113 (2) : 201-212 (2019).

[27] F. W. Cruz et al. "Large Time Behavior for MHD Micropolar Fluids in $\mathbb{R}^n$". *J. Differ. Equations* 312 : 1-44 (2022).

[28] O. Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. OUP Oxford, 2005.

[29] B. Dong et Z. M. Chen. "Regularity Criteria of Weak Solutions to the Three-Dimensional Micropolar Flows". *Journal of Mathematical Physics* 50 (10) : 103525 (2009).

[30] B. Dong, Y. Jia et Z. Chen. "Pressure Regularity Criteria of the Three-Dimensional Micropolar Fluid Flows". *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 34 (5) : 595-606 (2011).

[31] B. Dong et W. Zhang. "On the Regularity Criterion for Three-Dimensional Micropolar Fluid Flows in Besov Spaces". *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications* 73 (7) : 2334-2341 (2010).

[32] M. Duran, E. Ortega-Torres et M. Rojas-Medar. "Stationary Solutions of Magneto-Micropolar Fluid Equations in Exterior Domains". *Proyecciones Antofagasta* 22 : 63-79 (2003).

[33] A. Eringen. "Theory of Micropolar Fluids". *J. Math. Mech.* : 1-18 (1966).

[34] L. Escauriaza, G. Seregin et L. Sverak. "$L^{3,\infty}$-Solutions of Navier-Stokes Equations and Backward Uniqueness". *Uspekhi Mat. Nauk* 58 (2) : 3-44 (2003).

[35] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* 2e éd. T. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[36] P. Fernandez-Dalgo. *Micropolar Fluids Starting from Initial Angular Velocities with Negative Sobolev Regularity.* 2024.

[37] S. Gala. "On Regularity Criteria for the Three-Dimensional Micropolar Fluid Equations in the Critical MorreyCampanato Space". *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 12 (4) : 2142-2150 (2011).

[38] S. Gala. "Regularity Criteria for the 3D Magneto-Micropolar Fluid Equations in the Morrey-Campanato Space". *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 17 (2) : 181-194 (2010).

[39] S. Gala et J. Yan. "Two Regularity Criteria Via the Logarithm of the Weak Solutions to the Micropolar Fluid Equations". *Journal of Partial Differential Equations* 1 : 32-40 (2012).

[40] G. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-state Problems.* 2e éd. New York, NY : Springer, 2011.

[41] G. Galdi et S. Rionero. "A Note on the Existence and Uniqueness of Solutions of the Micropolar Fluid Equations". *Internat. J. Engrg. Sci.* (2) : 105-108 (1977).

[42] I. Gallagher, G. S. Koch et F. Planchon. "Blow-up of Critical Besov Norms at a Potential NavierStokes Singularity". *Comm. Math. Phys.* 343 (1) : 39-82 (2016).

[43] F. Gay-Balmaz, T. Ratiu et C. Tronci. "Equivalent Theories of Liquid Crystal Dynamics". *Arch. Ration. Mech. Anal.* 210 (3) : 773-811 (2013).

[44] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2008.

[45] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2014.

[46] C. He et Z. Xin. "On the Regularity of Weak Solutions to the Magnetohydrodynamic Equations". *J. Differential Equations* 213 (2) : 235-254 (2005).

[47] C. He et Z. Xin. "Partial Regularity of Suitable Weak Solutions to the Incompressible Magnetohydrodynamic Equations". *J. Funct. Anal.* 227 (1) : 113-152 (2005).

[48] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators : Distribution Theory and Fourier Analysis.* Springer Study Edition. Springer-Verlag, 1990.

[49] O. Jarrín. “A Remark on the Liouville Problem for Stationary Navier-Stokes Equations in Lorentz and Morrey Spaces”. *J. Math. Anal. Appl.* 486 (1) : 123871 (2020).

[50] H. Jia et V. verák. “Local-in-Space Estimates near Initial Time for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations and Forward Self-Similar Solutions”. *Invent. Math.* 196 (1) : 233-265 (2014).

[51] Y. Jia, W. Zhang et B. Q. Dong. “Remarks on the Regularity Criterion of the 3D Micropolar Fluid Flows in Terms of the Pressure”. *Applied Mathematics Letters* 24 (2) : 199-203 (2011).

[52] K. Kang, H. Miura et T. P. Tsai. “Regular Sets and an ε -Regularity Theorem in Terms of Initial Data for the Navier-Stokes Equations”. *Pure Appl. Anal.* 3 (3) : 567-594 (2021).

[53] K. Kang, H. Miura et T. P. Tsai. “Short Time Regularity of NavierStokes Flows with Locally L^3 Initial Data and Applications”. *Int. Math. Res. Not.* 2021 (11) : 8763-8805 (2020).

[54] J. Kim et S. Ko. *Some Liouville-type Theorems for the Stationary 3D Magneto-Micropolar Fluids*. 2023.

[55] Y. Kim et T. Kim. “A Study on the Plane Couette Flow Using Micropolar Fluid Theory”. *KSME International Journal* 18 (3) : 491-498 (2004).

[56] G. Koch et al. “Liouville Theorems for the NavierStokes Equations and Applications”. *Acta Mathematica* 203 (1) : 83-105 (2009).

[57] I. Kukavica. “On Partial Regularity for the Navier-Stokes Equations”. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 21 (3) : 717-728 (2008).

[58] I. Kukavica. “Partial Regularity for the Navier-Stokes Equations with a Force in a Morrey Space”. *J. Math. Anal. Appl.* 374 (2) : 573-584 (2011).

[59] I. Kukavica. “Partial Regularity Results for Solutions of the NavierStokes System”. In : *Partial Differential Equations and Fluid Mechanics*. Sous la dir. de J. C. Robinson et J. L. Rodrigo. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. P. 121-145.

[60] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov et N. N. Ural’tseva. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. Translated from the Russian by S. Smith.* T. 23. Transl. Math. Monogr. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1968.

[61] P. G. Lemarié-Rieusset. *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem.* T. 431. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002. P. xiv+395.

[62] P. G. Lemarié-Rieusset. “The Navier-Stokes Equations in Mixed-Norm Time-Space Parabolic Morrey Spaces”. *Tunis. J. Math.* 6 (1) : 137-155 (2024).

[63] P. G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes Problem in the 21st Century.* CRC Press, Boca Raton, FL, 2016. P. xxii+718.

[64] J. Leray. “Sur Le Mouvement d’un Liquide Visqueux Emplissant l’espace”. *Acta Math.* 63 (1) : 193-248 (1934).

[65] D. Lhuillier et A. D. Rey. “Nematic Liquid Crystals and Ordered Micropolar Fluids”. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 120 (1) : 169-174 (2004).

[66] F. Lin. “A New Proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg Theorem”. *Comm. Pure Appl. Math.* 51 (3) : 241-257 (1998).

[67] Q. Liu. “A Regularity Criterion for the Navier-Stokes Equations in Terms of One Directional Derivative of the Velocity”. *Acta Appl. Math.* 140 (1) : 1-9 (2015).

[68] M. Loayza et M. A. Rojas-Medar. “A Weak-L^p Prodi-Serrin Type Regularity Criterion for the Micropolar Fluid Equations”. *Journal of Mathematical Physics* 57 (2) : 021512 (2016).

[69] G. Lukaszewicz. *Micropolar Fluids*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston, MA, 1998.

[70] G. Lukaszewicz. “On Non-Stationary Flows of Incompressible Asymmetric Fluids”. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 13 (3) : 219-232 (1990).

[71] G. Lukaszewicz. “On Stationary Flows of Asymmetric Fluids”. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat.* 12 (1) : 35-44 (1988).

[72] G. Lukaszewicz. *On the Existence, Uniqueness and Asymptotic Properties of Solutions of Flows of Asymmetric Fluids*. Preprint : Instytut Matematyki. 1989.

[73] G. Lukaszewicz, M.A. Rojas-Medar et M.M. Santos. “Stationary Micropolar Fluid with Boundary Data in L2”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 271 (1) : 91-107 (2002).

[74] Y. Maekawa, H. Miura et C. Prange. “Local Energy Weak Solutions for the NavierStokes Equations in the Half-Space”. *Communications in Mathematical Physics* 367 (2) : 517-580 (2019).

[75] A. Mahalov, B. Nicolaenko et T. Shilkin. “$L^{3,\infty}$-Solutions to the MHD Equations”. *Zap Nauchn Sem -Peterburg Otd. Mat Inst Steklov POMI* 336 : 112-132, 275-276 (2006).

[76] Kh. S. Mekheimer et M. A. El Kot. “The Micropolar Fluid Model for Blood Flow through a Tapered Artery with a Stenosis”. *Acta Mechanica Sinica* 24 (6) : 637-644 (2008).

[77] N. Mitarai, H. Hayakawa et H. Nakanishi. “Collisional Granular Flow as a Micropolar Fluid”. *Phys. Rev. Lett.* 88 (17) : 174301 (2002).

[78] C. J. Niche et C. F. Perusato. “Sharp Decay Estimates and Asymptotic Behaviour for 3D Magneto-Micropolar Fluids”. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 73 (2) : 48 (2022).

[79] M. O’Leary. “Conditions for the Local Boundedness of Solutions of the Navier-Stokes System in Three Dimensions”. *Comm. Partial Differential Equations* 28 (3-4) : 617-636 (2003).

[80] E. E. Ortega-Torres et M. A. Rojas-Medar. “On the Uniqueness and Regularity of the Weak Solution for Magneto-Micropolar Fluid Equations”. *Rev. Mat. Apl.* 17 (2) : 75-90 (1996).

[81] M. Padula et R. Russo. “A Uniqueness Theorem for Micropolar Fluid Motions in Unbounded Regions”. *Boll. Un. Mat. Ital. A* 13 (3) : 660-666 (1976).

[82] N. C. Phuc. “The NavierStokes Equations in Nonendpoint Borderline Lorentz Spaces”. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* 17 (4) : 741-760 (2015).

[83] M. A. Ragusa et F. Wu. “A Regularity Criterion for Three-Dimensional Micropolar Fluid Equations in Besov Spaces of Negative Regular Indices”. *Anal. Math. Phys.* 10 (3) : 30 (2020).

[84] A. Remond-Tiedrez. “Nonlinear Partial Differential Equations in Fluid Dynamics : Interfaces, Microstructure, and Stability”. Thèse de doct. Carnegie Mellon University, 2020.

[85] J. Robinson, J. Rodrigo et W. Sadowski. *The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations*. T. 157. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2016. P. xiv+471.

[86] M. A. Rojas-Medar. “Magneto - Micropolar Fluid Motion : Existence and Uniqueness of Strong Solution”. *Mathematische Nachrichten* 188 (1) : 301-319 (1997).

[87] V. Scheffer. “Hausdorff Measure and the Navier-Stokes Equations”. *Comm. Math. Phys.* 55 (2) : 97-112 (1977).

[88] V. Scheffer. “Partial Regularity of Solutions to the Navier-Stokes Equations”. *Pacific J. Math.* 66 (2) : 535-552 (1976).

[89] G. Seregin. “A Certain Necessary Condition of Potential Blow up for Navier-Stokes Equations”. *Commun. Math. Phys.* 312 (3) : 833-845 (2012).

[90] G. Seregin. “Chapter 4 - Local Regularity Theory of the NavierStokes Equations”. In : *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*. Sous la dir. de S. Friedlander et D. Serre. T. 4. North-Holland, 2007. P. 159-200.

[91] G. Seregin. *Lecture Notes on Regularity Theory for the Navier-Stokes Equations*. World Scientific, 2014. 268 p.

[92] G. Seregin. “Liouville Type Theorem for Stationary NavierStokes Equations”. *Nonlinearity* 29 (8) : 2191 (2016).

[93] J. Serrin. “On the Interior Regularity of Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations”. *Arch. Rational Mech. Anal.* 9 : 187-195 (1962).

[94] J. Serrin. “The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations”. In : *Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962)*. Univ. Wisconsin Press, Madison, WI, 1963. P. 69-98.

[95] M. Struwe. “On Partial Regularity Results for the Navier-Stokes Equations”. *Comm. Pure Appl. Math.* 41 (4) : 437-458 (1988).

[96] S. Takahashi. “On Interior Regularity Criteria for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations”. *Manuscripta Math.* 69 (3) : 237-254 (1990).

[97] T. Tao. *Quantitative Bounds for Critically Bounded Solutions to the Navier-Stokes Equations*. 2020.

[98] T.P. Tsai. *Lectures on Navier-Stokes Equations*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2018.

[99] A. Vasseur. “A New Proof of Partial Regularity of Solutions to Navier-Stokes Equations”. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 14 (5-6) : 753-785 (2007).

[100] V. Vyalov. "Partial Regularity of Solutions to the Magnetohydrodynamic Equations". In : *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. T. 150. 1. 2008. P. 1771-1786.

[101] L. Wang et al. "Implementation of Micropolar Fluids Model and Hydrodynamic Behavior Analysis Using User-Defined Function in FLUENT". *Adv. Mech. Eng.* 12 (7) : 1687814020943052 (2020).

[102] W. Wang et Z. Zhang. "On the Interior Regularity Criteria for Suitable Weak Solutions of the Magnetohydrodynamics Equations". *SIAM J. Math. Anal.* 45 (5) : 2666-2677 (2013).

[103] J. Wu. "Bounds and New Approaches for the 3D MHD Equations". *J. Nonlinear Sci.* 12 (4) : 395-413 (2002).

[104] J. Wu. "Regularity Results for Weak Solutions of the 3D MHD Equations". *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 10 (1-2) : 543-556 (2004).

[105] N. Yamaguchi. "Existence of Global Strong Solution to the Micropolar Fluid System in a Bounded Domain". *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 28 (13) : 1507-1526 (2005).

[106] B. Yuan. "Regularity of Weak Solutions to Magneto-Micropolar Fluid Equations". *Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)* 30 (5) : 1469-1480 (2010).

[107] W. Zajaczkowski et G. Serëgin. "Sufficient Condition of Local Regularity for the Navier-Stokes Equations". *Journal of Mathematical Sciences* 143 (2) : 2869-2874 (2007).