



## Índice

<b>1. La conexión KZ universal</b>	<b>1</b>
1.1. Qué es? Qué quiere decir que la conexión es <i>universal</i> ?	1
1.2. Holonomía de la conexión $\nabla_3^{\text{KZ}}$ y definición geométrica del asociador KZ	4
1.3. Monodromía de la conexión KZ y demostración geométrica del Teorema A	5
<b>2. Geometría de los Valores Multi-Zeta</b>	<b>9</b>
2.1. Fórmula integral de los valores multi-zeta	9
2.2. Valores multi-zeta y palabras admisibles	9
2.3. Cálculo del asociador KZ en bajo grado	11

## Introducción

El objetivo de esta sección es de convencer al lector de la idea según la cual, usando resultados básicos sobre la geometría de los espacios de configuraciones, la demostración del hecho que el asociador KZ es un asociador de Drinfel'd deviene una consecuencia de la planitud de una cierta conexión definida sobre este espacio y por lo tanto, de una cierta manera, las árduas manipulaciones de ecuaciones diferenciales a variables no conmutativas devienen «visibles», lo que nos permitirá tener una mejor comprensión de la arquitectura de los asociadores de Drinfel'd.

### 1. La conexión KZ universal

#### 1.1. Qué es? Qué quiere decir que la conexión es *universal* ?

El sistema diferencial  $(\text{KZ})_n$  da lugar a una conexión asociada, la conexión KZ universal, que es plana en el espacio de configuraciones de  $n$  puntos en el plano complejo. Independientemente de su aplicación a la comprensión de los asociadores de Drinfel'd y de los valores multizeta, esta conexión tiene varios campos de aplicación: por ejemplo proporciona una representación de monodromía de su grupo fundamental, es decir del grupo de trenzas puras sobre el plano. Esto conlleva en particular a resultados interesantes como la formalidad del grupo de trenzas puras en el plano.

Sea  $\mathcal{P} := \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \times \exp(\hat{\mathfrak{t}}_n)$  el  $\exp(\hat{\mathfrak{t}}_n)$ -fibrado principal trivial sobre  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ .

**Definición 1** La conexión KZ universal es  $\nabla_n^{\text{KZ}} := d - \omega_n^{\text{KZ}}$ , donde  $\omega_{\text{KZ}}$  es la 1-forma diferencial sobre  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$  a valores en el álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd  $\mathfrak{t}_n$  dada por la siguiente fórmula:

$$\omega_n^{\text{KZ}} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} d \log(z_i - z_j) t_{ij}.$$

**Observación 1** Una función  $\sigma : \text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \mathfrak{t}_n$  es una sección horizontal de  $\nabla_n^{\text{KZ}}$  si, y sólo si,  $\sigma$  es solución del sistema  $(\text{KZ})_n$ . En efecto, como  $\nabla_n^{\text{KZ}}$  es una conexión definida en un fibrado  $\exp(\mathfrak{t}_n)$ -trivial, sus secciones horizontales son funciones  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \rightarrow \mathfrak{t}_n$  por lo que  $\sigma$  está bien definida en tanto que sección.

#### Porqué se llama conexión universal?

La explicación del significado exacto de la palabra «universal» pasa por varios puntos. Empecemos definiendo el álgebra de Lie de holonomía de una variedad lisa.

Sea  $X$  una variedad lisa compleja. Sea  $H_{\text{dR}}^{\bullet}(X)$  el complejo de cohomología de de Rham de  $X$ , sea

$$\mu : \wedge^2 H_{\text{dR}}^1(X) \longrightarrow H_{\text{dR}}^2(X)$$

la aplicación multiplicación y sea  $K^{\perp} \subset \wedge^2 H_1^{\text{dR}}(X)$  el subespacio dual de  $K := \ker(\mu) \subset \wedge^2 H_{\text{dR}}^1(X)$ .

**Definición 2** La  $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie de holonomía  $\mathfrak{hol}(X)$  de  $X$  es el álgebra de Lie libre sobre  $H_1^{\text{dR}}(X)$  modulo las relaciones en  $K^{\perp}$ .

**Observación 2** Las relaciones en  $K^{\perp}$  son todas de grado 2, por lo que  $\mathfrak{hol}(X)$  esta provista de una graduación natural.

### Ejemplo 1

1. Supongamos que  $X = \text{Conf}(\mathbb{C}, 2)$ . Como  $\text{Conf}(\mathbb{C}, 2) \cong \mathbb{C}^2 - \{z_1 = z_2\}$ , podemos cambiar de coordenadas:

$$\begin{cases} x = z_1 + z_2 \\ y = z_1 - z_2 \end{cases}.$$

En estas coordenadas, la única 1-forma a singularidades logarítmicas sobre  $X$  es  $d \log(y)$ . De esta manera encontramos (utilizando el ejercicio 2 de la primera lección)

$$\mathfrak{hol}(X) = \mathfrak{f}_1(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{t}_2(\mathbb{C})$$

donde  $\mathfrak{f}_1$  es el álgebra de Lie libre a 1 generador (que es de dimensión 1).

2. Supongamos que  $X = \text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ . Entonces tenemos

- $H_{\text{dR}}^1(X)$  es generado por las 1-formas

$$\omega_{ij} = d \log(z_i - z_j)$$

donde  $1 \leq i < j \leq n$ .

- $K$  es generado por

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{ij}$$

donde  $1 \leq i < j < k \leq n$ .

- Si  $\{t_{ij}\}_{i < j} \in H_1^{\text{dR}}(X)$  es la base dual a la base  $\{\omega_{ij}\}_{i < j}$  de  $H_{\text{dR}}^1(X)$ , entonces  $K^{\perp}$  es generado por elementos

$$t_{ij} \wedge t_{kl}, \quad t_{ij} \wedge (t_{ik} + t_{jk})$$

donde  $\text{card}(i, j, k, l) = 4$ .

En conclusión, el álgebra de Lie de holonomía de  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$  es el álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd  $\mathfrak{t}_n$ .

De esta manera, vemos que el sistema  $d\varphi = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} d \log(z_i - z_j)$  está definido de manera totalmente natural

en el  $\exp(\widehat{\mathfrak{hol}(X)})$ -fibrado principal trivial sobre  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ . Por otro lado, este sistema contiene la mínima cantidad de información necesaria para estar bien definido:

- Sea  $W$  un espacio vectorial y consideremos el fibrado vectorial trivial  $\text{Conf}(\mathbb{C}, n) \times W \longrightarrow \text{Conf}(\mathbb{C}, n)$ . Notemos

$$\tilde{\nabla} = d - \sum_{1 \leq i < j \leq n} d \log(z_i - z_j) A_{ij}$$

una conexión definida en este fibrado donde  $A_{ij}$  son endomorfismos de  $W$ . En este caso, para que  $\tilde{\nabla}$  sea plana, es suficiente que los  $A_{ij}$  satisfagan las tres relaciones de trenzas infinitesimales. En este sentido, el álgebra de Lie de Kohno-Drinfel'd es el álgebra de Lie «más simple» que satisfaga estas ecuaciones.

- Consideremos la conexión

$$\nabla = d - \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} A_{ij}(z_i - z_j) d(z_i - z_j)$$

donde las matrices  $A_{ij}(z_i - z_j)$  actúan en la  $i$ -ava y la  $j$ -ava entrada de  $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ . En este caso, la conexión es plana si, y sólo si, la familia  $\{A_{ij}(z_i - z_j)\}$  satisface la ecuación de Yang-Baxter

$$[A_{ik}(z_i - z_k), A_{kj}(z_k - z_j)] + [A_{ik}(z_i - z_k), A_{ij}(z_i - z_j)] + [A_{ij}(z_i - z_j), A_{kj}(z_k - z_j)] = 0$$

En particular, si consideramos la opción más simple posible de  $r$ -matriz, es decir si consideramos

$$A_{ij}(z_i - z_j) := \frac{t_{ij}}{z_i - z_j},$$

donde  $t_{ij}$  son símbolos formales, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \text{ es plana} &\iff \{A_{ij}\} \text{ satisface la ecuación de Yang-Baxter} \\ &\iff \{t_{ij}\} \text{ satisface las relaciones de trenzas infinitesimales} \end{aligned}$$

- Por otro lado, la conexión universal « tiene realizaciones » : consideremos

- una  $\mathbb{C}$ -álgebra de Lie (semi-)simple  $\mathfrak{g}$  «clásica»;
- $\Omega = \sum_r x_r \otimes y_r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  un 2-tensor simétrico  $\mathfrak{g}$ -invariante (que es construido a partir del Casimir, proveniente a su vez de la forma de Killing asociada a  $\mathfrak{g}$ ),
- $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$  un entero no nulo,
- $V$  un  $\mathfrak{g}$ -modulo de dimensión finita,
- $\hbar = \frac{\hbar}{2i\pi} \in \mathbb{C}$  un parámetro formal,

Definamos

$$t^{ij} := \sum_r \alpha_r^{(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_r^{(n)} \in (\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{\otimes n}$$

donde  $\alpha_r^{(i)} = x_r$ ,  $\alpha_r^{(j)} = y_r$ , y  $\alpha_r^{(k)} = 1$ , donde  $k \neq i, j$ . Entonces

1. Cada  $t^{ij}$  induce un endomorfismo de  $V^{\otimes n}$  que satisface las relaciones de trenzas infinitesimales.
  - La prueba reside en la construcción de  $t^{ij}$  y la  $\mathfrak{g}$ -invariancia de  $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ .
2. Tenemos  $t^{ij} = t^{ji}$ .
  - La prueba reside en la simetría del 2-tensor  $t^{ij}$ .

Concluimos que tenemos un morfismo

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\mathfrak{t}}_n(\mathbb{C})) &\longrightarrow \text{End}(V^{\otimes n})[[\langle \rangle]] \\ e^{t_{ij}} &\longmapsto \hbar t^{ij} \end{aligned}$$

y el sistema

$$(KZ') \quad dw = \hbar \sum_{1 \leq i < j \leq n} d \log(z_i - z_j) t_{ij} w$$

se llama *realización del sistema (KZ)<sub>n</sub> universal asociada a  $(\mathfrak{g}, V)$* .

## 1.2. Holonomía de la conexión $\nabla_3^{\text{KZ}}$ y definición geométrica del asociador KZ

Sea  $\varepsilon > 0$ . Notemos  $X_0 = t_{12}$  y  $X_1 = t_{23}$ . Sea  $\Phi_\varepsilon(X_0, X_1)$  el transporte paralelo de la conexión KZ con respecto al camino  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1\}$  tal que  $\gamma(0) = \varepsilon$  y  $\gamma(1) = 1 - \varepsilon$ , es decir dado por la exponencial a caminos ordenados

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(X_0, X_1) &:= \mathcal{P} \exp \left( \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \left( \frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{z-1} \right) dz \right) \\ &= \sum_{\omega \text{ palabra en } X_0, X_1} c_\omega(\varepsilon) \cdot \omega \end{aligned}$$

donde, para  $j_0, \dots, j_n \in \{0, 1\}$ ,  $\omega = x_{j_0} \cdots x_{j_n} \in \mathbb{Q}\langle X_0, X_1 \rangle$ , tenemos

$$c_\omega(\varepsilon) = \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \frac{dt_1}{t_1 - z_{j_1}} \int_{\gamma(0)}^{t_1} \frac{dt_2}{t_2 - z_{j_2}} \cdots \int_{\gamma(0)}^{t_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n - z_{j_n}}. \quad (1)$$

Recordemos que la función polilogaritmo es dada, para  $s, z \in \mathbb{C}$ , por

$$\text{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

y los valores multi-zeta de Riemann son los reales

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \left( \prod_{i=1}^r \frac{1}{n_i^{k_i}} \right)$$

donde  $(k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{N}^{\geq 2})^r$ .

Vamos a admitir la siguiente proposición, que explicaremos en la próxima subsección.

**Proposición 1** Para cada palabra  $\omega$  en  $X_0$  y  $X_1$ , el escalar  $c_\omega(\varepsilon)$  es un polinomio en funciones polilogarítmicas de la forma  $\text{Li}_n(\varepsilon)$  y de la función  $\log(\varepsilon)$ . En particular, si la palabra  $\omega$  se termina en  $X_1$  (en particular  $\omega$  puede escribirse bajo la forma  $\omega = X_0^{n_1-1} X_1 X_0^{n_2-1} X_1 \dots X_0^{n_k-1} X_1$ , donde  $n_i \geq 2$  para todo  $k \geq 1$ ) entonces la función  $c_\omega(\varepsilon)$  converge cuando  $\varepsilon$  tiende hacia 0 y tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\omega(\varepsilon) = (-1)^k \zeta(n_1, \dots, n_k).$$

**Corolario 1**  $\Phi_\varepsilon(X_0, X_1)$  puede ser expandido asintóticamente en un polinomio homogéneo  $\Phi(\log(\varepsilon))$ , es decir

$$\Phi_\varepsilon(X_0, X_1) - \Phi(\log(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

**Proposición-Definición.** El asociador KZ de Drinfel'd es, de manera equivalente:

1. el cociente  $\Phi_{\text{KZ}} := G_1^{-1} G_0 \in \mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$  de la definición 10 de la primera lección;
2. la holonomía renormalizada de la conexión  $\nabla_3^{\text{KZ}}$  entre 0 y 1 (siguiendo la parte real de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$ ) i.e. el límite

$$\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{X_1} \Phi_\varepsilon(X_0, X_1) \varepsilon^{-X_0};$$

3. la regularización  $\Phi_{\text{KZ}} := \Phi(0)$  del polinomio  $\Phi(\log(\varepsilon))$  fijando formalmente  $\log(\varepsilon) = 0$ .

**Demostración** Primeramente, las tres definiciones tienen sentido gracias a los párrafos anteriores. Demostremos que estas definiciones son equivalentes. Tenemos la expresión

$$\Phi_\varepsilon(X_0, X_1) = G_1(1 - \varepsilon)G_1^{-1}G_0G_0^{-1}(\varepsilon)$$

de manera que el límite siguiente existe

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{X_1} \Phi_\varepsilon(X_0, X_1) \varepsilon^{-X_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{X_1} G_1(1 - \varepsilon)) G_1^{-1} G_0 (G_0^{-1}(\varepsilon) \varepsilon^{-X_0}) = G_1^{-1} G_0$$

Por lo tanto, la expansión asintótica de  $\Phi_\varepsilon(X_0, X_1)$  es  $\varepsilon^{X_1} G_1^{-1} G_0 \varepsilon^{-X_0}$ .  $\square$

### 1.3. Monodromía de la conexión KZ y demostración geométrica del Teorema A

Empecemos con un resultado crucial que nos permitirá trabajar con la conexión.

**Proposición 2** *La conexión KZ universal es plana, es decir:  $(\nabla_{\text{KZ}})^2 = 0$ .*

**Demostración** Calculamos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \sum_{\substack{i < j \\ k < l}} \frac{[t_{ij}, t_{kl}] d(z_i - z_j) d(z_k - z_l)}{(z_i - z_j)(z_k - z_l)} \\ &= \sum_{i \neq j} dz_i dz_j \left( \sum_{\substack{i \neq k \\ j \neq l}} \frac{[t_{ij}, t_{kl}]}{(z_i - z_j)(z_k - z_l)} \right) \\ &= \sum_{i \neq j} dz_i dz_j \left( \sum_{j \neq l} \frac{[t_{ij}, t_{kl}]}{(z_i - z_j)(z_j - z_l)} + \sum_{i \neq k} \frac{[t_{ik}, t_{ji}]}{(z_i - z_k)(z_j - z_i)} \right) \\ &= \sum_{i \neq j} dz_i dz_j \left( \sum_{k \neq i, j} \frac{-[t_{ik}, t_{jk}]}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)} + \sum_{k \neq i, j} \frac{[t_{ik}, t_{jk}]}{(z_i - z_k)(z_j - z_i)} \right) \\ &= - \sum_{i \neq j} dz_i dz_j \sum_{k \neq i, j} \frac{[t_{ik}, t_{jk}]}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)} = 0 \end{aligned}$$

Concluimos que la conexión es plana.  $\square$

De esta manera, podemos hablar de *monodromía* de la conexión y veremos cómo las relaciones de los asociadores de Drinfel'd provienen, en el caso del asociador KZ, precisamente de esta monodromía. A continuación reproducimos la demostración de Kohno del Teorema A. El elemento

$$\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{t_{23}} \mathcal{P} \exp \left( \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left( \frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1} \right) dz \right) \varepsilon^{-t_{12}}$$

es la holonomía renormalizada entre 0 y 1 de la conexión KZ universal, vista en la línea proyectiva compleja menos tres puntos. Vamos a demostrar es que el par  $(2i\pi, \Phi_{\text{KZ}})$  es un asociador de Drinfel'd.

**El caso  $n = 2$ .** En primer lugar, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathbb{C}, n) &\cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} - \{0\} \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (t, w) := (z_2, z_1 - z_2) \end{aligned}$$

De esta manera, la conexión KZ se escribe

$$\nabla_2^{\text{KZ}} = d - \frac{t_{12}}{w} dw.$$

La ecuación KZ asociada es el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial w} F = \frac{t_{12}}{w} F \\ \frac{\partial}{\partial t} F = 0 \end{cases}$$

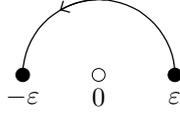
Por lo tanto, las soluciones están dadas por

$$F(z_1, z_2) = C(z_1 - z_2)^{t_{12}}$$

para una cierta constante  $C$ . Sea

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ t &\longmapsto \varepsilon e^{i\pi t} \end{aligned}$$

el camino continuo que traza un semi-círculo cerrado de  $\varepsilon$  a  $-\varepsilon$  en  $\mathbb{C} - \{0\}$ :



Inmediatamente encontramos que la holonomía renormalizada de la conexión  $\nabla_2^{\text{KZ}}$  es  $e^{i\pi t_{12}} = e^{\frac{\lambda}{2} t_{12}}$  para  $\lambda = 2i\pi$ .

**El caso  $n = 3$ :** Primeramente, tenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Conf}(\mathbb{C}, 3) &\cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}) \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto (t, w, z) := \left( z_3, z_1 - z_3, \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \right) \end{aligned}$$

En estas coordenadas, las ecuaciones  $(\text{KZ})_3$  se vuelven:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial w} F = \frac{t_{12} + t_{13} + t_{23}}{w} F \\ \frac{\partial}{\partial t} F = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} F = \frac{t_{12}}{z} F + \frac{t_{23}}{z-1} F \end{cases}$$

**Observación 3** El lector avisado se dará cuenta que estamos refraseando los resultados de la lección anterior. En efecto, la solución en este caso es

$$F(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_3)^{t_{12} + t_{13} + t_{23}} G\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right),$$

donde  $G(z)$  resuelve la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial z} G = \frac{t_{12}}{z} G + \frac{t_{23}}{z-1} G.$$

Estamos listos para empezar la demostración:

$\longrightarrow \Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) \in \exp(\hat{f}(t_{12}, t_{23}))$ : Por ahora solo sabemos que  $\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) \in \mathbb{C}\langle\langle t_{12}, t_{23} \rangle\rangle$ . Para demostrar que  $\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) \in \exp(\hat{f}(t_{12}, t_{23}))$  tenemos que demostrar que  $\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23})$  es group-like, es decir que  $\Delta\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) = \Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23})$ . Por un lado,

$$\Delta\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) = \Phi_{\text{KZ}}(\Delta t_{12}, \Delta t_{23}) = \Phi_{\text{KZ}}(t_{12} \otimes 1 + 1 \otimes t_{12}, t_{23} \otimes 1 + 1 \otimes t_{23}).$$

Por otro lado  $\Phi_{\text{KZ}}(t_{12} \otimes 1 + 1 \otimes t_{12}, t_{23} \otimes 1 + 1 \otimes t_{23})$  es la holonomía de la conexión

$$\nabla = d - \left( \frac{t_{12} \otimes 1 + 1 \otimes t_{12}}{z} + \frac{t_{23} \otimes 1 + 1 \otimes t_{23}}{z-1} \right) dz = d - \frac{t_{12} \otimes 1 + 1 \otimes t_{12}}{z} dz - \frac{t_{23} \otimes 1 + 1 \otimes t_{23}}{z-1} dz$$

que puede ser también vista como suma de dos conexiones en dos fibrados diferentes. De esta manera, su holonomía puede ser calculada separadamente. Finalmente obtenemos

$$\Delta\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) = \Phi_{\text{KZ}}(t_{12} \otimes 1 + 1 \otimes t_{12}, t_{23} \otimes 1 + 1 \otimes t_{23}) = \Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) \hat{\otimes} \Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}).$$

$\longrightarrow$  **Antisimetría:** Tomando el cambio de variables  $z = 1 - y$ , la conexión se escribe

$$d - \left( \frac{t_{12}}{y-1} + \frac{t_{23}}{y} \right) dy$$

cuya holonomía entre  $\varepsilon$  y  $1 - \varepsilon$  es  $\Phi_\varepsilon(t_{23}, t_{12})$ . Por simetría, esta también es la holonomía de  $1 - \varepsilon$  a  $\varepsilon$  de la conexión original es decir el inverso de la holonomía entre  $\varepsilon$  y  $1 - \varepsilon$  de la misma conexión. De esta manera

$\Phi_\varepsilon(t_{23}, t_{12}) = \Phi_\varepsilon(t_{12}, t_{23})^{-1}$ . Automáticamente verificamos que la misma ecuación se mantiene para la expansión asintótica y la regularización.

→ **Dos hexágonos:** Usando el cálculo de la monodromía en el caso  $n = 2$ , vemos fácilmente que la holonomía regularizada de  $\nabla_3^{\text{KZ}}$  al rededor de la singularidad  $z = 0$  (en sentido contrario a las agujas del reloj) en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$  es  $e^{i\pi t_{12}}$ .

### Ejercicio 1

1. Demostrar que si tomamos el camino  $\gamma$  en el sentido de las agujas del reloj obtenemos una holonomía igual a  $e^{-i\pi t_{12}}$ .
2. Demostrar que la holonomía regularizada de  $\nabla_3^{\text{KZ}}$  al rededor (en sentido contrario a las agujas del reloj) de la singularidad  $z = 1$  en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$  es  $e^{2i\pi t_{23}}$ .
3. Realizando un cambio de variables a determinar, demostrar que la holonomía regularizada de  $\nabla_3^{\text{KZ}}$  al rededor (en sentido contrario a las agujas del reloj) de la singularidad  $z = \infty$  en  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$  es  $e^{2i\pi t_{13}}$ .

De esta manera, podemos considerar los caminos

$$\gamma^+ := \gamma_1^+ \gamma_2^+ \gamma_3^+ \gamma_4^+ \gamma_5^+ \gamma_6^+ \text{ y } \gamma^- := \gamma_1^- \gamma_2^- \gamma_3^- \gamma_4^- \gamma_5^- \gamma_6^-$$

formados por la yuxtaposición de los 6 caminos siguientes:

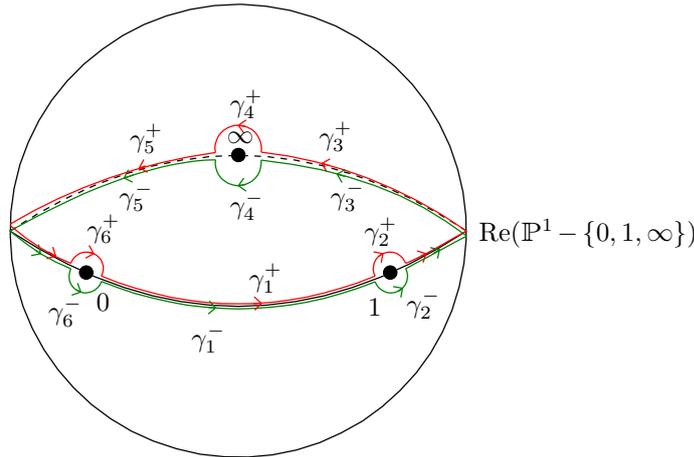


Figura 1: Caminos en  $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

Hemos calculado la holonomía de cada uno de estos caminos. Notemos que el camino  $\gamma_1$  es contractible y la conexión es plana por lo que el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma^+$  es  $T_{\gamma^+} = 1$ . Por otro lado, como  $\gamma^+$  está compuesto de 6 términos obtenemos una ecuación

$$R_{12}\Phi_\varepsilon(t_{13}, t_{12})R_{13}\Phi_\varepsilon(t_{23}, t_{13})R_{23}\Phi_\varepsilon(t_{12}, t_{23}) = 1.$$

Usando la expansión asintótica de  $\Phi_\varepsilon$ , podemos ver que  $R_{12}\Phi_\varepsilon(t_{13}, t_{12})R_{13}\Phi_\varepsilon(t_{23}, t_{13})R_{23}\Phi_\varepsilon(t_{12}, t_{23})$  tiene una expansión asintótica que es un polinomio en  $\varepsilon$  en cada grado. De esta manera, la ecuación debe mantenerse para la parte en término constante, es decir cuando establecemos formalmente  $\log(\varepsilon) = 0$ .

Por otro lado, gracias al Ejercicio 2 de la primera lección, sabemos que  $\mathfrak{t}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}c_3 \oplus \mathfrak{f}(t_{12}, t_{23})(\mathbb{C})$ . De esta manera, obtenemos la ecuación

$$e^{-\frac{\lambda}{2}t_{12}}\Phi(t_{13}, t_{12})e^{-\frac{\lambda}{2}t_{13}}\Phi(t_{23}, t_{13})e^{-\frac{\lambda}{2}t_{23}}\Phi(t_{12}, t_{23}) = 1 \text{ en } \exp(\hat{\mathfrak{t}}_3(\mathbb{C}))$$

para el valor  $\lambda = 2i\pi$ .

**Observación 4** Hay que leer la yuxtaposición de caminos de la izquierda a la derecha (ej. el camino  $\gamma_1^+ \gamma_2^+$  recorre primero  $\gamma_1^+$  y luego  $\gamma_2^+$ ). La composición de holonomías se lee de la derecha hacia la izquierda como para la composición de funciones.

## Ejercicio 2

1. Calcular la holonomía del camino  $\gamma^-$  y encontrar la relación del hexágono restante.
2. Sea  $h \in \mathbb{C}^\times$ . Si consideramos la conexión

$$\nabla_{n,h}^{\text{KZ}} = d - \frac{h}{2i\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} d \log(z_i - z_j)$$

y notamos  $\Phi_{\text{KZ}}^h$  la holonomía renormalizada entre 0 y 1 de  $\nabla_{3,h}^{\text{KZ}}$ , encontrar  $\lambda$  de tal manera que  $(\lambda, \Phi_{\text{KZ}}^h)$  sea un  $\mathbb{C}$ -asociador.

(Respuesta :  $\lambda = h$ )

**El caso  $n = 4$ :** Presentaremos los grandes pasos de la demostración del pentágono, dejando al cuidado del lector el detalle de la demostración.

→ **El pentágono:** Luego de identificar a  $\text{Conf}(\mathbb{C}, 4)$  con un producto de espacios donde figura el espacio  $(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \{(z, z)\}$ , uno puede interpretar al asociador KZ como la holonomía renormalizada entre 0 y 1 de la conexión KZ sobre el espacio  $(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \{(z, z)\}$ . El camino correspondiente al pentágono visto en

$$\text{Re}((\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \{(z, z)\}),$$

realizado en la segunda lección y correspondiente a las regiones  $Z_1, \dots, Z_5$  de  $\text{Re}(\text{Conf}(\mathbb{C}, 4))$ , es precisamente el camino siguiente

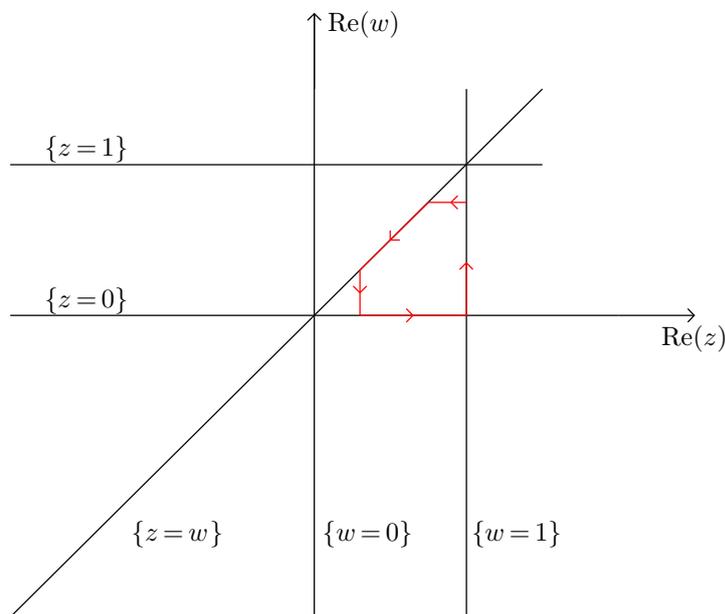


Figura 2: Caminos en  $\text{Re}((\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})^2 - \{(z, z)\})$

De la misma manera que para los dos hexágonos, este camino es contractible por lo que su holonomía es igual a 1. Observando que podemos en efecto pasar a la holonomía renormalizada, obtenemos la relación del pentágono requerida.

## 2. Geometría de los Valores Multi-Zeta

### 2.1. Fórmula integral de los valores multi-zeta

Recordemos que los valores multi-zeta son los reales

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_r^{k_r}}$$

donde  $(k_1, \dots, k_r) \in (\mathbb{N}^{\geq 2})^r$ . Estos números han sido estudiados desde Euler (1775). La trascendencia/irracionalidad de estos números es un campo de mucho misterio y del cual no sabemos mucho.

**Proposición 3 (Kontsevich)** *Los valores multi-zeta pueden ser escritos bajo forma integral:*

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = (-1)^r \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n - \epsilon_n} \cdot \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1} - \epsilon_{n-1}} \dots \frac{dt_1}{t_1 - \epsilon_1}$$

donde

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{k_1-1 \text{ veces}}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2-1 \text{ veces}}, 1, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_r-1 \text{ veces}}, 1 \right).$$

**Ejemplo 2** *Tenemos*

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \frac{dt_1}{t_1} = \int_0^1 \int_0^{t_1} \frac{dt_1}{t_1} \sum_{n \geq 1} t_2^{n-1} dt_2 = \int_0^1 \sum_{n \geq 1} \frac{t_1^n}{n} \frac{dt_1}{t_1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 t_1^{n-1} dt_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

de manera que encontramos la definición clásica de  $\zeta(2)$ .

**Proposición 4** *El asociador de Knizhnik-Zamolodchikov es una serie generadora de todos los valores multi-zeta (regularizados) i.e. tenemos:*

$$\Phi_{\text{KZ}}(X, Y) = \sum_{w \text{ palabra en } X, Y} \zeta_w \cdot w.$$

donde  $\zeta_w$  es el valor multi-zeta (regularizado) asociado a la palabra  $w$ .

**Ejemplo 3** *En particular, tenemos una descripción explícita en bajo grado de esta serie:*

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{KZ}}(A, B) &= 1\zeta(2)[A, B]\zeta(3)[A, [A, B]] + \zeta(1, 2)[[A, B], B] \\ &\quad + \zeta(4)[A, [A, [A, B]]] + \zeta(1, 3)[A, [[A, B], B]]\zeta(1, 1, 2)[[[A, B], B], B] \\ &\quad + 1\zeta(2)^2[A, B]^2 + \dots \end{aligned}$$

### 2.2. Valores multi-zeta y palabras admisibles

Cómo están repartidos los valores multizetas en la serie de la Proposición 4? Para responder a esta pregunta necesitamos introducir la noción de palabra admisible. Empecemos calculando las integrales iteradas del asociador para dos diferentes tipos de palabras.

**Observación 5** *Para calcular las integrales (1), podemos usar las relaciones*

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-1} &= -\sum_{j=0}^{\infty} t^j \\ \int \frac{\log^n(t) dt}{t} &= \frac{1}{n+1} \log^{n+1}(t) \\ \int \log^n(t) t^m dt &= \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{m+1} \frac{n!}{(n-j)!} \log^{n-j}(t) t^{m+1} \end{aligned}$$

**Ejemplo 4** Supongamos que  $\omega = X_0X_0X_1$ . Vamos a simplificar los cálculos omitiendo los términos que tienden hacia 0 cuando  $\varepsilon$  tiende hacia 0. En ese caso, la triple integral integrales en  $c_\omega$  es

$$\begin{aligned} c_\omega(\varepsilon) &= \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \frac{dt_1}{t_1} \int_{\gamma(0)}^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \int_{\gamma(0)}^{t_2} \frac{dt_3}{t_3 - 1} \\ &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dt_1}{t_1} \int_\varepsilon^{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \left( -\sum_{j \geq 0} \frac{t_2^{j+1}}{j+1} \right) \\ &= -\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dt_1}{t_1} \left( \sum_{j \geq 0} \frac{t_1^{j+1}}{(j+1)^2} \right) \\ &= -\sum_{j \geq 0} \frac{(1-\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)^3} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\zeta(3). \end{aligned}$$

Observamos que, en este caso,  $c_\omega$  converge cuando  $c_w$  es igual a 0.

**Ejemplo 5** Supongamos esta vez que  $\omega = X_0X_1X_0$ . Calculamos en este caso:

$$\begin{aligned} c_\omega(\varepsilon) &= \int_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} \frac{dt_1}{t_1} \int_{\gamma(0)}^{t_1} \frac{dt_2}{t_2 - 1} \int_{\gamma(0)}^{t_2} \frac{dt_3}{t_3} \\ &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dt_1}{t_1} \int_\varepsilon^{t_1} \frac{dt_2}{t_2 - 1} (\log(t_2) - \log(\varepsilon)) \\ &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{dt_1}{t_1} \left( \sum_{j \geq 0} \frac{t_1^{j+1}}{j+1} \log\left(\frac{t_1}{\varepsilon}\right) - \sum_{j \geq 0} \frac{t_1^{j+1}}{(j+1)^2} - \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j+1} \log(\varepsilon) - \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^{j+1}}{(j+1)^2} \right) \end{aligned}$$

Omitiendo los términos que tienden hacia 0 obtenemos un término en

$$-\sum_{j \geq 0} \frac{(1-\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)^3} - \sum_{j \geq 0} \frac{(1-\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)^3} - \sum_{j \geq 0} \frac{(1-\varepsilon)^{j+1}}{(j+1)^2} \log(\varepsilon) \sim -2\zeta(3) - \zeta(2) \log(\varepsilon).$$

→ Esta expresión diverge logarítmicamente con  $\varepsilon$ . Esta es una de las razones por la que nos vemos forzados a renormalizar la holonomía : para poder eliminar estos términos divergentes.

Cuales son las palabras  $\omega$  para las que  $c_\omega(\varepsilon)$  converge? Para responder a esta pregunta tenemos que hablar de palabras admisibles.

**Definición 3** Una palabra admisible (o convergente) en letras  $X, Y$  es una palabra  $\omega \in \mathbb{Q}\langle X, Y \rangle$  que empieza por  $X$  y termina por  $Y$  de la forma  $\omega = XvY$  donde  $v$  es una palabra cualquiera.

Estamos listos para caracterizar las palabras convergentes con respecto a los valores multi-zeta.

**Proposición 5** Tenemos una biyección

$$\begin{aligned} (\mathbb{N}^{\geq 2})^r &\longleftrightarrow \{\text{palabras admisibles en } x, y\} \\ (k_1, \dots, k_r) &\longleftrightarrow x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \dots x^{k_r-1}y \end{aligned}$$

y el valor  $c_\omega(\varepsilon)$  converge hacia

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \zeta_{x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \dots x^{k_r-1}y}.$$

precisamente cuando la palabra  $w$  es admisible.

**Observación 6** ■ Esto explica la Proposición 1.

- Existe una manera de asociar al resto de palabras (aquellas que no son admisibles) una noción ligeramente mas general de valor multizeta llamada multizeta regularizado. No entraremos en el detalle de esta noción por falta de tiempo.

### 2.3. Cálculo del asociador KZ en bajo grado

Pasemos a calcular los términos en grado inferior e igual a 2 del asociador  $\Phi_{\text{KZ}}$ . De manera general, tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(t_{12}, t_{23}) &= \mathcal{P} \exp \left( \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{1-z} \right) dz \right) \\ &= 1 + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \frac{t_{12}}{t_1} + \frac{t_{23}}{1-t_1} \right) dt_1 \\ &\quad + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{t_1} \left( \frac{t_{12}^2}{t_1 t_2} + \frac{t_{12} t_{23}}{t_1(1-t_2)} + \frac{t_{23} t_{12}}{t_2(1-t_1)} + \frac{t_{23}^2}{(1-t_2)(1-t_1)} \right) dt_2 \right) dt_1 \\ &\quad + \dots\end{aligned}$$

El término en grado 1 es

$$t_{12} \log \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) + t_{23} \log \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right).$$

Los términos en grado 2 son:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{t_1} \left( \frac{t_{12}^2}{t_1 t_2} \right) dt_2 \right) dt_1 &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( t_{12}^2 \frac{\log(t_1) - \log(\varepsilon)}{t_1} \right) dt_1 \\ &= \frac{t_{12}^2}{2} (\log(1-\varepsilon)^2 - \log(\varepsilon)^2) - t_{12}^2 \log(\varepsilon) (\log(1-\varepsilon) - \log(\varepsilon)) \\ &= t_{12}^2 \left( \frac{\log(1-\varepsilon)^2}{2} + \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} - \log(\varepsilon) \log(1-\varepsilon) \right).\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{t_1} \left( \frac{t_{12} t_{23}}{t_1(1-t_2)} \right) dt_2 \right) dt_1 &= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( t_{12} t_{23} \frac{\log(1-t_1) - \log(1-\varepsilon)}{t_1} \right) dt_1 \\ &= t_{12} t_{23} (\text{Li}_2(\varepsilon) - \text{Li}_2(1-\varepsilon) \log(1-\varepsilon) (\log(1-\varepsilon) - \log(\varepsilon)))\end{aligned}$$

**Ejercicio 3** *Demostrar que*

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{t_1} \left( \frac{t_{23} t_{12}}{t_2(1-t_1)} \right) dt_2 \right) dt_1 = t_{23} t_{12} (\text{Li}_2(1-\varepsilon) - \text{Li}_2(\varepsilon) - \log(\varepsilon) (\log(\varepsilon) - \log(1-\varepsilon)))$$

y

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \int_\varepsilon^{t_1} \left( \frac{t_{23}^2}{(1-t_2)(1-t_1)} \right) dt_2 \right) dt_1 = t_{23}^2 \left( \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} + \frac{\log(1-\varepsilon)^2}{2} - \log(\varepsilon) \log(1-\varepsilon) \right)$$

Utilizando los desarrollos de Taylor

$$\varepsilon^{-t_{23}} = 1 - t_{23} \log(\varepsilon) + t_{23}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} + \dots$$

y

$$t^{t_{12}} = 1 + t_{12} \log(\varepsilon) + t_{12}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} + \dots,$$

y observando que  $\text{Li}_2(0) = 0$  y  $\text{Li}_2(1) = \zeta(2)$ , obtenemos las simplificaciones :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-t_{23}} \mathcal{P} \exp \left( \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left( \frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{1-z} \right) dz \right) t^{t_{12}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 - t_{23} \log(\varepsilon) - t_{12} \log(\varepsilon) + t_{23} \log(\varepsilon) + t_{12} \log(\varepsilon) + t_{23}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} + t_{12}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} \\ &\quad + [t_{12}, t_{23}] (\text{Li}_2(\varepsilon) - \text{Li}_2(1-\varepsilon)) - t_{23} t_{12} \log(\varepsilon)^2 + t_{23}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} + t_{12}^2 \frac{\log(\varepsilon)^2}{2} \\ &\quad - t_{23} \log(\varepsilon)^2 (t_{23} - t_{12}) + \log(\varepsilon)^2 (t_{23} - t_{12}) t_{12} - t_{23} t_{12} \log(\varepsilon)^2 + \dots \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + [t_{12}, t_{23}] (\text{Li}_2(\varepsilon) - \text{Li}_2(1-\varepsilon)) + \dots) \\ &= 1 - \zeta(2) [t_{12}, t_{23}] + \dots\end{aligned}$$

De esta manera, la conclusión es que  $\Phi_{\text{KZ}}(t_{12}, t_{23})$  es una serie generadora de todos los valores multi-zeta. Como corolario, obtenemos nuevas relaciones entre los diferentes valores multi-zeta provenientes de las relaciones del pentágono y los hexágonos de los asociadores:

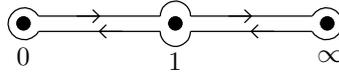
**Corolario 2** *Los valores multizeta satisfacen las relaciones de los asociadores de Drinfel'd.*

No solo eso, sino que gracias a la definición geométrica del asociador KZ, podemos encontrar viejas relaciones que remontan a los trabajos de Euler, como lo ilustra el siguiente teorema del matemático Pierre Deligne<sup>1</sup>:

**Teorema 1 (Deligne, sección 18 de [Del89])** *La relación*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{2 \times (2n)!} (2\pi)^{2n}$$

*proviene de las relaciones de antisimetría y pentágono vía el camino contractible, visto en el espacio  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{0, 1, \infty\}$*



**Nota.** En este capítulo nos hemos basado de manera extensa en los cálculos integrales de la holonomía del asociador que se encuentran en [Saf14] y [Wil14].

La demostración de la planitud de la conexión KZ es por lo general larga. La demostración alternativa, más corta, propuesta en esta lección se encuentra en [Wil14].

Se puede encontrar la combinatoria exacta de la serie de 4 y del cálculo en bajo grado de la misma serie en el Teorema 3,2,3 y párrafos subsiguientes del artículo [Fur03].

## Referencias

- [Del89] Pierre Deligne. Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In *Galois groups over  $\mathbb{Q}$* , volumen 16 de *MSRI publications*, pages 72–297. Springer-Verlag, 1989.
- [Dri91] V. G. Drinfeld. On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group that is closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . *Leningrad Math. J.*, 2(4):829–860, 1991.
- [Fur03] Hidekazu Furusho. The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 39(4):695–720, 2003.
- [Kas12] Christian Kassel. *Quantum groups*, volumen 155. Springer Science & Business Media, 2012.
- [KN63] Shoshichi Kobayashi y Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. vol. 1*. Interscience (Wiley), New York, 1963.
- [Mer11] T. Merkulov, S. Ekedahl. Grothendieck-Teichmüller group in algebra, geometry and quantization: a survey. Unpublished, 2011.
- [Saf14] Pavel Safronov. KZ associator. Notes for the Workshop "Quantizations, E2 formality, and all that", 2014.
- [Wil14] Thomas Willwacher. The grothendieck-Teichmüller group. Lecture notes, 2014.

---

<sup>1</sup>Matemático belga, medallista Fields de 1978.