Fundamentos de Topología Diferencial

Carlos Ajila y Said Caizaluisa

Supervisión: Carlos Ajila

Amarun
V1 2025

Índice general

Capítulo 1 Espacios localmente anillados

Lección 1

1.1. Breve recuento de Teoría de Categorías

1.1.1. Categorías

Una *categoría* $\mathcal{C}$ es una colección que consta de la siguiente información:

- Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ cuyos elementos se llaman los *objetos* de la categoría $\mathcal{C}$.
- Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una clase (posiblemente vacía) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos se llaman *morfismos*. Un elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ se denota por $f : A \to B$ o $A \xrightarrow{f} B$.
- Para cada tres objetos $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una función

$$\begin{array}{rccl} \circ : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ & (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

  llamada *composición*.

Además esta información está regida por los siguientes axiomas:

C1. La composición es asociativa, es decir, si A, B, C, D son objetos de $\mathcal{C}$ y si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son morfismos, entonces

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

C2. Para cada objeto A en la categoría $\mathcal{C}$, existe $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ llamado el *morfismo identidad sobre* A que satisface la siguiente propiedad: Si A, B, C son objetos de $\mathcal{C}$ y $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son morfismos, entonces

$$f \circ 1_A = f \qquad \text{y} \qquad 1_A \circ g = g.$$

La identidad sobre un objeto A suele denotarse también como id_A. Usaremos ambas notaciones indiscriminadamente, según sea más conveniente para la escritura.

Ejercicio 1.1. Muestre que las identidades en una categoría son únicas.

Ejemplo 1.2. La categoría **Sets** es aquella cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las funciones entre conjuntos. La composición en esta categoría está dada por la composición usual de funciones y las identidades por la función identidad de conjuntos.

Ejemplo 1.3. Sea X un *preorden*, es decir, X es un conjunto equipado con una relación $\leq$ reflexiva y transitiva (no necesariamente antisimétrica). Entonces X define una categoría $\mathbb{X}$ cuyos objetos son los elementos de X y cuyos morfismos están dados del siguiente modo: Si $x, y \in X$, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \nleq y \\ \{(x,y)\} & \text{si } x \leq y. \end{cases}$$

Si $x \leq y \leq z$, se tiene la composición

$$(y,z) \circ (x,y) = (x,z).$$

Las identidades están dadas por los pares ordenados (x,x).

Ejemplo 1.4. Si G es un grupo, este define una categoría $\mathbb{G}$ del siguiente modo: $\mathrm{Ob}(\mathbb{G}) = \{*\}$ (un conjunto de un elemento) y tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(*,*) = G.$$

La composición está dada por la ley de composición interna del grupo y la identidad es el neutro del grupo.

Ejemplo 1.5. La categoría **Grp** tiene como objetos a todos los grupos, como morfismos a todos los homomorfismos de grupos, con la composición usual de funciones.

Ejemplo 1.6. La categoría **Ab** tiene como objetos a todos los grupos abelianos, como morfismos a todos los homomorfismos de grupos, con la composición usual de funciones.

Definición 1.1. Sea $f : A \to B$ un morfismo en una categoría.

(i) f se dice un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : C \to A$ tales que $f \circ g = f \circ h$ se tiene que $g = h$.

(ii) f se dice un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : B \to C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ se tiene que $g = h$.

(iii) f se dice un *isomorfismo* si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Ejercicio 1.7. Pruebe que todo isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo, pero que un morfismo que es a la vez monomorfismo y epimorfismo no es necesariamente un isomorfismo.

Ejercicio 1.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con un sólo objeto $*$. Asuma que $G := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*)$ es un conjunto y que todo elemento de G es un isomorfismo. Pruebe que G es un grupo.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. La *categoría opuesta* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es la categoría cuyos objetos son

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

y donde, si X, Y son objetos de $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

con composición $g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ g$, siendo $\circ$ la composición en $\mathcal{C}$.

1.1.2. Funtores

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor covariante* es una función $T : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ junto con una colección de funciones

$$\begin{array}{rccc} T_{A,B}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(A),T(B)) \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ que verifica las siguientes propiedades: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f),$$

y para todo objeto A de $\mathcal{C}$,

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

Denotamos $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Análogamente un *funtor contravariante* es una función $T : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ junto con una colección de funciones

$$\begin{array}{rccc} T_{A,B}: & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T(B),T(A)) \\ & f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

para cada par de objetos A, B en $\mathcal{C}$ que verifica las siguientes propiedades: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces

$$T(g \circ f) = T(f) \circ T(g),$$

y para todo objeto A de $\mathcal{C}$,

$$T(1_A) = 1_{T(A)}.$$

En otras palabras, T es un funtor contravariante de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ si $T : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante.

Note que existe una noción obvia de composición de funtores y también un funtor identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ para toda categoría $\mathcal{C}$. En particular, podemos construir la categoría **Cat** cuyos objetos son las categorías pequeñas (i.e. donde las clases de objetos y morfismos son ambas conjuntos) y cuyos morfismos son los funtores.

Ejemplo 1.9 (Funtores Hom)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Definimos el funtor $T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to$ **Sets** del siguiente modo: Si B es un objeto de $\mathcal{C}$, entonces $T(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y si $f : B \to C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $T(f) = f_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ es la función dada por

$$f_*(g) = f \circ g, \qquad \text{para todo } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Similarmente, se define el funtor $S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \to$ **Sets** para cada objeto B de $\mathcal{C}$ mediante $S(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ y para cada morfismo $f : B \to C$, la función $S(f) = f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ mediante

$$f^*(g) = g \circ f, \qquad \text{para todo } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$$

Ejercicio 1.10. Pruebe que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ es un funtor covariante y que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ es un funtor contravariante.

Ejercicio 1.11. Sean X e Y dos pre-órdenes. Explique por qué un funtor covariante $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es "lo mismo" que una aplicación creciente $f : X \to Y$. Similarmente explique por qué un funtor contravariante $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es lo mismo que una aplicación decreciente $X \to Y$.

1.1.3. Transformaciones naturales

Definición 1.3. Sean $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Una *transformación natural* $\eta : S \to T$ es una colección de morfismos $\eta = (\eta_A : S(A) \to T(A))_{A\in\mathcal{C}}$ en la categoría $\mathcal{D}$ tal que para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} S(A) & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\ {\scriptstyle S(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle T(f)} \\ S(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & T(B). \end{array}$$

Ejemplo 1.12. Sea **Ring** (resp. **CRing**) la categoría cuyos objetos son anillos (resp. anillos conmutativos) con unidad y donde los morfismos son homomorfismos de anillos (que preservan el 1), con la composición usual de morfismos. Hay un funtor natural $i : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ring}$ que es la inclusión, pero además, para cada entero positivo n, hay un funtor

$$\mathbf{Mat}_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ring}$$

que a cada anillo conmutativo A le asigna el anillo $\mathbf{Mat}_n(A)$ de matrices cuadradas $n \times n$ con entradas en A. Si $f : A \to B$ es un homomorfismo de anillos conmutativos, entonces se tiene que

$$\mathbf{Mat}_n(f) : \mathbf{Mat}_n(A) \to \mathbf{Mat}_n(B), \quad (a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$$

es un homomorfismo de anillos. Es fácil verificar (y el lector debe hacerlo) que $\mathbf{Mat}_n$ es un funtor.

Con esto, tenemos que el determinante det es una transformación natural del funtor $\mathbf{Mat}_n$ hacia el funtor i. Más precisamente, para cada anillo conmutativo A y para cada entero positivo n, tenemos $\det_A^{(n)} : \mathbf{Mat}_n(A) \to A = j(A)$ dada por

$$\det_A^{(n)}((a_{ij})) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Ejemplo 1.13. Sea k un cuerpo y $\mathbf{fdVect}_k$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita y aplicaciones lineales. Tenemos un funtor

$$D : \mathbf{fdVect}_k \to \mathbf{fdVect}_k, \quad V \mapsto V^{**}$$

donde V^{**} es el espacio bidual de V. La aplicación

$$J_V : V \to V^{**}, \quad v \mapsto [\varphi \mapsto \langle \varphi, v\rangle]$$

es un isomorfismo k-lineal, y la colección de tales aplicaciones, $J = (J_V)_V$, es una transformación natural $J : \mathrm{Id} \to D$, donde $\mathrm{Id} : \mathbf{fdVect}_k \to \mathbf{fdVect}_k$ es el funtor identidad.

Si $\eta : F \to G$ y $\theta : G \to H$ son transformaciones naturales de funtores $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, su composición se define por

$$(\theta \circ \eta)_C = \theta_C \circ \eta_C$$

para todo objeto C en $\mathcal{C}$. De este modo, obtenemos una categoría $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ cuyos objetos son los funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre estos funtores.

1.1.4. Límites directos e inversos

Definición 1.4. Un conjunto preordenado $(I, \leq)$ se dice *dirigido* si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Ejemplo 1.14. Sea X un espacio topológico y $x \in X$ un punto. Denotamos por $\mathcal{V}(x)$ al conjunto de todas las vecindades abiertas de x en X, es decir, el conjunto de todos los abiertos $U \subseteq X$ tales que $x \in U$. Ordenando a $\mathcal{V}(x)$ por inclusión inversa, es decir, $U \leq V$ si $V \subseteq U$, obtenemos un conjunto dirigido, pues si $U, V \in \mathcal{V}(x)$ entonces $U \cap V \in \mathcal{V}(x)$ y $U \leq U \cap V$ y $V \leq U \cap V$.

Recordemos que todo conjunto preordenado $(I, \leq)$ puede considerarse como una categoría. Denotamos a esta categoría como I.

Definición 1.5. Sea $(I, \leq)$ un conjunto dirigido y $\mathcal{C}$ una categoría. Un *sistema directo* en $\mathcal{C}$ es un funtor $F : I \to \mathcal{C}$. Un *sistema inverso* en $\mathcal{C}$ es un funtor $F : I^{\text{op}} \to \mathcal{C}$.

Desencriptemos esta definición. Sea $F : I \to \mathcal{C}$ un sistema directo. Escribamos $F(i) = C_i$ y si $i \leq j$, sea $f_{ij} : C_i \to C_j$ el morfismo inducido por F. Entonces, si $i \leq j \leq k$, la funtorialidad de F implica que

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$$

y si $i \in I$, $f_{ii} = \text{id}_{C_i}$. En este caso escribimos (C_i, f_{ij}) en lugar de $F : I \to \mathcal{C}$ y decimos que (C_i, f_{ij}) es un sistema I-directo. En el caso de sistemas inversos, el lector podrá obtener una descripción similar.

Definición 1.6. Sea (C_i, f_{ij}) un sistema directo. Un *límite directo* de este sistema es un objeto C junto con morfismos $f_i : C_i \to C$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[dd, "f_{ij}"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ & C \\ C_j \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta y tal que que verifican la siguiente *propiedad universal:* Si A es otro objeto junto con morfismos $g_i : C_i \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[dd, "f_{ij}"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ & A \\ C_j \arrow[ur, "g_j"'] & \end{tikzcd}$$

entonces existe un único morfismo $g : C \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C_i \arrow[dr, "f_i"] \arrow[dd, "f_{ij}"'] \arrow[drr, bend left, "g_i"] & & \\
& C \arrow[r, dashed, "g"] & A \\
C_j \arrow[ur, "f_j"'] \arrow[urr, bend right, "g_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Escribimos

$$C = \varinjlim_{i \in I} C_i \quad \text{o} \quad (C, f_i) = \varinjlim_{I} (C_i, f_{ij}).$$

La definición de límite inverso de un sistema inverso es similar, con las flechas invertidas, y en este caso escribimos

$$C = \varprojlim_{i \in I} C_i \quad \text{o} \quad (C, f_i) = \varprojlim_{I} (C_i, f_{ij}).$$

Ejemplo 1.15. Sea R un anillo con unidad y sea I un conjunto dirigido. Sea (M_i, f_{ij}) un sistema directo de R-módulos. Escribimos

$$M' = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

y denotamos por M'' el R-submódulo de M' generado por todos los elementos de la forma $x_i - f_{ij}(x_i)$ donde $x_i \in M_i$ e $i \leq j$. Sea $M = M'/M''$ y sea $f_i : M_i \to M$ la composición

$$M_i \to M' \to M,$$

donde $M_i \to M$ es la inclusión canónica. Afirmamos que

$$(M, f_i) = \varinjlim_{I} (M_i, f_{ij}).$$

En efecto, es claro por construcción que si $i \leq j$ entonces $f_j \circ f_{ij} = f_i$. Sea N un R-módulo y $g_i : M_i \to M$ homomorfismos tales que $g_j \circ f_{ij} = g_i$ para todo $i \leq j$. Si existe una aplicación $g : M \to N$ tal que $g \circ f_i = g_i$ para todo i, entonces (denotando por x_i a la imagen de $x_i \in M_i$ en M) tenemos necesariamente que $g(x_i) = g_i(x_i)$, por lo que tal g es única. Para probar su existencia, consideremos la aplicación $g' : M' \to N$ dada por $M_i \ni x_i \mapsto g_i(x_i)$. Entonces

$$g'(x_i - f_{ij}(x_i)) = g_i(x_i) - g_j \circ f_{ij}(x_i) = g_i(x_i) - g_i(x_i) = 0,$$

de donde $M' \subseteq \ker(g')$ y por ende g' induce un homomorfismo $g : M \to N$. Es inmediato que $g \circ f_i = g_i$ para todo i, lo que completa la demostración.

Ejercicio 1.16. Demuestre que el límite directo (resp. límite inverso) de un sistema directo (resp. sistema inverso) es único salvo un único isomorfismo. Más precisamente: si (C_i, f_{ij}) es un sistema directo y (C, f_i) y (C', f_i') son dos límites directos de este, entonces existe un único isomorfismo $f : C \to C'$ tal que $f \circ f_i = f_i'$ para todo i.

Ejercicio 1.17. Sea M un R-módulo y $(M_i)_{i \in I}$ una familia de R-submódulos de M, y defina un orden parcial $\leq$ en I mediante $i \leq j$ si y sólo si $M_i \subseteq M_j$ y asuma que para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $M_i + M_j \subseteq M_k$. Demuestre que

$$\varinjlim_{i \in I} M_i = \sum_{i \in I} M_i.$$

Concluya que todo R-módulo es el límite directo de la colección de sus submódulos finitamente generados.

Si $(I, \leq)$ es un conjunto dirigido y $\mathcal{C}$ una categoría, obtenemos la categoría de sistemas dirigidos $[I, \mathcal{C}]$.

Ejercicio 1.18. Demuestre que si $F, G : I \to \mathcal{C}$ son dos sistemas dirigidos y $\eta : F \to G$ es una transformación natural, η induce un homomorfismo

$$\hat{\eta} : \varinjlim F \to \varinjlim G.$$

Más precisamente, si $F = (C_i, f_{ij})$ y $G = (D_i, g_{ij})$, y $\eta_i : C_i \to D_i$ son morfismos tales que para $i \leq j$ se tiene $\eta_j \circ f_{ij} = g_{ij} \circ \eta_i$, y si

$$(C, f_i) = \varinjlim_{i \in I} (C_i, f_{ij}) \quad \text{y} \quad (D, g_i) = \varinjlim_{i \in I} (D_i, g_{ij}),$$

demuestre que existe un único morfismo $\hat{\eta} : C \to D$ tal que para todo i se tiene $\hat{\eta} \circ f_i = g_i \circ \eta_i$.

Definición 1.7. Una sucesión de sistemas directos de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow F^{n-1} \xrightarrow{\varphi^{n-1}} F^n \xrightarrow{\varphi^n} F^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice *exacta en* F^n si para cada $i \in I$ la sucesión de R-módulos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow F_i^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i^{n-1}} F_i^n \xrightarrow{\varphi_i^n} F_i^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta en F_i^n (es decir, si $\ker(\varphi_i^n) = \operatorname{img}(\varphi_i^{n-1})$). Dicha sucesión de sistemas directos se dice *exacta* si es exacta en F^n para todo n.

Proposición 1.19. *Una sucesión exacta corta de sistemas directos de R-módulos,*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 0,$$

induce una sucesión exacta corta de límites directos

$$0 \longrightarrow \varinjlim F \xrightarrow{\hat{\varphi}} \varinjlim G \xrightarrow{\hat{\psi}} \varinjlim H \longrightarrow 0.$$

Demostración. Mantenemos la notación del Ejemplo 1.15.

Sea $x \in \varinjlim F$, entonces existen $i_1, \ldots, i_r \in I$ y $x_j \in F_{i_j}$ para $j = 1, \ldots, r$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{r} f_{i_j}(x_j).$$

Como I es dirigido, existe $i \in I$ tal que $i_j \leq i$ para todo $j = 1, \ldots, r$ y por ende

$$f_{i_j}(x_j) = (f_i \circ f_{i_j i})(x_j) = f_i(f_{i_j i}(x_j)),$$

de donde

$$x = f_i\left(\sum_{j=1}^{r} f_{i_j i}(x_j)\right) = f_i(x_i),$$

donde $x_i = \sum_{j=1}^{r} f_{i_j i}(x_j) \in F_i$. Esto prueba que todo elemento $x \in \varinjlim F$ puede escribirse en la forma $x = f_i(x_i)$ para ciertos $i \in I$ y $x_i \in F_i$.

Ahora, si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de sistemas directos, sea $x_i \in F_i$, entonces $\varphi_i(x_i) \in G_i$ y por ende $g_i(\varphi_i(x_i)) \in \varinjlim G$. Notemos que si $i \leq j$, en la composición $F' \to G' \to \varinjlim G$ tenemos

$$x_i - f_{ij}(x_i) \mapsto \varphi_i(x_i) - \varphi_j(f_{ij}(x_i)) \mapsto g_i\varphi_i(x_i) - g_j\varphi_j f_{ij}(x_i) = 0,$$

donde hemos usado que $\varphi_j \circ f_{ij} = g_{ij}\varphi_i$. Así F'' está contenido en el núcleo de la composición $F' \to G' \to \varinjlim G$ y por ende obtenemos un homomorfismo

$$\hat{\varphi} : \varinjlim F \to \varinjlim G.$$

Es claro que $\hat{\varphi} \circ f_i = g_i \circ \varphi_i$ para todo i (esto también podía verse como consecuencia del Ejercicio 1.18, hicimos esto para visualizar una construcción más explícita de este morfismo inducido).

Supongamos que tenemos una sucesión de sistemas directos de módulos

$$F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H$$

que es exacta en G. Probaremos que la sucesión

$$\varinjlim F \xrightarrow{\hat{\varphi}} \varinjlim G \xrightarrow{\hat{\psi}} H$$

es exacta en $\varinjlim G$. Sea $x \in \varinjlim F$, entonces $x = f_i(x_i)$ para algún $i \in I$ y algún $x_i \in F_i$, entonces

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}(x) = \hat{\psi}(\hat{\varphi} \circ f_i(x_i)) = \hat{\psi}(g_i(\varphi_i(x_i))) = h_i(\psi_i \circ \varphi_i(x_i)) = 0,$$

de modo que $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi} = 0$ y por ende $\mathrm{im}(\hat{\varphi}) \subseteq \ker(\hat{\psi})$. Sea ahora $y \in \ker(\hat{\psi})$, y escribamos $y = g_i(y_i)$ para cierto $i \in I$ y $y_i \in G_i$. Entonces

$$\psi_i(y_i) = \hat{\psi} \circ g_i(y_i) = 0$$

Como la sucesión

$$F_i \xrightarrow{\varphi_i} G_i \xrightarrow{\psi_i} H_i$$

es exacta en G_i, existe $x_i \in F_i$ tal que $\varphi_i(x_i) = y_i$. Y esto implica $y = g_i \circ \varphi_i(x_i) = \hat{\varphi}(x)$ donde $x = f_i(x_i) \in G$.

□

Espacios localmente anillados

Lección 2

1.2. Anillos locales

En esta sección, si k es un cuerpo, denotamos por $\mathbf{Alg}_k$ a la categoría cuyos objetos son k-álgebras y cuyos morfismos son los homomorfismos de k-álgebras.

1.2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.8. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Decimos que A es un *anillo local* si A posee un único ideal maximal $\mathfrak{m}$. En este caso al cuerpo $k = A/\mathfrak{m}$ lo llamamos el *cuerpo residual* de A.

A veces abusaremos de lenguaje y diremos que $(A, \mathfrak{m})$ o que $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local.

Proposición 1.20. *Sea A un anillo conmutativo con unidad. Son equivalentes:*

(i) *A es un anillo local.*

(ii) *Para cierto ideal propio $\mathfrak{m}$ de A, el conjunto $A \setminus \mathfrak{m}$ consta únicamente de unidades (es decir, elementos que admiten inverso multiplicativo). En este caso, $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A.*

(iii) *Para todo $x \in A$ se tiene que x o $1 - x$ (posiblemente ambos) son unidades.*

Demostración. Supongamos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Si $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ no es una unidad, el ideal principal (x) es propio y por ende está contenido en un ideal maximal $\mathfrak{n}$. Como $x \notin \mathfrak{m}$, tenemos que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, lo que contradice que $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de A. Esto prueba (i)$\Rightarrow$(ii).

Supongamos (ii) y sea $x \in A$ tal que ni x ni $1 - x$ son unidades, entonces $x, 1 - x \in \mathfrak{m}$ y por ende $1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{m}$, lo que es absurdo. Así tenemos (iii).

Supongamos (iii) y sean $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{n}$ dos ideales maximales distintos. Entonces $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=A$ y por el teorema Chino del resto existe $x \in A$ tal que $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$ y $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}$, de modo que $x \in \mathfrak{m}$ y $1-x \in \mathfrak{n}$ no son unidades. Esto prueba (i).

□

Definición 1.9. Sean $(A, \mathfrak{m})$ y $(B, \mathfrak{n})$ dos anillos locales. Un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ se dicen un *homomorfismo local* si $f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

Proposición 1.21. *Sean $(A, \mathfrak{m})$ y $(B, \mathfrak{n})$ dos anillos locales, y sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Son equivalentes:*

(i) *f es un homomorfismo local.*

(ii) $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

(iii) *Para todo $x \in A$, si $f(x)$ es una unidad en B, entonces x es una unidad en A.*

Demostración. Supongamos que f es un homomorfismo local, es decir

$$f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m},$$

entonces

$$f(\mathfrak{m}) = f(f^{-1}(\mathfrak{n})) \subseteq \mathfrak{n},$$

y tenemos que (i)⇒(ii).

Supongamos (ii) y sea $x \in A$ tal que $f(x)$ es una unidad en B. Entonces $f(x) \notin \mathfrak{n}$, de donde $f(x) \notin f(\mathfrak{m})$, lo que significa que $x \notin \mathfrak{m}$ y por ende x es una unidad en A, lo que prueba (iii).

Supongamos (iii). Como f es un homomorfismo de anillos, $f^{-1}(\mathfrak{n})$ es un ideal propio de A y por ende $f^{-1}(\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{m}$. Si la inclusión es estricta, existe $x \in \mathfrak{m}$ tal que $f(x) \notin \mathfrak{n}$. Pero entonces $f(x)$ es una unidad en B y x no es una unidad en A, lo que contradice (iii). Esto prueba (i).

□

Proposición 1.22. *Sea $f : (A, \mathfrak{m}_A, k_A) \to (B, \mathfrak{m}_B, k_B)$ un homomorfismo local de anillos locales. Entonces f induce un homomorfismo de cuerpos $\overline{f} : k_A \to k_B$. En particular k_B/k_A es una extensión de cuerpos.*

Demostración. Esta es una aplicación trivial del primer teorema de isomorfía.

□

Corolario 1.23. *Sea K un cuerpo y $(A, \mathfrak{m}, k)$ una K-álgebra local (es decir A es una K-álgebra, $\mathfrak{m}$ es un ideal de A como K-álgebra y $(A, \mathfrak{m}, k)$ es un anillo local). Entonces k/K es una extensión de cuerpos.*

Demostración. Como A es una K-álgebra, existe un único homomorfismo de K-álgebras $f : K \to A$. Claramente K es un anillo local cuyo único ideal maximal es 0 y cuyo cuerpo residual es K.

Claramente $f(0) = 0 \subseteq \mathfrak{m}$, por lo que f es un homomorfismo local de anillos locales que induce un homomorfismo de cuerpos $\overline{f} : K \to k$, lo que significa que k/K es una extensión de cuerpos. $\square$

Ejercicio 1.24. Pruebe que la composición de homomorfismos locales de anillos locales es nuevamente un homomorfismo local. Deduzca que existe una subcategoría plena de la categoría **CRing** de anillos conmutativos con unidad, denotada **LRing** cuyos objetos son anillos locales. Pruebe que la asignación $A \mapsto k$, donde k es el cuerpo residual del anillo local A describe un funtor **LRing** $\to$ **Field**, donde **Field** es la subcategoría plena de **CRing** cuyos objetos son cuerpos.

Ejemplo 1.25. Todo cuerpo k es un anillo local, siendo 0 su único ideal maximal. El cuerpo residual de k es k.

Ejemplo 1.26. Sea

$$A = \left\{ \frac{a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A es un subanillo de $\mathbb{Q}$, que consta de aquellos números racionales que al ser expresados como el cociente de dos números enteros relativamente primos, tienen denominador impar. Sea

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{2a}{2b+1} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} = 2A.$$

Es fácil ver que $\mathfrak{m}$ es un ideal de A (es el ideal generado por $2 = 2/1 \in A$). Si $x \in A \setminus \mathfrak{m}$, tenemos que $x = \frac{2a+1}{2b+1}$ y por ende $x^{-1} = \frac{2b+1}{2a+1} \in A$. Así, todo elemento de $A \setminus \mathfrak{m}$ es una unidad. Esto significa que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local.

La aplicación $A \to \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dada por

$$\frac{a}{2b+1} \mapsto \overline{a},$$

donde $\overline{a}$ es la clase de $a \in \mathbb{Z}$ módulo $2\mathbb{Z}$, es un homomorfismo sobreyectivo de anillos cuyo núcleo es $\mathfrak{m}$, de modo que el cuerpo residual de A es $\mathbb{F}_2$.

Ejemplo 1.27. Sea k un cuerpo y sea $k[x]$ el anillo de polinomios en la variable x con coeficientes en k. Para cada entero positivo n, el anillo $A = k[x]/(x^n)$ es un anillo local. En efecto, sea γ la imagen de x en A, de modo que $A = k[\gamma]$ y $\gamma^n = 0$. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal de A generado por γ, de modo que

$$\mathfrak{m} = \{\gamma f(\gamma) \mid f(x) \in k[x]\}.$$

Tenemos que $\mathfrak{m}$ es un ideal propio de A. Un elemento arbitrario $u \in A$ tiene la forma

$$u = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \cdots + a_{n-1}\gamma^{n-1}$$

para ciertos $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in k$. Si este elemento fuese invertible, entonces existiría otro elemento

$$v = b_0 + b_1\gamma + \cdots + b_{n-1}\gamma^{n-1}$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in k$ tal que $uv = 1$. Como tenemos que

$$uv = a_0b_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} \right) \gamma^j,$$

necesariamente $a_0b_0 = 1$, lo que significa que $a_0 \neq 0$. Recíprocamente, si $a_0 \neq 0$, tomando $b_0 = a_0^{-1}$, podemos resolver recursivamente las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i} = 0$$

para $j = 1, \ldots, n-1$ para obtener elementos $b_1, \ldots, b_{n-1} \in k$ de modo que podemos construir el elemento v anterior tal que $uv = 1$ y por ende u es invertible. Esto prueba que un elemento en A es invertible si y sólo si no pertenece al ideal $\mathfrak{m}$. Así $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo local. Más aún, tenemos que

$$A/\mathfrak{m} = \frac{k[x]/(x^n)}{(x)/(x^n)} \cong k[x]/(x) \cong k.$$

En el caso particular cuando $n = 2$, escribimos $A = k[\epsilon]$ con ϵ la imagen de x en A, de modo que $\epsilon^2 = 0$. En este caso el anillo $k[\epsilon]$ se llama el *anillo de números duales.*

Ejemplo 1.28. En el ejemplo anterior, si $n = 0$, es decir, si $A = k[x]$, no es cierto que A es un anillo local. Esto pues x y $1 - x$ no son unidades de A.

Ejemplo 1.29. $\mathbb{Z}$ no es un anillo local, pues todo ideal de la forma $p\mathbb{Z}$ con p un número primo, es un ideal maximal.

Ejercicio 1.30. En cada uno de los siguientes casos, verifique que A es un anillo local y determine su único ideal maximal y su cuerpo residual.

1. A es un anillo en el que todo elemento es una unidad o es nilpotente, es decir, para todo $a \in A$, o bien a es una unidad o bien $a^n = 0$ para cierto $n > 0$.
2. $A = k[[x]]$ es el anillo de series de potencias formales en la variable x con coeficientes en k.
3. $A = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ donde n es un entero positivo.
4. Sea D un dominio de integridad (es decir, F su cuerpo de fracciones, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de D y definamos

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \in F \mid a \in A, b \in A \setminus \mathfrak{p} \right\},$$

considerado como subanillo de F. Este anillo A se llama la *localización* de D en el primo $\mathfrak{p}$.

1.2.2. El espacio tangente de un anillo local

Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local. El grupo abeliano $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tiene estructura de k-espacio vectorial: Si $a + \mathfrak{m} \in k = A/\mathfrak{m}$ y $x + \mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, de modo que $a \in A$ y $x \in \mathfrak{m}$, entonces definimos

$$(a + \mathfrak{m})(x + \mathfrak{m}^2) = ax + \mathfrak{m}^2.$$

Esta es una buena definición (es decir, no depende de la elección de representantes) pues si $a \equiv a'$ (mód $\mathfrak{m}$) y $x \equiv x'$ (mód $\mathfrak{m}^2$), podemos escribir $a = a' + b$ y $x = x' + u$, con $b \in \mathfrak{m}$ y $u \in \mathfrak{m}^2$, con lo cual

$$ax = (a' + b)(x' + u) = a'x' + a'u + bx' + bu$$

y tenemos que $a'u, bx' \in \mathfrak{m}^2$ y $bu \in \mathfrak{m}^3 \subseteq \mathfrak{m}^2$, por lo cual $ax \equiv a'x'$ (mód $\mathfrak{m}^2$).

Definición 1.10. Sea $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anillo local. El k-espacio vectorial $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ se llama el *espacio cotangente* de A y se denota por T^*A. El *espacio tangente de* A es el dual $TA := (T^*A)^* = \mathrm{Hom}_k(T^*A, k)$ del espacio tangente T^*A.

Los elementos del espacio cotangente T^*A se llaman *vectores cotangentes* y los elementos del espacio tangente TA se llaman *vectores tangentes*.

Vamos a dar una interpretación geométrica de los vectores tangentes. En lo que sigue, si K es un cuerpo escribimos $K[\epsilon] = K[x]/(x^2)$ para el anillo de números duales, donde ϵ es la imagen de x en $K[x]/(x^2)$. Es claro que $K[\epsilon]$ es una K-álgebra cuya dimensión como K-espacio vectorial es 2 y más aún, como K-espacio vectorial

$$K[\epsilon] = K \oplus K\epsilon.$$

Sabemos también, de los ejemplos en la sección anterior, que $K[\epsilon]$ es una K-álgebra local cuyo único ideal maximal es $\epsilon K[\epsilon] = K\epsilon$ y cuyo cuerpo residual es K. Denotamos por $p : K[\epsilon] \to K$ la proyección $a + b\epsilon \mapsto b$.

Dada una K-álgebra local $(A, \mathfrak{m}, k)$, el único homomorfismo de K-álgebras $K \to A$ induce un homomorfismo de cuerpos residuales $\eta : K \to k$. En lo que sigue, asumimos que η es un isomorfismo de cuerpos (es decir, que es sobreyectivo, ya que siempre es inyectivo). Via este isomorfismo identificamos k y K, por lo que $(A, \mathfrak{m}, k)$ es una k-álgebra local.

Consideramos un homomorfismo local de k-álgebras locales $f : A \to k[\epsilon]$. Al restringir este homomorfismo a $\mathfrak{m}$ obtenemos una aplicación k-lineal

$$f|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to k\epsilon.$$

Si $a, b \in \mathfrak{m}$, entonces $f(a) = u\epsilon$ y $f(b) = v\epsilon$ para ciertos $u, v \in k$, de modo que

$$f(ab) = uv\epsilon^2 = 0,$$

lo que implica que $\mathfrak{m}^2 \subseteq \ker(f|_{\mathfrak{m}})$, y por ende f induce una aplicación k-lineal

$$\overline{f} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k[\epsilon].$$

De este modo obtenemos una aplicación

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_k}(A, k[\epsilon]) \to TA, \quad f \mapsto p \circ \overline{f}.$$

Proposición 1.31. *Sea $(A, \mathfrak{m})$ una k-álgebra local tal que el homomorfismo natural $k \to A/\mathfrak{m}$ es un isomorfismo. Entonces la aplicación θ construida arriba es una biyección.*

Demostración. Identificamos a k con el subanillo $k1$ de A, de modo que obtenemos una sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow A \xrightarrow{q} k \longrightarrow 0,$$

donde $q : A \to k$ es la composición

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\eta^{-1}} k,$$

es decir, $q(x) = \eta^{-1}(x + \mathfrak{m})$. De aquí, observamos que $A = \mathfrak{m} \oplus k$ como k-espacios vectoriales. En efecto, sabemos que todo elemento de k es una unidad en A, de modo que $k \cap \mathfrak{m} = 0$. Si $x \in A$, entonces $q(x) \in k$, y tenemos que $q(x - q(x)) = 0$, por lo que $x - q(x) \in \mathfrak{m}$ y así

$$x = (x - q(x)) + q(x) \in \mathfrak{m} + k.$$

Si $\theta(f) = \theta(g)$, entonces como $p|_{k[\varepsilon]} : k[\varepsilon] \to k$ is un isomorfismo de k-espacios vectoriales y las imágenes de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ yacen en $k[\varepsilon]$, se sigue que $\overline{f} = \overline{g}$, y por ende que $f|_{\mathfrak{m}} = g|_{\mathfrak{m}}$. Como f y g son homomorfismos de k-álgebras, ambos necesariamente coinciden sobre k y por ende coinciden sobre A, es decir, $f = g$, lo que prueba que θ es inyectiva.

Sea $v \in TA$, entonces $v : T^*A = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ es una forma k-lineal. Definimos $f : A = \mathfrak{m} \oplus k \to k[\epsilon]$ como

$$f(x + a) = v(x + \mathfrak{m}^2)\epsilon + a, \quad x \in \mathfrak{m}, a \in k.$$

Veamos que f es un homomorfismo de k-álgebras. Es claro que f es un homomorfismo de k-espacios vectoriales. Si $x, x' \in \mathfrak{m}$ y $a, a' \in k$, tenemos que

$$(x + a)(x' + a') = xx' + ax' + a'x + aa'$$

con $xx' \in \mathfrak{m}^2$, $ax', a'x \in \mathfrak{m}$ y $aa' \in k$, por lo cual

$$\begin{aligned} f((x + a)(x' + a')) &= v(xx' + ax' + a'x + \mathfrak{m}^2)\epsilon + aa' \\ &= (av(x' + \mathfrak{m}^2) + a'v(x + \mathfrak{m}^2))\epsilon + aa'. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(x + a)f(x' + a') &= (v(x + \mathfrak{m}^2)\epsilon + a)(v(x' + \mathfrak{m}^2)\epsilon + a') \\ &= v(x + \mathfrak{m}^2)v(x' + \mathfrak{m}^2)\epsilon^2 + (av(x' + \mathfrak{m}^2) + a'v(x + \mathfrak{m}^2))\epsilon + aa' \\ &= f((x + a)(x' + a')), \end{aligned}$$

lo que prueba que f es un homomorfismo de k-álgebras. Ahora, notemos que

$$\theta(f) = p \circ \overline{f} = v,$$

por lo que θ es sobreyectiva. □

Esta proposición nos permite tener una idea geométrica de los vectores tangentes. Conservamos la notación de la demostración. Si $v \in TA$, sea $f = \theta^{-1}(v)$, de modo que tenemos, para $a \in k$ y $x \in \mathfrak{m}$,

$$f(a + x) = a + v(x + \mathfrak{m}^2)\epsilon.$$

Intuitivamente, podemos pensar en esto como una expansión de Taylor hasta el primer orden alrededor de un punto $a \in k$ en la dirección $x \in \mathfrak{m}$, de este modo, el valor $v(x + \mathfrak{m}^2)$ se interpreta como la aproximación lineal de f alrededor de a, o dicho de otro modo, como la derivada de f en a en la dirección x, lo que en cursos de Cálculo pensamos justamente como la "pendiente de la recta tangente". De aquí que definamos el espacio tangente de esta manera.

Mantenemos las hipótesis de la proposición, así como la notación. En particular, sea $q : A \to k$ el homomorfismo k-lineal introducido en la demostración de dicha proposición. Notemos que si escribimos $x = y + q(x)$, con $y = x - q(x)$, y similarmente $x' = y' + q(x')$, entonces $y, y' \in \mathfrak{m}$ y

$$xx' = (y + q(x))(y' + q(x')) = xy + q(x')y + q(x)y' + q(x)q(x'),$$

y $xy + q(x')y + q(x)y' \in \mathfrak{m}$, de modo que $q(xx') = q(x)q(x')$ es un homomorfismo de k-álgebras (por supuesto, esto es inmediato de la definición, pero es un bonito cálculo a ser realizado).

Definición 1.11. Una k-derivación de A es una aplicación k-lineal $d : A \to k$ que verifica la *regla de Leibniz*

$$d(xy) = q(x)d(y) + q(y)d(x), \quad x, y \in A.$$

Denotamos por $\mathrm{Der}(A)$ al k-espacio vectorial de derivaciones de A.

Si $v : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^* \to k$ es un vector tangente, definimos $d_v : A \to k$ como

$$d_v(x) = v(x - q(x) + \mathfrak{m}^2),$$

entonces observamos que

$$\begin{aligned} d_v(xy) &= v(xy - q(xy) + \mathfrak{m}^2) \\ &= v((x - q(x))(y - q(y)) + q(x)y + q(y)x - 2q(x)q(y) + \mathfrak{m}^2) \\ &= q(x)v(y - q(y) + \mathfrak{m}^2) + q(y)v(x - q(x) + \mathfrak{m}^2) \\ &= q(x)d_v(y) + q(y)d_v(x). \end{aligned}$$

De este modo, d_v es una derivación de A. Recíprocamente, dada una derivación $d : A \to k$ de A, tenemos que si $x, y \in \mathfrak{m}$, entonces $q(x) = q(y) = 0$ y por ende

$$d(xy) = q(x)d(y) + q(y)d(x) = 0.$$

Esto significa que la restricción de d a $\mathfrak{m}$ induce una aplicación k-lineal

$$v_d : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k,$$

de modo que v_d es un vector tangente de A.

Ejercicio 1.32. Verifique que las aplicaciones

$$\mathrm{Der}(A) \to TA, \quad d \mapsto v_d$$

y

$$TA \to \mathrm{Der}(A), \quad d \mapsto v_d$$

son k-lineales y mutuamente inversas.

Con esto, tenemos una tercera descripción del espacio tangente, como el espacio de derivaciones de A. Esta equivalencia entre vectores tagentes y derivaciones será clave en nuestro estudio de variedades diferenciales.

Ejercicio 1.33. Pruebe que si d es una derivación de A, entonces $d(a) = 0$ para todo $a \in k$.

Espacios localmente anillados

Lección 3

1.3. Haces

1.3.1. Prehaces

Definición 1.12. Dado un espacio topológico X definimos la *categoría de abiertos de* X $\mathrm{Op}(X)$ como la categoría cuyos objetos son los subconjuntos abiertos de X y donde si U, V son abiertos de X, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Op}(X)}(U,V) = \begin{cases} \{U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V \\ \varnothing & \text{si } U \nsubseteq V, \end{cases}$$

donde $U \hookrightarrow V$ es la inclusión.

Equivalentemente, notemos que la topología τ de X es un conjunto parcialmente ordenado por el orden de la inclusión, de modo que $\mathrm{Op}(X)$ podría definirse como la categoría asociada al preorden τ.

Definición 1.13. Sea X un espacio topológico. Un *prehaz* de conjuntos $\mathcal{F}$ sobre X está dado por la siguiente información:

- Para cada abierto $U \subseteq X$ un conjunto $\mathcal{F}(U)$.
- Para cada inclusión de abiertos $U \subseteq V$ una aplicación $\mathrm{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$.

Esta información está sujeta a los siguientes axiomas:

(PH1) $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ para todo abierto $U \subseteq X$.

(PH2) Si $U \subseteq V \subseteq W$ es una cadena de abiertos de X, entonces

$$\mathrm{res}_{W,V} \circ \mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{res}_{W,U}.$$

Ejemplo 1.34 (El prehaz vacío). Si X es un espacio topológico, definimos $\mathcal{F}(U) = \varnothing$ para cada $U \subseteq X$ abierto, y para cada inclusión de abiertos $U \subseteq V$, $\mathrm{res}_{V,U} : \varnothing \to \varnothing$ debe ser la función vacía. Esto es trivialmente un prehaz.

Ejemplo 1.35 (El prehaz constante). Sea A un conjunto y X un espacio topológico. Si para cada abierto $U \subseteq X$ definimos $\underline{A}_{\mathrm{pre}}(U) = A$ y para cada inclusión de abiertos $U \subseteq V$, $\mathrm{res}_{V,U} = \mathrm{id}_A$, obtenemos un prehaz, llamado el *prehaz constante* a valores en A. El prehaz vacío es el caso particular cuando $A = \varnothing$.

Ejemplo 1.36 (Prehaz rascacielos). Sea A un conjunto, X un espacio topológico y $x \in X$ un punto. Para cada abierto $U \subseteq X$, definimos

$$i_{x,A}(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U, \\ \{*\} & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

donde $\{*\}$ es cualquier conjunto de un solo elemento.

Notemos que, equivalentemente, un prehaz $\mathcal{F}$ es un funtor (contravariante) $\mathcal{F} : \mathrm{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$. De hecho, esta observación permite una notable generalización:

Definición 1.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y X un espacio topológico. Un *$\mathcal{C}$-prehaz* o un *prehaz con valores en $\mathcal{C}$* es un funtor (contravariante)

$$\mathcal{F} : \mathrm{Op}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}.$$

Si $U \subseteq V$ es una inclusión de abiertos, denotamos

$$\mathcal{F}(U \hookrightarrow V) = \mathrm{res}_{V,U}.$$

Si la categoría $\mathcal{C}$ es concreta, en el sentido de que sus objetos son conjuntos con alguna estructura, entonces a los elementos de $\mathcal{F}(U)$ se los llama las *secciones* de $\mathcal{F}$ sobre $U \subseteq X$.

Si $U \subseteq V$ es una inclusión de abiertos y $s \in \mathcal{F}(V)$, denotaremos

$$s|_U = \mathrm{res}_{V,U}(s).$$

Ejemplo 1.37. Existe una generalización obvia del prehaz constante a un categoría arbitraria.

Sea t un objeto terminal en la categoría $\mathcal{C}$ (esto significa que para todo objeto C en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $C \to t$ en $\mathcal{C}$). Entonces podemos definir el prehaz rascacielos a valores en un objeto A de $\mathcal{C}$ como

$$i_{x,A}(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U, \\ t & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Dado un $\mathcal{C}$-prehaz $\mathcal{F}$, si $\mathcal{C} = \mathbf{Grp}$ (resp. $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Ring}$, $\mathbf{Alg}_k$, etc) diremos que $\mathcal{F}$ es un prehaz de grupos (resp. grupos abelianos, anillos, k-álgebras, etc.). En este trabajo, estaremos enfocados principalmente en el caso de haces de $\mathbb{R}$-álgebras.

Definición 1.15. Un *morfismo de prehaces* es simplemente una transformación natural.

Es decir, si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son dos $\mathcal{C}$-prehaces sobre un espacio topológico X, un morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste de un morfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{C}$ para cada abierto $U \subseteq X$ tal que para cada inclusión de abiertos $U \subseteq V$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{V,U}"'] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\mathrm{res}_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

conmuta. La categoría de $\mathcal{C}$-prehaces sobre un espacio topológico X se denota por $\mathbf{PreSh}_{\mathcal{C}}(X)$ y es precisamente $[\mathrm{Op}(X)^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}]$.

1.3.2. Tallos

Si x es un punto en un espacio topológico X y $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{C}$-prehaz sobre X, la restricción del funtor $\mathcal{F}$ a la subcategoría $\mathcal{V}(x)$ de vecindades abiertas de x es un sistema directo. El límite directo de este sistema es de particular interés.

Definición 1.16. Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{C}$-prehaz sobre un espacio topológico X y sea $x \in X$ un punto. El *tallo* $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ en x es, cuando existe, el límite directo

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

De la definición de límite directo, para cada abierto $U \subseteq X$ vecindad de x, tenemos un morfismo $r_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$. Cuando $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, si $s \in \mathcal{F}(U)$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre U, a la imagen de s bajo r_U la llamamos el *germen* de s en x, y lo denotamos como s_x.

Observación. El tallo $\mathcal{F}_x$ admite una descripción muy concisa en el caso de haces valuados en categorías concretas: Consideremos el conjunto formado por los pares (U, s) tales que U es una vecindad abierta de x y $s \in \mathcal{F}(U)$ es una sección de $\mathcal{F}$ sobre U. Definimos una relación de equivalencia:

$$(U, s) \sim (V, t)$$

si y sólo si existe una vecindad abierta W de x contenida en $U \cap V$ tal que $\mathrm{res}_{U,W}(s) = \mathrm{res}_{V,W}(t)$.

Ejercicio 1.38. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

A la clase de equivalencia del par (U, s) la denotamos por $[U, s]$. Entonces

$$\mathcal{F}_x = \{[U, s] \mid x \in U,\ s \in \mathcal{F}(U)\},$$

y donde $r_U(s) = [U, s]$.

Ejercicio 1.39. Demostrar la afirmación precedente, es decir, que esta descripción de $\mathcal{F}_x$ verifica la propiedad universal que define al límite directo. Además, verificar que si $\mathcal{C}$ es la categoría de grupos abelianos (resp. anillos conmutativos, k-álgebras, etc.), entonces $\mathcal{F}_x$ es un grupo abeliano (resp. anillo conmutativo, k-álgebra, etc.) con la estructura obvia. Por ejemplo:

$$[U, s] + [V, t] = [U \cap V, \mathrm{res}_{U,U\cap V}(s) + \mathrm{res}_{V,U\cap V}(t)].$$

De ahora en adelante, asumiremos que $\mathcal{C}$ es una categoría concreta. Específicamente, el lector puede asumir que $\mathcal{C}$ es una de las categorías **Ab**, **Ring**, **CRings**, $\mathbf{Mod}_R$, $\mathbf{Alg}_k$, etc.

Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de prehaces, entonces φ induce un morfismo a nivel de tallos

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x.$$

En este caso, este morfismo está dado explícitamente por

$$\varphi_x([U, s]) = [U, \varphi_U(s)]$$

para cada $[U, s] \in \mathcal{F}_x$.

Proposición 1.40. *Sea X un espacio topológico. Para cada punto $x \in X$ obtenemos un funtor llamado funtor fibra*

$$(\cdot)_x : \mathbf{PreSh}(X) \to \mathcal{C}$$

definido sobre objetos por $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ y sobre morfismos por $\varphi :\mapsto \varphi_x$.

Ejercicio 1.41. Demuestre la proposición precedente.

Ejemplo 1.42. Sea A un conjunto y $x \in X$ un punto en un espacio topológico X. Entonces el tallo $\underline{A}_{\text{pre},x}$ del prehaz constante $\underline{A}$ en x es A. En efecto, $\underline{A}_{\text{pre}}(U) = A$ para toda vecindad abierta U de A, y la aplicación identidad $\underline{U}_{\text{pre}}(A) \to A$ realiza a A como el límite del sistema directo $(\underline{A}_{\text{pre}}(U))_{x \in U}$.

Ejercicio 1.43. Sea A un conjunto, X un espacio topológico y $x \in X$. Demuestre que si $y \in X$, el tallo en y del prehaz rascacielos $(i_{x,A})_y$ es

$$(i_{x,A})_y = \begin{cases} A & \text{si } y \in \overline{\{x\}}, \\ \varnothing & \text{si } y \notin \overline{\{x\}}. \end{cases}$$

1.3.3. Haces

Definición 1.17. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un prehaz (de grupos abelianos, anillos, k-álgebras, etc.) sobre X. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *haz* si cumple las dos condiciones siguientes:

(1) **Pegado:** Para todo abierto $U \subseteq X$ y todo cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U, si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ son secciones tales que

$$\text{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \text{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$$

para todo $i, j \in I$, entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que

$$\text{res}_{U, U_i}(s) = s_i \quad \text{para todo } i \in I.$$

Dicho de otra forma, secciones sobre abiertos de un cubrimiento de U que coinciden sobre las intersecciones pueden pegarse a una sección sobre U.

(2) **Unicidad:** Para todo abierto $U \subseteq X$ y todo cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U, si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ son secciones sobre U tales que

$$\text{res}_{U, U_i}(s) = \text{res}_{U, U_i}(t) \quad \text{para todo } i \in I,$$

entonces $s = t$. Es decir, si dos secciones coinciden sobre los abiertos de un recubrimiento de U, entonces coinciden sobre U.

Un morfismo de haces es lo mismo que un morfismo de prehaces. Denotamos por $\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$ a la subcategoría plena de $\mathbf{PreSh}_{\mathcal{C}}(X)$ cuyos objetos son haces.

Ejercicio 1.44. Pruebe que si $\mathcal{F}$ es un haz sobre un espacio topológico X, entonces la sección s de (1) en la definición anterior es única. Más aún, demuestre que si $\mathcal{F}$ es un prehaz, entonces este es un haz si y sólo si verifica (1) y el s en este axioma es único (es decir, (1) junto con la unicidad de s implican (2)).

Ejemplo 1.45 (Haz constante)**.** El prehaz constante no es un haz. En efecto, si A es un grupo abeliano no trivial y $X = \{x, y\}$ es un espacio topológico discreto con exactamente dos puntos. Sean $a \neq b$ dos elementos distintos en A. Notemos que

$$\varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} U_i$$

y por ende la condición $a|_{U_i \cap U_j} = b|_{U_i \cap U_j}$ se verifica para todo $i, j \in \varnothing$, ya que es una condición vacía. Sin embargo $a \neq b$, por lo que el axioma de unicidad no se verifica.

Para obtener un haz procedemos como sigue: Si A es un grupo (anillo, k-álgebra, etc.), lo equipamos con la topología discreta, entonces para cada abierto $U \subseteq X$ definimos

$$\underline{A}(U) = \{f : U \to A \mid f \text{ es una aplicación continua}\},$$

donde si $U \subseteq V$ es una inclusión de abiertos, $\mathrm{res}_{V,U}(f) = f|_U$ es precisamente la restricción de aplicaciones. Entonces las condiciones de pegado y unicidad se verifican por el lema del pegado para aplicaciones continuas, con lo que $\underline{A}$ es un haz sobre X.

Ejercicio 1.46. Pruebe que el prehaz rascacielos es un haz.

Ejemplo 1.47 (El haz de funciones continuas)**.** Si X es un espacio topológico, para cada abierto $U \subseteq X$ definimos

$$\mathcal{C}(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

donde $\mathbb{R}$ se equipa con la topología usual. Es fácil verificar que $\mathcal{C}(-, \mathbb{R})$ es un prehaz y el lema del pegado para aplicaciones continuas muestra que este es un haz, al que llamamos el *haz de funciones continuas* sobre X.

A continuación, presentamos el ejemplo más importante de este capítulo.

Ejemplo 1.48 (El haz de funciones suaves)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto. Consideramos, para cada abierto $U \subseteq X$ la $\mathbb{R}$-álgebra

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty\}.$$

Con la restricción usual de funciones, este es un prehaz, y el lema del pegado implica que $\mathcal{O}_X$ es un haz, al que llamamos el *haz de funciones suaves* sobre X.

Para finalizar esta subsección, presentamos una definición que será importante en adelante.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{F}$ un haz sobre un espacio topológico X y sea $U \subseteq X$ un abierto de X. Definimos la *restricción* de $\mathcal{F}$ a U, denotada $\mathcal{F}|_U$ mediante

$$\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$$

para cada abierto $V \subseteq U$, con los morfismos de restricción heredados de $\mathcal{F}$.

Si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, definimos *el haz imagen directa* de $\mathcal{F}$, denotado $f_*\mathcal{F}$, sobre un abierto $U \subseteq Y$ mediante

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(Y)),$$

con las restricciones heredadas de $\mathcal{F}$.

Ejercicio 1.49. Pruebe que si $f : X \to Y$ es una aplicación continua, la asignación $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ define un funtor $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$.

1.3.4. Hacificación

En lo que sigue, omitiremos $\mathcal{C}$ de la notación, así $\mathbf{PreSh}(X)$ y $\mathbf{Sh}(X)$ denotan a $\mathbf{PreSh}_{\mathcal{C}}(X)$ y $\mathbf{Sh}_{\mathcal{C}}(X)$, respectivamente. En todo lo que sigue los haces y prehaces tomarán valores en las categorías de grupos abelianos, anillos conmutativos con unidad, k-álgebras o R-módulos.

Existe un funtor obvio $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PreSh}(X)$ que a cada haz lo envía a sí mismo pero visto como un prehaz (dicho de otro modo, el funtor inclusión), que es un "funtor de olvido" pues "olvida" la estructura de haz en un prehaz. Es natural preguntarse si existe un funtor en la otra dirección, y la respuesta es que sí. Más específicamente:

Teorema 1.50. *Sea $\mathcal{F}$ un prehaz sobre un espacio topológico X. Existe un par $(\mathcal{F}^+, \iota)$ donde $\mathcal{F}^+$ es un haz sobre X e $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es un morfismo de prehaces y que santisfacen la siguiente* propiedad universal*: Para todo haz $\mathcal{G}$ y todo morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ existe un único morfismo de haces $\Phi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}^+ \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, el par $(\mathcal{F}^+, \iota)$ es único salvo un único isomorfismo, en el sentido de que si existe otro tal par $(\mathcal{F}', \iota')$, entonces existe un único isomorfismo de haces $\theta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^+ \arrow[rr, "\theta"] & & \mathcal{F}' \\ & \mathcal{F} \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "\iota'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 1.19. Si $\mathcal{F}$ es un prehaz, el haz $\mathcal{F}^+$ del teorema precedente se llama la *hacificación* de $\mathcal{F}$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ un abierto. Definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de todas las funciones

$$\underline{s} : U \to \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

que verifican las siguientes condiciones:

(1) $\underline{s}(x) \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in U$; y
(2) Para todo $x \in U$ existe una vecindad abierta V de x contenida en U y una sección $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que para todo $y \in V$ se tiene $\underline{s}(y) = s_y$.

Definimos la suma (el producto, producto por escalar, etc., según el contexto, se definen análogamente) de dos elementos $\underline{s}$ y $\underline{t}$ en $\mathcal{F}^+(U)$ como

$$(\underline{s} + \underline{t})(x) = \underline{s}(x) + \underline{t}(x), \quad x \in U.$$

También consideramos la restricción usual de funciones como morfismos de restricción, de modo que obtenemos un prehaz sobre X. Para probar que es un haz, sea $U \subseteq X$ un abierto y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U junto con secciones $\underline{s}_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$ para todo $i \in I$ tales que $\underline{s}_i|_{U_i\cap U_j} = \underline{s}_j|_{U_i\cap U_j}$ para todo $i, j \in I$. Si $x \in U$, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$ y con esto, definimos

$$\underline{s}(x) = \underline{s}_i(x).$$

Es fácil notar que el valor $\underline{s}_i(x)$ es independiente de $i \in I$ tal que $x \in U_i$, y por definición $\underline{s}(x) \in \mathcal{F}_x$, de modo que obtenemos una función bien definida

$$\underline{s} : U \to \coprod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

que satisface la condición (1) y tal que $\underline{s}|_{U_i} = \underline{s}_i$. Es claro que $\underline{s}$ es la única función sobre U con esta última propiedad. Para probar la segunda condición, sea $x \in U$ y sea $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como $\underline{s}_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$, existe un abierto $V \subseteq U_i \subseteq U$ que es vecindad de x y una sección $s \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\underline{s}_i(y) = s_y$ para todo $y \in V$. Como $\underline{s}|_{U_i} = \underline{s}_i$, tenemos que para todo $y \in V$

$$\underline{s}(y) = \underline{s}_i(y) = s_y,$$

lo que prueba que $\underline{s} \in \mathcal{F}^+(U)$ y que $\mathcal{F}^+$ es un haz.

Ahora, definimos $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ como sigue: Dado $s \in \mathcal{F}(U)$ para un abierto $U \subseteq X$, sea

$$\iota_U(s) : U \to \coprod_{x\in U}, \quad x \mapsto s_x.$$

Es claro por definición de $\mathcal{F}^+$ que $\iota_U(s) \in \mathcal{F}^+(U)$. Si $U \subseteq V$ es una inclusión de conjuntos y $s \in \mathcal{F}(V)$, entonces, para $x \in U$,

$$\iota_U(s|_V)(x) = (s|_V)_x = s_x = \iota_V(s)|_U(x),$$

de modo que $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ es un morfismo de prehaces.

Ahora probaremos que el par $(\mathcal{F}, \iota)$ satisface la propiedad universal en cuestión. Sea entonces $\mathcal{G}$ un haz sobre X y $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Supongamos que existe un morfismo de haces $\Phi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\Phi \circ \iota = \varphi$. Sea $U \subseteq X$ un abierto y $\underline{s} \in \mathcal{F}^+(U)$. La condición (2) nos dice que existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i\in I}$ de U y secciones locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que para todo $i \in I$ y todo $y \in U_i$ se tiene que $\underline{s}(y) = (s_i)_y$. Entonces tenemos que

$$(\Phi_U(\underline{s}))|_{U_i} = \Phi_{U_i}(\underline{s}|_{U_i}) = \Phi_{U_i}(\iota_{U_i}(s_i)) = \varphi_{U_i}(s_i),$$

lo que prueba que, de existir, Φ debería estar dada por la expresión anterior y por ende, por la propiedad del pegado, ser única. Para construir Φ la definimos por esta expresión. El lector deberá verificar que Φ está bien definida (es decir, no depende del cubrimiento $(U_i)_{i\in I}$ y secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $\underline{s}(y) = (s_i)_y$), que Φ es un morfismo de haces y $\Phi \circ \iota = \varphi$.

Finalmente, probamos que el par $(\mathcal{F}^+, \iota)$ es único salvo un único isomorfismo. Sea $(\mathcal{F}', \iota')$ otro tal par. Como $\iota' : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ es un morfismo de prehaces, por la propiedad universal del par $(\mathcal{F}, \iota)$ existe un único morfismo de haces $\theta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}'$ tal que $\theta \circ \iota = \iota'$. Intercambiando los roles de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ obtenemos un único morfismo $\eta : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}^+$ tal que $\eta \circ \iota' = \iota$. Ahora, por la propiedad universal del par $(\mathcal{F}, \iota)$ aplicada al morfismo de prehaces ι, tenemos que el único morfismo de haces $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ tal que $\psi \circ \iota = \iota$ es el morfismo identidad. Pero tenemos que $\eta \circ \theta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ verifica

$$(\eta \circ \theta) \circ \iota = \eta \circ (\theta \circ \iota) = \eta \circ \iota' = \iota,$$

de donde $\eta \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^+}$. Similarmente se prueba que $\theta \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathcal{F}'}$, de donde θ es un isomorfismo de haces.

□

Ejercicio 1.51. Complete la demostración de la existencia de Φ en la demostración anterior.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces y sean $(\mathcal{F}^+, \iota)$ y $(\mathcal{G}^+, \kappa)$ sus hacificaciones. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces, entonces obtenemos un morfismo de prehaces

$$\kappa \circ \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}^+$$

y por la propiedad universal de la hacificación, existe un único morfismo de haces

$$\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$$

tal que $\varphi^+ \circ \iota = \varphi \circ \kappa$. Llamamos a φ^+ el *morfismo inducido por φ por hacificación.*

Proposición 1.52. *Tenemos que $(\cdot)^+ : \mathbf{PreSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$, definido sobre objetos por $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ y sobre morfismos por $\varphi \mapsto \varphi^+$, es un funtor, al que llamamos el* funtor de hacificación.

Ejercicio 1.53. Demuestre la Proposición anterior.

Ejercicio 1.54. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Decimos que S es *adjunto por izquierda* a T (o que T es adjunto por derecha a S), y escribimos $S \vdash T$ si para cada par de objetos C en $\mathcal{C}$ y D en $\mathcal{D}$ existe una biyección

$$\eta_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(C), D) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, T(D))$$

tales que para todo morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ y todo morfismo $g : D \to D'$ en $\mathcal{D}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(C'), D) \arrow[r, "S(f)^*"] \arrow[d, "\eta_{C',D}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(C), D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_{C,D}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(C), D') \arrow[d, "\eta_{C,D'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', T(D)) \arrow[r, "f^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, T(D)) \arrow[r, "T(g)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, T(D'))
\end{tikzcd}$$

conmuta (es decir, $\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(S(-), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, T(-))$ es un isomorfismo natural de funtores).

Demuestre que el funtor de hacificación $(\cdot)^+ : \mathbf{PreSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ es adjunto por izquierda al funtor inclusión $\mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PreSh}(X)$.

1.3.5. Morfismos de haces

Procedemos a estudiar más detalladamente los morfismos de haces. En toda esta sección, X denota un espacio topológico y, a menos que se indique lo contrario, todos los haces y prehaces están definidos sobre X. Además, asumiremos que todos los haces toman valores en la categoría **Ab** de grupos abelianos. El lector realizará las modificaciones (triviales) necesarias para otros casos.

Para alivianar la notación, si $\mathcal{F}$ es un (pre)haz sobre X, y $U \subseteq V$ son abiertos de X, escribiremos

$$s|_U = \mathrm{res}_{V,U}(s), \quad s \in \mathcal{F}(V).$$

Definición 1.20. Sea $\mathcal{F}$ un (pre)haz. Un *sub(pre)haz* de $\mathcal{F}$ es un (pre)haz $\mathcal{F}'$ tal que para todo abierto $U \subseteq X$ se verifica que $\mathcal{F}'(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y tal que las restricciones de $\mathcal{F}'$ son inducidas por las restricciones de $\mathcal{F}$.

En particular, si para cada abierto $U \subseteq X$ escribimos $i_U : \mathcal{F}'(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(U)$ para el morfismo de inclusión, entonces $\mathcal{F}'$ es un sub(pre)haz si y sólo si $i : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ es un morfismo de (pre)haces,

Proposición 1.55. *Si $\mathcal{F}'$ es un sub(pre)haz de $\mathcal{F}$, entonces para cada $x \in X$ el grupo $\mathcal{F}'_x$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_x$.*

Esta Proposición es un caso particular del siguiente resultado general:

Proposición 1.56. *Sea (A_i, f_{ij}) un sistema directo de grupos abelianos y para cada i sea B_i un subgrupo de A_i tal que para todo $i \leq j$ se tiene que $f_{ij}(B_i) \subseteq B_j$ (en este caso, decimos que (B_i, g_{ij}), donde $g_{ij} = f_{ij}|_{B_i}$ es un subsistema directo de (A_i, f_{ij}). Entonces*

$$\varinjlim B_i \text{ es un subgrupo de } \varinjlim A_i.$$

Demostración. Sean $A = \varinjlim A_i$ y $B = \varinjlim B_i$, con morfismos $f_i : A_i \to A$ y $g_i : B_i \to B$, respectivamente. Sea $\iota_i : B_i \hookrightarrow A_i$ la inclusión, de modo que para $i \leq j$,

$$\iota_j \circ g_{ij} = f_{ij} \circ \iota_i.$$

Entonces para cada $i \leq j$ obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B_i \arrow[dd, "g_{ij}"'] \arrow[dr, "f_i \circ \iota_i"] & \\
& A \\
B_j \arrow[ur, "f_j \circ \iota_j"'] &
\end{tikzcd}$$

pues

$$(f_j \circ \iota_j) \circ g_{ij} = f_j \circ (\iota_j \circ g_{ij}) = f_j \circ (f_{ij} \circ \iota_i) = f_i \circ \iota_i.$$

Por la propiedad universal de (B, g_i) existe un único morfismo $h : B \to A$ tal que

$$h \circ g_i = f_i \circ \iota_i$$

para todo i.

□

Definición 1.21. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces.

(a) El *prehaz kernel* (o *prehaz núcleo*) está definido como el subhaz de $\mathcal{F}$ dado por

$$(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi_U),$$

para todo U abierto de X.

(b) El *prehaz imagen* se define como el subhaz de $\mathcal{G}$ dado por

$$(\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}}(U) = \operatorname{im}(\varphi_U).$$

para todo U abierto de X.

Proposición 1.57. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces. El prehaz kernel* $\ker \varphi$ *es un haz.*

Demostración. Sea U un abierto de X y $(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U. Sean $s_i \in (\ker \varphi)(U_i) = \ker(\varphi_{U_i}) \subseteq \mathcal{F}(U_i)$ para cada $i \in I$, tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i, j. Como $\mathcal{F}$ es un haz, existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Ahora, como φ es un morfismo de haces, tenemos que

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0,$$

y como $\mathcal{G}$ es un haz, entonces $\varphi_U(s) = 0$, de modo que $s \in (\ker \varphi)(U)$. Esto prueba que $\ker \varphi$ es un haz. □

Ejemplo 1.58. En general, si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, no es cierto en general que $(\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}}$ es un haz, sino solamente un prehaz. Por ejemplo, sea $\mathcal{O}$ el haz de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}$, es decir, para cada abierto $U \subseteq \mathbb{C}$, tenemos que

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\},$$

con la restricción usual de funciones, y visto como un haz de grupos abelianos bajo la suma. Sea $\mathcal{O}^\times$ el haz de funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto, es decir,

$$\mathcal{O}^\times(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in U\}.$$

Este es un haz de grupos abelianos bajo la multiplicación. Consideremos el morfismo de haces

$$\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times$$

definido sobre cada abierto U de $\mathbb{C}$ por

$$\exp_U(f) = \exp \circ f, \quad f \in \mathcal{O}(U),$$

donde la exp en el lado derecho de esta igualdad es la función exponencial completa $z \mapsto e^z$. Es claro que exp es en efecto un morfismo de haces.

Sea $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sean $U_1 = U \setminus \mathbb{R}_{>0}$ y $U_2 = U \setminus \mathbb{R}_{<0}$. Entonces $U = U_1 \cup U_2$. Sean f_1 y f_2 ramas del logaritmo sobre U_1 y U_2, entonces $\exp_{U_j}(f_j)(z) = z$ para $j = 1, 2$. Sin embargo no existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\exp(f)|_{U_j} = \exp(f_j)$ para $j = 1, 2$, pues tal función f debería verificar $\exp f(z) = z$ para todo $z \in$ U, lo que es imposible pues no existe un logaritmo holomorfo de $z \mapsto z$ sobre U.

Esto prueba que $(\text{im} \exp)_{\text{pre}}$ no es un haz.

Ejercicio 1.59. En el ejemplo precedente, demuestre que

$$\ker \exp = \underline{\mathbb{Z}},$$

el haz constante a valores en $\mathbb{Z}$.

Con esto, vemos que en general el prehaz imagen de un morfismo de haces, no es necesariamente un haz.

Definición 1.22. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces. El *haz imagen* $\operatorname{im} \varphi$ es la hacificación del prehaz imagen $(\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}}$, es decir,

$$\operatorname{im} \varphi = (\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}}^{+}.$$

Debido a su importancia, daremos una caracterización explícita del haz imagen de un morfismo de haces.

Proposición 1.60. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Si U es un abierto de X, y $s \in \mathcal{G}(U)$, entonces $s \in (\operatorname{im} \varphi)(U)$ si y sólo si existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que*

$$s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i),$$

para cada $i \in I$.

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ el subprehaz de $\mathcal{G}$ tal que para todo $U \subseteq X$ abierto, una sección $s \in \mathcal{G}(U)$ pertenece a $\mathcal{I}(U)$ si y sólo si existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que

$$s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i), \quad i \in I.$$

Probaremos que $\mathcal{I}$ es una hacificación del prehaz imagen de φ.

La verificación de que $\mathcal{I}$ es un haz es sencilla y se deja para el lector. Consideremos el morfismo de inclusión $\iota : (\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}} \to \mathcal{I}$, pues claramente $(\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}}$ es un subprehaz de $\mathcal{I}$ por definición.

Sea $\mathcal{H}$ un haz y sea $\psi : (\operatorname{im} \varphi)_{\text{pre}} \to \mathcal{H}$ un morfismo de prehaces. Supongamos que existe un morfismo de haces $\Psi : \mathcal{I} \to \mathcal{H}$ tal que $\Psi \circ \iota = \psi$. Sea $U \subseteq X$ un abierto y $s \in \mathcal{I}(U)$, entonces existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i)$, de modo que para todo $i \in I$,

$$\Psi_U(s)|_{U_i} = (\Psi \circ \iota)_{U_i}(\varphi_{U_i}(t_i)) = (\psi \circ \varphi)_{U_i}(t_i),$$

lo que prueba, por la unicidad del pegado, que Ψ está únicamente determinado por esta fórmula. Así, de existir tal Ψ este es único, por lo que debemos establecer su existencia. Para ello, dado $U \subseteq X$ un abierto y $s \in \mathcal{I}(U)$, tomamos un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i)$ para todo $i \in I$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)_{U_i}(t_i)|_{U_i \cap U_j} &= (\psi \circ \varphi)_{U_i \cap U_j}(t_i|_{U_i \cap U_j}) \\
&= (\psi \circ \varphi)_{U_i \cap U_j}(t_j|_{U_i \cap U_j}) \\
&= (\psi \circ \varphi)_{U_j}(t_j)|_{U_i \cap U_j},
\end{aligned}$$

por lo que existe una única sección, a la que denotamos por $\Psi_U(s)$, tal que

$$\Psi_U(s)|_{U_i} = (\psi \circ \varphi)_{U_i}(t_i),$$

para todo $i \in I$. El lector deberá verificar que esta definición de $\Psi_U(s)$ no depende de la elección del cubrimiento abierto (U_i) de U ni de la elección de las secciones t_i. Además, es claro por construcción que Ψ es un morfismo de haces y que $\Psi \circ \iota = \psi$. □

Proposición 1.61. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Para cada $x \in X$ tenemos, a nivel de tallos, que*

$$(\ker\varphi)_x = \ker(\varphi_x) \quad y \quad (\operatorname{im}\varphi)_x = \operatorname{im}(\varphi_x).$$

Demostración. Consideremos un germen $[U,s] \in (\ker\varphi)_x$. Entonces $U \subseteq X$ es un abierto y $s \in \ker(\varphi(U))$. Luego

$$\varphi_x([U,s]) = [U,\varphi_U(s)] = [U,0] = 0,$$

de modo que $[U,s] \in \ker(\varphi_x)$. Recíprocamente, si $[U,s] \in \ker(\varphi_x)$, tenemos que

$$0 = \varphi_x([U,s]) = [U,\varphi_U(s)],$$

lo que significa que existe una vecindad V de x contenida en U tal que $\varphi_U(s)|_V = \varphi_V(s|_V) = 0$, y por ende $s|_V \in (\ker\varphi)(V)$. Esto significa que

$$[U,s] = [V,s|_V] \in (\ker\varphi)_x.$$

Ahora, dado que un prehaz y su hacificación tienen los mismos tallos, podemos considerar el prehaz imagen en lugar del haz imagen. Supongamos que $[U,s] \in (\operatorname{im}\varphi)_x = ((\operatorname{im}\varphi)_{\text{pre}})_x$, entonces $s = \varphi_U(t)$ para cierta sección $t \in \mathcal{F}(U)$. Pero entonces

$$\varphi_x([U,t]) = [U,\varphi_U(t)] = [U,s],$$

por lo que $[U,s] \in \operatorname{im}(\varphi_x)$. Recíprocamente, supongamos que $[U,s] \in \operatorname{im}(\varphi_x)$, de modo que existe un germen $[V,t] \in \mathcal{F}_x$ tal que

$$[U,s] = \varphi_x([V,t]) = [V,\varphi_V(t)],$$

y por ende, existe una vecindad abierta W de x contenida en $U \cap V$ tal que

$$s|_W = \varphi_V(t)|_W = \varphi_W(t|_W),$$

de modo que $s|_W \in (\operatorname{im}\varphi)_{\text{pre}}(W)$ y así

$$[U,s] = [W,s|_W] \in ((\operatorname{im}\varphi)_{\text{pre}})_x = (\operatorname{im}\varphi)_x.$$

□

1.3.6. Naturaleza local de los haces

Dado que tenemos una noción muy transparente de núcleo e imagen de morfismos de haces, podemos definir sucesiones exactas de haces similar a como se define para el caso de grupos abelianos. Recordemos que una sucesión de grupos abelianos y homomorfismos de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice *exacta en* A_n si $\ker(f_n) = \operatorname{im}(f_{n-1})$. Dicha sucesión se dice *exacta* si es exacta en A_n para todo n. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

Esto se generaliza de la manera obvia a los haces:

Definición 1.23. Una sucesión de haces y morfismos de haces

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice *exacta en* $\mathcal{F}_n$ si $\ker \varphi_n = \operatorname{im} \varphi_{n-1}$. Esta sucesión se dice *exacta* si es exacta en $\mathcal{F}_n$ para todo n. La definición de sucesión exacta corta de haces es obvia.

Veremos que la exactitud es algo que los haces pueden detectar a nivel local, es decir, a nivel de tallos. Para esto, necesitaremos el siguiente

Lema 1.62. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X. Entonces $\varphi = 0$ si y sólo si para todo $x \in X$, tenemos $\varphi_x = 0$ a nivel de tallos.*

Demostración. Si $s \in \mathcal{F}(U)$ es un sección de $\mathcal{F}$ sobre un abierto U, y $x \in U$, denotamos $s_x = [U, s] \in \mathcal{F}_x$ al germen de s alrededor de x.

Si $\varphi = 0$ claramente $\varphi_x = 0$ para todo $x \in X$. Recíprocamente, sea $U \subseteq X$ un abierto y $s \in U$, entonces para cada $x \in U$, tenemos que $(\varphi_U(s))_x = \varphi_x(s_x) = 0$, lo que significa que para cada $x \in U$, existe una vecindad abierta $U_x \subseteq U$ con

$$\varphi_U(s)|_{U_x} = \varphi_{U_x}(s|_{U_x}) = 0.$$

Luego $(U_x)_{x \in U}$ es un cubrimiento abierto de U y por los axiomas de haces, se sigue que $\varphi_U(s) = 0$. Como U y s son arbitrarios, concluimos que $\varphi = 0$. $\square$

Teorema 1.63. *Una sucesión de haces sobre un espacio topológico X*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si y sólo si, para cada $x \in X$ la sucesión de tallos

$$\cdots \longrightarrow (\mathcal{F}_{n-1})_x \xrightarrow{(\varphi_{n-1})_x} (\mathcal{F}_n)_x \xrightarrow{(\varphi_n)_x} (\mathcal{F}_{n+1})_x \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

Demostración. Debemos probar que la sucesión

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \tag{1.1}$$

es exacta en $\mathcal{G}$ si y sólo si

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \tag{1.2}$$

es exacta en $\mathcal{G}_x$ para todo $x \in X$.

Supongamos que la sucesión (1.1) es exacta en $\mathcal{G}$ y sea $x \in X$. Tenemos que

$$\psi_x \circ \varphi_x = (\psi \circ \varphi)_x = 0,$$

de modo que $\operatorname{im}(\varphi_x) \subseteq \ker(\psi_x)$. Sea $[U, s] \in \ker(\psi_x) = (\ker \psi)_x$, de modo que $s \in (\ker \psi)(U) = (\operatorname{im} \varphi)(U)$, por lo que existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que

$$s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i), \quad i \in I,$$

Elijamos $i \in I$ tal que $x \in U_i$ y escribamos $V = U_i$ y $t = t_i$. De este modo tenemos

$$[U, s] = [V, s|_V] = [V, \varphi_V(t)] = \varphi_x([V, t]),$$

por lo que $[U, s] \in \operatorname{im}(\varphi_x)$. Esto prueba que la sucesión (1.2) es exacta en $\mathcal{G}_x$.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión (1.2) es exacta en $\mathcal{G}_x$ para todo $x \in X$. Luego $(\psi \circ \varphi)_x = \psi_x \circ \varphi_x = 0$ para todo $x \in X$, lo que por el Lema 1.62, significa que $\psi \circ \varphi = 0$. A partir de esto deduciremos que $\operatorname{im} \varphi \subseteq \ker \psi$. Para esto, sea U un abierto de X y sea $s \in (\operatorname{im} \varphi)(U)$, de modo que existe un cubrimiento abierto (U_i) de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i)$ para todo $i \in I$. Luego

$$\psi_U(s)|_{U_i} = \psi_{U_i}(s|_{u_i}) = \psi_{U_i} \circ \varphi_{U_i}(t_i) = 0,$$

de donde $\psi_U(s) = 0$, es decir, $s \in (\ker \varphi)(U)$.

Sea ahora $s \in (\ker \psi)(U)$, donde U es un abierto de X. Entonces $s_x \in (\ker \psi)_x = (\operatorname{im} \varphi)_x$ para cada $x \in U$, lo que significa que existen vecindades abierta $U_x \subseteq U$ de cada $x \in U$ y secciones $t^x \in \mathcal{F}(U_x)$ tales que

$$[U, s] = s_x = \varphi_x([U_x, t^x]) = [U_x, \varphi_{U_x}(t^x)].$$

Esto significa que, para cada $x \in U$ existe una vecindad abierta $W_x \subseteq U_x \subseteq U$ de x tal que

$$s|_{W_x} = \varphi_{U_x}(t^x)|_{W_x} = \varphi_{W_x}(t^x|_{W_x}).$$

Claramente (W_x) forma un cubrimiento abierto de U, y por ende esto prueba que $s \in (\operatorname{im} \varphi)(U)$. Esto prueba la exactitud de (1.1). □

Ejercicio 1.64. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Pruebe que son equivalentes:

(i) φ es un monomorfismo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$.

(ii) $\ker \varphi = 0$.

(iii) Para todo $x \in X$, el morfismo inducido a nivel de tallos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es inyectivo.

Ejercicio 1.65. Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. Pruebe que son equivalentes:

(i) φ es un epimorfismo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$.

(ii) $\operatorname{im} \varphi = 0$.

(iii) Para todo $x \in X$, el morfismo inducido a nivel de tallos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es sobreyectivo.

Teorema 1.66. *Sea $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre un espacio topológico X. φ es un isomorfismo si y sólo si para cada $x \in X$ el morfismo inducido en tallos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo.*

Demostración. Primero probemos que φ es un isomorfismo si y sólo si la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

es exacta.

Si φ es un isomorfismo, entonces $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es un isomorfismo para cada abierto $U \subseteq X$, lo que implica que $(\ker \varphi)(U) = 0$ y $(\operatorname{im} \varphi) = \mathcal{G}(U)$, y por ende $\ker \varphi = 0 = \operatorname{im} 0$ y $\operatorname{im} \varphi = \mathcal{G} = \ker 0$, lo que significa que la sucesión (1.3) es exacta. Recíprocamente, supongamos que dicha sucesión es exacta y sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectivo, por lo que basta probar que es sobreyectivo. Sea $s \in \mathcal{G}(U) = (\operatorname{im} \varphi)(U)$, entonces existe un cubrimiento abierto (U_i) de U y secciones $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i)$ para todo i. Notemos que

$$\varphi_{U_i \cap U_j}(t_i|_{U_i \cap U_j}) = s|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{U_i \cap U_j}(t_j|_{U_i \cap U_j}),$$

y como $\varphi_{U_i \cap U_j}$ es inyectivo, entonces $t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}$, por lo que existe una única sección $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{U_i} = t_i$. Luego tenemos que

$$s|_{U_i} = \varphi_{U_i}(t_i) = \varphi_{U_i}(t|_{U_i}) = (\varphi_U(t))|_{U_i},$$

por lo que $s = \varphi_U(t)$, probando la sobreyectividad de φ_U. Por ende, φ es un isomorfismo de haces.

Una vez probado esto, la demostración es una consecuencia trivial del Teorema 1.63.

□

Espacios localmente anillados

Lección 4

1.4. Espacios localmente anillados

1.4.1. Definiciones y propiedades elementales

Definición 1.24. Un *espacio anillado* es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos conmutativos sobre X. Llamamos a $\mathcal{O}_X$ el *haz estructural de* X.

Si el haz estructural $\mathcal{O}_X$ es un haz de k-álgebras, diremos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *espacio anillado en* k*-álgebras.*

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados, nos interesa dar una definición de morfismo de espacios anillados. Para ello, es fácil intuir la necesidad de una aplicación continua $f : X \to Y$, pero también necesitamos un morfismo relacionando los haces $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{O}_Y$. Dado que un morfismo de haces está definido entre haces sobre un mismo espacio topológico, debemos obtener dos haces sobre un mismo espacio. Nuestra herramienta para conseguir esto es el haz imagen directa: $f_*\mathcal{O}_X$ es un haz sobre Y y por ende podemos considerar morfismos $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$.

Definición 1.25. Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados. Un *morfismo de espacios anillados* de $(X, \mathcal{O}_X)$ hacia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par $(f, f^\#)$ donde $f : X \to Y$ es una aplicación continua y $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de haces sobre Y.

Notemos que si $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^\#) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ son morfismos de espacios localmente anillados, entonces, tras aplicar el funtor imagen directa $g_* : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(Z)$ al morfismo de haces $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ obtenemos un morfismo de haces

$$g_*(f^\#) : g_*\mathcal{O}_Y \to g_*f_*\mathcal{O}_X = (g \circ f)_*\mathcal{O}_X,$$

de modo que la composición de morfismos de espacios anillados está dada por

$$(g, g^\#) \circ (f, f^\#) = (g \circ f, g_*(f^\#) \circ g^\#).$$

Por este motivo, escribimos $(g \circ f)^{\#} = g_*(f^{\#}) \circ g^{\#}$.

Es claro entonces que obtenemos una categoría cuyos objetos son espacios anillados y cuyos morfismos son los morfismos de espacios anillados con la composición antes descrita.

Proposición 1.67. *Si $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados, entonces para cada $x \in X$ existe un morfismo inducido a nivel de tallos*

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Demostración. Esto puede ser visto abstractamente como sigue: Si $U \subseteq Y$ es una vecindad abierta de $f(x)$, entonces $f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de x y tenemos homomorfismo de anillos

$$f^{\#}(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Es fácil ver entonces que obtenemos un morfismo de sistemas directos, y tomando límites directos, obtenemos un morfismo

$$\mathcal{O}_{Y,f(x)} = \varinjlim_{f(x)\in U} \mathcal{O}_Y(U) \to \varinjlim_{f(x)\in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Por otro lado existe un morfismo obvio

$$\varinjlim_{f(x)\in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \to \varinjlim_{x\in V} \mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_{X,x},$$

y componiendo estos dos homomorfismos, obtenemos

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Sin embargo, es conveniente obtener una construcción más explícita de este homomorfismo inducido. Consideremos un germen $[U, s]$ del haz $\mathcal{O}_Y$ alrededor de $f(x)$, entonces $[f^{-1}(U), s]$ es un germen del haz $\mathcal{O}_X$ alrededor de x y por ende el morfismo inducido está dado por

$$f_x^{\#}([U, s]) = [f^{-1}(U), s].$$

□

Ejercicio 1.68. Sean $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^{\#}) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ dos morfismos de espacios anillados. Pruebe que

$$(g \circ f)_x^{\#} = f_x^{\#} \circ g_{f(x)}^{\#}$$

para todo $x \in X$.

Nuestro objeto de interés es el siguiente:

Definición 1.26. Un *espacio localmente anillado* es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que para todo $x \in X$ el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local. Un *morfismo de espacios localmente anillados* es un morfismo de espacios anillados $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que para todo $x \in X$ el morfismo inducido a nivel de tallos

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

es un homomorfismo local de anillos locales. Similarmente, si $\mathcal{O}_X$ es un haz de k-álgebras, nos referiremos a *espacios localmente anillados en k-álgebras*.

1.4.2. Un ejemplo importante

Presentaremos un ejemplo muy importante de espacio localmente anillado. Sea X un abierto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el haz $\mathcal{C}^\infty(-,\mathbb{R})$ de funciones suaves, es decir, para cada abierto $U \subseteq X$,

$$\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty\}.$$

Escribiremos $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty(-,\mathbb{R})$ para el haz de funciones suaves. Mostraremos que $(X,\mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado. Para ello, notemos que si $x \in X$ y $[U,s]$ es un germen de $\mathcal{O}_X$ alrededor de x, el valor $s(x)$ no depende de s o U sino únicamente del germen $[U,s]$. En efecto, si $[V,t] = [U,s]$, existe una vecindad abierta W se x tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W$, por lo que $s(s) = t(x)$. De este modo, obtenemos un homomorfismo de anillos

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{R}, \quad [U,s] \mapsto s(x).$$

Este homomorfismo es claramente sobreyectivo. Su núcleo está dado por el ideal

$$\mathfrak{m}_x = \{[U,s] \in \mathcal{O}_{X,x} \mid s(x) = 0\}.$$

Este es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, pues si $[U,s] \notin \mathfrak{m}_x$ por la continuidad de x existe una vecindad abierta W de x en U tal que $s(y) \neq 0$ para todo $y \in W$ y por ende $[W,(s|_W)^{-1}]$ es un inverso multiplicativo de $[U,s]$. De este modo, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local.

Si $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ es otro abierto, y $f : X \to Y$ es una aplicación suave (es decir, de clase C^∞), esta induce un morfismo de haces sobre Y

$$\varphi : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X.$$

Específicamente, dado un abierto $U \subseteq Y$ y una sección $s \in \mathcal{O}_Y(U)$, la composición

$$f^{-1}(U) \xrightarrow{f|_{f^{-1}(U)}} U \xrightarrow{\quad s \quad} \mathbb{R}$$

produce una función suave

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \ni f_U^\#(s) = s \circ f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}.$$

Si $s : U \to \mathbb{R}$ es una función suave definida en una vecindad U de $f(x)$ tal que $s(f(x)) \neq 0$, entonces $(s \circ f|_{f^{-1}(U)})(x) \neq 0$, por lo que el morfismo inducido

$$\varphi_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

aplica el ideal maximal $\mathfrak{m}_{f(x)}$ de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ hacia el ideal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, y por ende

$$(f,\varphi) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$$

es un morfismo de espacios localmente anillados.

Recíprocamente, si $(f,f^\#) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios localmente anillados, entonces $f : X \to Y$ es continua, y para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta U de $f(x)$ en Y

tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[rr, "f_U^{\#}"] \arrow[d] & & \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[rr, "f_x^{\#}"] \arrow[d, two heads] & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d, two heads] \\
\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \arrow[rr, "\overline{f_x^{\#}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \arrow[dl, "\cong"] \\
& \mathbb{R}. &
\end{tikzcd}$$

En particular, esto nos dice que $f_U^{\#}(s) = s \circ f|_{f^{-1}(U)}$ (por qué?) para toda función suave $s : U \to \mathbb{R}$, lo que significa que f es suave y además $f^{\#} = \varphi$.

Hemos probado que una función de clase C^∞ entre dos abiertos euclídeos (es decir, abiertos de $\mathbb{R}^n$ para algún n) es lo mismo que un morfismo de espacios localmente anillados $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$.

Capítulo 2 Variedades y aplicaciones suaves

Lección 5

¿Qué es una variedad?, es una pregunta con una respuesta relativamente simple, bastaría que el lector dirija su mirada a la definición que proporcionamos en este texto. Aún así, no resulta satisfactoria la respuesta. Esto a mi parecer, viene de que la pregunta no es la mejor de todas; de hecho, preguntarnos ¿quién fue la primera persona que usó el término variedad? y ¿por qué alguien formularía dicha definición? resultaría mejor. No es muy claro, cómo alguien podría formular primero esta pregunta antes de saber que es una variedad, pero si te encuentras en una comunidad de estudiantes de física o matemática es frecuente escuchar estos términos. Así, la segunda pregunta surge de manera más natural.

El problema que intenta solucionar las definiciones sobre variedades está muy bien expuesto en la conferencia de Bernhard Riemann en 1854 titulada ”Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”, que traduce al español como ”*Acerca de la hipótesis que yace en fundación de la Geometría*”. Ciertas líneas en su **”Plan de Investigación”** nos dan un contexto claro del origen de las variedades, Riemann escribe:

> Ya es bien sabido que la geometría tiene a los conceptos de espacio y primeros conceptos básicos para su construcción como algo dado. Esta dá de ellas solo definiciones nominales, mientras que las esenciales, las determinaciones jurídicas se presentan en forma de axiomas. La relación entre estos requisitos previos sigue siendo oscura.
> … La razón indudable de esto es que la noción general de multitud de magnitudes extendidas aún permanece sin ser trabajada. Tengo en primer lugar, en consecuencia, que fijarme la tarea de construir una noción de multiples magnitudes extendidas a partir de una noción general de magnitud.

Con esto sabemos que lo que empezaba a formalizar Riemann era la noción de magnitudes extendidas. Y aunque este término ya no se use, podemos relacionar esa noción a través de un ejemplo, como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Estos son solo ejemplos pues el nombre de magnitudes extendidas sugiere algo mucho más basto. Sin embargo, podemos solo destacar lo que tiene relevancia dentro de este análisis. Esto es: La perspectiva de un punto en $\mathbb{R}^n$, el espacio afín que produce ese punto, y la noción de cercanía a través de la métrica $\mathbb{R}^n$. Esto nos bastará de alguna manera para exponer que es a lo que conocemos como una magnitud extendida. Ya luego, podemos ver otras características más que tiene $\mathbb{R}^n$ como la diferenciabilidad, y añadirlo a nuestro concepto que no será más el de magnitud extendida sino el de variedad.

2.1. Variedades

2.1.1. Variedades topológicas

En la topología se define cercanía para cualquier conjunto, que como vimos tratar a algo de conjunto le dota de una propiedad de homogeneidad. Con las definiciones de lo que es un espacio localmente euclídeo, luego una variedad topológica, en la matemática moderna se soluciona el problema sobre el espacio. Esto porque logramos relacionar topologías con un espacio isotrópico, recuperando esta propiedad de manera local.

Con esta motivación, empecemos con el estudio de las variedades. Antes claro, definamos a qué referiremos por variedades.

Definición 2.1 (Espacios localmente euclídeos)**.** Sea X un espacio topológico, decimos que X es *localmente euclídeo de dimensión* n si se cumple que es de Hausdorff y para cualquier $x \in X$ existe una vecindad abierta de x que es homeomorfa con algún abierto de $\mathbb{R}^n$.

(1) (**Cartas Locales)** A cualquier (V, φ) con V una vecindad abierta de x, $\varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ con φ es un homeomorfismo se le denomina *carta local alrededor de* x,

(2) (**Funciones de Transición)** Dadas (V, φ) y (W, ψ) dos cartas locales no disjuntas; es decir $V \cap W \neq \emptyset$, a la función $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \varphi(V \cap W)$ se le denomina *función de transición entre* (V, φ) *y* (W, ψ).

De estas definiciones se puede decir que un espacio localmente euclídeo no es más que un espacio topológico de Hausdorff en el que hay al menos una carta local alrededor de cada punto.

Definición 2.2 (**Variedad Topológica**)**.** Una *n-variedad topológica M* es un espacio localmente euclídeo de dimensión n que es II-numerable.

Observación. Más adelante, en definición 2.4, para definir variedad se necesita de una estructura adicional. Esta se llama atlas y es un conjunto de distintas cartas locales que cubren a un espacio topológico M. Vagamente se puede decir del atlas $\mathscr{A}$ que las funciones transición entre sus elementos (cartas locales) son difeomorfismos, y en el contexto de la definición 2.2 la condición debería ser reemplazada por que las funciones transición sean homeomorfismos. Sin embargo, en dicho caso el atlas $\mathscr{A}$ conseguido no es otro que:

$$\mathscr{A} = \left\{ (V, \varphi) \ : \ \begin{array}{c} (\exists x \in M) \quad V \text{ es una vecindad abierta de } x \\ \text{y} \quad \varphi : V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es un homeomorfismo} \end{array} \right\}.$$

Este atlas no es muy relevante en el caso de variedades topológicas; por ello no se menciona dentro de la definición 2.2. Pero en la section 2.1.2 esta estructura no es trivial y todas las sutilezas que se desprenden de ella se aprecian en las proposiciones dadas en esa sección.

Lema 2.1 (Sub-variedad topológica abierta). *Sea M una n-variedad topológica. Cualquier $V \subseteq M$ abierto es una n-variedad topológica.*

Demostración. Como V es un subconjunto de M, entonces V es de Hausdorff y II-numerable. También cualquier $v \in V$ tiene una vecindad en M, W_v, que es homeomorfa con un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si φ es dicho homeomorfismo, entonces la restricción de φ_v a $V \cap W_v$, donde $V \cap W_v$ es un abierto pues V es abierto, es un homeomorfismo con su recorrido que es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por la arbitrariedad de v concluimos que V es localmente euclídeo de dimensión n.

□

Para ilustrar que objetos abarca nuestra definición de variedad topológica veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.2. (Espacio normado real V finito-dimensional) Tomamos una base para V, $(\mathbf{f_i})_{i=1}^m$. Y con ello podemos crear el siguiente homeomorfismo lineal.

$$\begin{aligned} I : V &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \ \mathbf{e_i} \qquad \text{donde } v = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i \ \mathbf{f_i}, \end{aligned}$$

Como el axioma de numerabilidad y ser de Hausdorff son propiedades topológicas, podemos decir que V *es II-numerable y de Hausdorff* porque es homeomorfo a un espacio que lo es. Además, hemos obtenido la carta local (V, I) que cumple que está alrededor de cualquier punto en V. Así, V *es localmente euclídeo de dimensión n*. Luego se tiene que V *es una n-variedad topológica.*

Ejemplo 2.3. (La n-esfera $\mathbb{S}^n$) La esfera es el siguiente conjunto

$$\mathbb{S}^n := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\right\}$$

Dado que $\mathbb{S}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ entonces *es un espacio de Hausdorff y II-numerable.*

Para terminar de ver que $\mathbb{S}^n$ *es localmente euclídeo de dimensión n*, tenemos que armar cartas locales alrededor de todos los puntos. Una forma de crear estas cartas locales es: poner en correspondencia un punto en la esfera con uno del plano por medio de trazar una línea recta desde algún polo hacia el punto de la esfera y tomar la intersección de la recta con el plano. A esta asignación se la conoce como *proyección estereográfica.* Los detalles sobre estas cartas locales las presentaremos ahora.

Empecemos por llamar a $N := \left(\delta^{1i}\right)_{i=1}^{n+1}$ polo norte y a $S := -P^+$ al polo sur y $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{S}^n$. Y al plano sobre el que haremos la proyección, $P := \langle\{\mathbf{e_{i+1}} \mid 0 < i \leq n\}\rangle$. Notar que como los puntos en $\mathbb{S}^n$ son cerrados entonces $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{S}^n$. Para la proyección estereográfica tomamos $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ trazamos la recta $\ell_x := N + \langle\{N - x\}\rangle$ y escogemos $\pi \in P \cap \ell_x$. De esto tenemos que $\pi^1 = 0$ y que existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $\pi = 1 - t \cdot (1 - x)$. Por lo que, $t = 1/(1 - x^1)$ y $\pi^j = 1 - t \cdot (1 - x^j) = x^j/(1 - x^1)$ para todo $n + 1 \geq j > 1$. Pero $\pi \in \mathbb{R}^{n+1}$ y la correspondencia debe ser con puntos en $\mathbb{R}^n$, esto se soluciona si tomamos el punto en $\mathbb{R}^n$ que tiene todas excepto la primera coordenada de π.

Con ello tenemos las funciones:

$$\begin{aligned} \pi_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x^{i+1}}{1 - x^1}\right)_{i=1}^{n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_- : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x^{i+1}}{1 + x^1}\right)_{i=1}^{n} \end{aligned}$$

De manera similar para hallar la inversa tomamos $\pi^* \in \mathbb{R}^n$ y definimos π con coordenadas $\pi^1 := 0$ y $\pi^{j+1} := (\pi^*)^j$ para todo $0 < j \leq n$. A π lo ponemos en correspondencia con el punto que está en la recta que une π con P^+ y está en la esfera $\mathbb{S}^n$. Si x es dicho punto, entonces $\|x\|_2^2 = 1$ y existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $x = P^+ - t \cdot (P^+ - \pi)$. Con ello, es claro que $x^1 = 1 - t$ y $x^j = t \cdot (\pi^*)^{j-1}$ si $j > 1$. Y del hecho que $\|x\|^2 = 1$, tenemos que $(1-t)^2 + t^2 \cdot \sum_{j=1}^n \left(\pi_j^*\right)^2 = 1$. Luego, $t = 2/(1 + \|\pi^*\|^2)$. Concluyendo que $x^1 = (\|\pi^*\|^2 - 1)/(1 + \|\pi^*\|^2)$ $x^j = (2(\pi^*)^{j-1})/(1 + \|\pi^*\|^2)$ si $j > 1$. Como resultado tenemos las siguientes funciones que son las inversas de π_+ y π_- respectivamente.

$$\begin{aligned} \gamma_+ : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \left\{P^+\right\} \\ y &\longmapsto \left(\frac{\|y\|^2 - 1}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \ldots, \frac{2y^n}{1 + \|y\|^2}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_- : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \left\{P^-\right\} \\ y &\longmapsto \left(\frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2}, \frac{2y^1}{1 + \|y\|^2}, \ldots, \frac{2y^n}{1 + \|y\|^2}\right) \end{aligned}$$

Para comprobar que π_+ es continua como es una función entre dos espacios métricos basta comprobar la continuidad secuencial. Así, tomemos un punto $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{P^+\}$ arbitrario y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{S}^n \setminus \{P^+\}$ tal que $x_n \to x$, entonces $\lim_n x^i_{(n)} = x^i$ para todo $0 < i \leq n$; por lo que $\lim_n x^{i+1}_{(n)}/(1 - x^1_{(n)}) = x^{i+1}/(1 - x^1)$. (*esto pues como $x_n \neq P^+$ y $\|x_n\| = 1$; por lo que, $x^1_{(n)} \neq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$*). Luego, $\lim_n \pi_+(x_n) = \pi_+(x)$. Y entonces π_+ es continua en x. Por arbitrariedad de $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{P^+\}$, π_+ continua. En un proceso análogo se comprueba que π_- es continua.

Ahora, para ver la continuidad de la inversa de la proyección estereográfica, γ_+, tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $y_n \to y$, entonces $\lim_n y^i_{(n)} = y^i$ para todo $0 < i \leq n$ y $\lim_n \|y_n\|^2 = \|y\|^2$. Por lo que, $\lim_n -2y^i_{(n)}/(1 + \|y_n\|^2) = -2y^i/(1 + \|y\|^2)$ para todo $0 < i \leq n$ y además $\lim_n(\|y_n\|^2 - 1)/(1 + \|y_n\|^2) = (\|y\|^2 - 1)/(1 + \|y\|^2)$. Luego, $\lim_n \gamma_+(y_n) = \gamma_+(y)$. Y por la arbitrariedad de $y \in \mathbb{R}^n$ se concluye que γ_+ es continua en y. En un proceso análogo se comprueba que γ_- es continua.

Con las cartas locales $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \pi_+)$ y $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \pi_-)$ se cumple que siempre al menos una de estas estará alrededor de un punto cualquiera en $\mathbb{S}^n$.

Siguiendo la definición 2.2, $\mathbb{S}^n$ *es una n-variedad topológica.*

Ejemplo 2.4. (Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$) El espacio proyectivo es el conjunto:

$$\mathbb{P}^n = \left\{\langle\{x\}\rangle \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right\}$$

Sea la función $q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$, definida por $q(x) := \langle\{x\}\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$,(que es sobreyectiva) establecemos que $U \subseteq \mathbb{P}^n$ es *abierto en* $\mathbb{P}^n$ si $q^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. A q la llamaremos función cociente. Resulta que q es una aplicación abierta.

Para comprobar esto último, sea $\mathbb{B}^{n+1}$ una bola en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ veamos que $q(\mathbb{B}^{n+1})$ es abierto en $\mathbb{P}^n$. Para aquello, debemos comprobar que

$$q^{-1}(q(\mathbb{B}^{n+1})) = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ \alpha v \in \mathbb{B}^{n+1}\right\}$$

Notar que si $w \in q^{-1}(q(\mathbb{B}^{n+1}))$ entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha w \in \mathbb{B}^{n+1}$. Por tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si $\|y - \alpha w\| < \varepsilon$ entonces $y \in \mathbb{B}^{n+1}$. Por tanto si tomamos $\delta := \varepsilon/\alpha > 0$ entonces para todo $y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $\|y - w\| < \varepsilon/\alpha$ entonces $\|\alpha y - \alpha w\| < \varepsilon$. Por lo que, $\alpha y \in \mathbb{B}^{n+1}$ y entonces $w \in q^{-1}\left(q\left(\mathbb{B}^{n+1}\right)\right)$. Y por tanto $q^{-1}\left(q\left(\mathbb{B}^{n+1}\right)\right)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y no contiene a 0, luego es abierto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Concluyendo que $q\left(\mathbb{B}^{n+1}\right)$ es abierto en $\mathbb{P}^n$. Recordemos también que sea un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ existe una colección $\{\mathbb{B}^{n+1}_x \mid x \in A\}$ tal que $A = \bigcup_{x \in A} \mathbb{B}^{n+1}$ y por tanto

$$q(A) = q\left(\bigcup_{x \in A} \mathbb{B}^{n+1}\right) = \bigcup_{x \in A} q\left(\mathbb{B}^{n+1}_x\right)$$

Concluyendo que como $q(\mathbb{B}^{n+1}_x)$ son abiertos y la unión arbitraria de abiertos es abierto, entonces $q(A)$ es abierto. Y *q es, en efecto, una aplicación abierta.*

Comprobación de que $\mathbb{P}^n$ es un espacio de Hausdorff

Alternativa i. Notemos que la siguiente relación de equivalencia, $\sim$, es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$:

$$\sim := \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mid x \text{ e } y \text{ son l.d.}\}$$

Para comprobar eso último usamos el criterio de sucesiones, esto es tomamos una sucesión cualquier, $(x_m, y_m)_{m=1}^{\infty}$, en $\sim$ tal que haya un (x, y) para el que converga, luego vemos que $x \sim y$. Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ hay un $\alpha_m \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\frac{x_m}{\|x_m\|} + \alpha_m \frac{y_m}{\|y_m\|} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_m = -\frac{\|x_m\|\|y_m\|}{\langle x_m, y_m\rangle}$$

Con esto, $\operatorname{lím}_m \alpha_m \langle x_m, y_m\rangle = -\operatorname{lím}_m \|x_m\|\|y_m\| = -\|x\|\|y\|$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$. Entonces $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge y si $\alpha := \operatorname{lím}_m \alpha_m$ tenemos que

$$\frac{x}{\|x\|} + \alpha \frac{y}{\|y\|} = \operatorname*{lím}_m \left(\frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{\|x_m\|\|y_m\|}{\langle x_m, y_m\rangle} \frac{y_m}{\|y_m\|} \right) = \operatorname*{lím}_m 0 = 0$$

Por lo que, $x \sim y$ como se deseaba. Dado que $\sim$ es cerrado, la aplicación cociente $q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ es abierta y $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es de Hausdorff. Entonces *el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es de Hausdorff.*

Alternativa ii. Tomemos $\hat{x} = \langle \{x\} \rangle$ e $\hat{y} = \langle \{y\} \rangle\}$ en $\mathbb{P}^n$. Por tanto, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Definimos $\tilde{x} := x/\|x\|$ e $\tilde{y} := y/\|y\|$ que son puntos que están en $\mathbb{S}^n$. $\mathbb{S}^n$ es un subespacio métrico y entonces existen $B_{-\tilde{x}}$, $B_{\tilde{x}}$ y $B_{\tilde{y}}$ bolas en $\mathbb{S}^n$ centradas en $-\tilde{x}$, $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ tales que $B_{-\tilde{x}} \cap B_{\tilde{y}} = \emptyset$ y $B_{\tilde{x}} \cap B_{\tilde{y}} = \emptyset$. Es claro que $-B_{\tilde{x}}$ es una bola centrada en $-\tilde{x}$. Por tanto, $-B_{\tilde{x}} \cap B_{-\tilde{x}} \subseteq B_{-\tilde{x}}$ es un subconjunto no vacío. De manera similar $-B_{-\tilde{x}}$ es una bola centrada en $\tilde{x}$. Por tanto, $-B_{-\tilde{x}} \cap B_{\tilde{x}} \subseteq B_{\tilde{x}}$ es un subconjunto no vacío. Si tomamos

$$V := (-B_{\tilde{x}} \cap B_{-\tilde{x}}) \cup (B_{\tilde{x}} \cap -B_{-\tilde{x}}) .$$

y $W = B_{\tilde{y}} \cup -B_{\tilde{y}}$ entonces $V \cap W \subseteq (B_{\tilde{x}} \cap W) \cup (B_{-\tilde{x}} \cap W) = \emptyset$. Por otro lado, es claro que $W = -W$ y $V = -V$.

Por otro lado, si asumimos existen $w \in W$ y $v \in V$ tales que $q(w) = q(v)$. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $w = \alpha \cdot v$, pero como ambos están en $\mathbb{S}^n$ $\alpha \in \{-1, 1\}$ y concluimos que $w = v$ o $w = -v$. Recordemos que $W \cap V = \emptyset$ por lo que $w \neq v$. Pero $V = -V$ entonces $w \neq -v$. Como esto es absurdo entonces para todo $w \in W$ y todo $v \in V$ se tiene que $q(w) \neq q(v)$. Entonces $q(W) \cap q(V) = \emptyset$. Además, $\hat{x} \in q(W)$ y $\hat{y} \in q(V)$.

Es claro que $\hat{x} \in q(W)$ que es un abierto y $\hat{y} \in q(V)$ otro abierto. Por tanto, hay una vecindad de $\hat{x}$ y otra de $\hat{y}$ disjuntas, concluyendo que *el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es de Hausdorff.*

Para terminar de ver que $\mathbb{P}^n$ es localmente euclídeo necesitamos nuevamente de cartas locales. Para construir estas primero tomemos $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^{n+1}$ como la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Y sea $0 < j \leq n+1$ definimos $E_j := \langle \{\mathbf{e}_j \mid 0 < j \leq n+1 \text{ y } j \neq i\} \rangle$ y $H_j := \mathbf{e}_1 + F_j$. ($H_j$ es el hiperplano paralelo a E_i y que pasa por $\mathbf{e}_i$) Es claro que las rectas de $\mathbb{P}^n$ que vivan en E_j no cortarán a H_j, aquellas no son de interés. Para aquellas que si corten, usaremos los puntos de corte para poner en correspondencia los elementos del espacio proyectivo con $\mathbb{R}^n$ pues el hiperplano en $\mathbb{R}^{n+1}$ es básicamente $\mathbb{R}$. Así, nos interesa todas las rectas que estén en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus E_j$. Es decir, requerimos del conjunto $P_j := q(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E_j)$ que es abierto en $\mathbb{P}^n$. P_j es abierto porque el subespacio vectorial de dimensión finita E_j es cerrado en $\mathbb{R}^{n+1}$, luego $\mathbb{R}^{n+1} \setminus E_j$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y también en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Como q es una aplicación abierto se concluye la afirmación.

Ahora bien, si tomamos $\hat{x} \in P_j$ entonces para cualquier representante $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se cumple que $x^i \neq 0$; esto porque existe algún $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus E_j$. Para encontrar el punto en que $\hat{x}$ corta a H_j entonces se debe encontrar un β tal que $\beta x \in H_j$. Si esto ocurre entonces $\beta x^i = 1$ y por tanto $\beta = \frac{1}{x^i}$. Entonces es claro, que la función que buscamos es

$$\begin{aligned}\pi_j:\ P_j &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ \langle\{x\}\rangle &\longmapsto \left(\frac{x^1}{x^j},\cdots,\frac{x^{j-1}}{x^j},\frac{x^{j+1}}{x^j},\cdots,\frac{x^n}{x^j}\right)\end{aligned}$$

Para la inversa el proceso es: tomar un elemento cualquiera en el hiperplano y traza la recta que lo une con el centro 0. Esto es

$$\begin{aligned}\gamma_j:\mathbb{R}^n &\longrightarrow P_j\\ x &\longmapsto \left\langle(x^1,\cdots,x^{j-1},1,x^j,\cdots,x^n)\right\rangle.\end{aligned}$$

Para ver que π_j es continua tomemos un abierto U en $\mathbb{R}^n$ y comprobemos que $\pi_j^{-1}(U)$ es abierto en P_j; esto es comprobar que $\pi_j^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{P}^n$ y que está contenido en P_j. Por la forma de la topología cociente basta con probar que $q^{-1}(\pi_j^{-1}(U))$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$. Definamos la función

$$\begin{aligned}\gamma:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\langle\{\mathbf{e}_j\}\rangle &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ x &\longmapsto \left(\frac{x^1}{x^j},\cdots,\frac{x^{j-1}}{x^j},\frac{x^{j+1}}{x^j},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^j}\right)\end{aligned}$$

Es claro que γ es continua (cada componente es continua por ser división de funciones continuas y el denominador nunca es 0), luego $\gamma^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\langle\{\mathbf{e}_j\}\rangle$. Sin embargo, este último es abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ pues $\langle\{\mathbf{e}_j\}\rangle$ es cerrado; y por tanto $\gamma^{-1}(U)\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\setminus\langle\{\mathbf{e}ji\}\rangle\subseteq\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ es un abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$. Notar que

$$\begin{aligned}x\in\gamma^{-1}(U) &\iff \gamma(x)\in U,\\ &\iff \left(\frac{x^1}{x^j},\cdots,\frac{x^{j-1}}{x^j},\frac{x^{j+1}}{x^j},\cdots,\frac{x^n}{x^j}\right)\in U,\\ &\iff \pi_i(q(x))\in U,\end{aligned}$$

Concluyendo que $q^{-1}\left(\pi_j^{-1}(U)\right)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ y entonces $\pi_j^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{P}^n$. Recordemos que $\pi_j:P_j\to\mathbb{R}^n$ entonces $\pi_j^{-1}(U)\subseteq P_j$. Por tanto $\pi_j^{-1}(U)$ es abierto en P_j que como U fue escogido arbitrariamente implica que π_j es continua.

Si ahora, queremos ver que γ_j es abierta entonces tomemos $U\subseteq P_j$ abierto y comprobemos que $\gamma_j^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Como $q^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $q^{-1}(U)\subseteq P_j$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\\ x &\longmapsto \left(x^1,\cdots,x^{i-1},1,x^i,\cdots,x^n\right)\end{aligned}$$

Es claro que λ es continua (sus componentes son claramente continuas). Luego $\lambda^{-1}\left(q^{-1}(U)\right)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Además,

$$\begin{aligned}x\in\lambda^{-1}\left(q^{-1}(U)\right) &\iff q(\lambda(x))\in U,\\ &\iff \left\langle\left\{\left(x^j,\cdots,x^{j-1},1,x^j,\cdots,x^n\right)\right\}\right\rangle\in U,\\ &\iff \gamma_j(x)\in U,\end{aligned}$$

Entonces $\gamma_j^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Por la arbitrariedad de U, γ_j es continua. Entonces (P_j,π_j) es una carta local de $\mathbb{P}^n$. Más aún, las cartas locales $(P_j,\pi_j)_{i=1}^{n+1}$ cumplen que hay una alrededor de cualquier punto de $\mathbb{P}^n$. Como también es de Hausdorff, $\mathbb{P}^n$ *es un espacio localmente euclídeo de dimensión* n.

Comprobemos que $\mathbb{P}^n$ es II-numerable. Para ello, notar que $\mathbb{P}^n=\bigcup_{j=1}^{n+1}P_j$ y además P_j es homeomorfo con $\mathbb{R}^n$. Primero justificaremos que cada P_j es segundo contable. Veamos que existe una base contable para la topología de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$. De allí se puede construir $\hat{\mathcal{B}}_j := \{\pi_j(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ que es una base contable para P_j. Notar que todos sus elementos son abiertos en $\mathbb{P}^n$ luego en P_j, además $\hat{\mathcal{B}}_j$ cubre a P_j, pues

$$P_j = \pi_j(\mathbb{R}^n) = \pi_j\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\right) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \pi_j(B).$$

Y por último sea B un abierto en P_j entonces

$$B = \pi_j\left(\pi_j^{-1}(B)\right) = \pi_j\left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\right) = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \pi_j(G).$$

Como $\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=1}^{n+1} P_j$ y cada uno es II-numerable, entonces $\mathbb{P}^n$ *es II-numerable.*

Siguiendo la definición 2.2, $\mathbb{P}^n$ *es una n-variedad topológica.*

2.1.2. Variedades diferenciales

Definición 2.3 (Atlas Diferencial)**.** Una *atlas diferenciable para un espacio localmente euclídeo de dimensión n* es una colección de cartas locales de X, $\mathscr{F}$, que cumple:

(1) $\mathscr{F}$ *cubre a* X; es decir que, $\displaystyle\bigcup_{(V,\varphi)\in\mathscr{F}} V = X$.

(2) Todas las *cartas locales son diferenciablemente compatibles*; esto es que para cualesquiera $(V,\varphi),(W,\psi)\in\mathscr{F}$ la correspondiente función de transición es de clase C^∞.

Observación. Es pertinente remarcar que dentro de los espacios localmente euclídeos, aquellos a los que se puede dar un atlas diferenciable tienen una propiedad aún más importante. Sobre los *espacios localmente euclídeos de dimensión n* sabemos que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, no sabemos nada sobre sí: ¿Existe algún punto y alguna vecindad que sea homeomorfa a $\mathbb{R}^m$ con $m \neq n$? La respuesta es el llamado *teorema de Invarianza de Brouwer.*

Una pregunta similar es: ¿Puede un atlas diferenciable tener cartas locales (U,φ) donde φ es un homeomorfismo con algún abierto de $\mathbb{R}^m$ con $m \neq n$? La respuesta aquí es muy clara. Asumamos que la respuesta es afirmativa. Entonces podemos tomar cualquier otra carta local (V,ψ) donde ψ es un homeomorfismo con algún abierto de $\mathbb{R}^n$. La definición 2.3 es clara, y se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \psi\circ\varphi^{-1} &: \varphi(U)\to\mathbb{R}^n \qquad \text{es una función de clase } C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R}^n).\\ \varphi\circ\psi^{-1} &: \psi(V)\to\mathbb{R}^m \qquad \text{es una función de clase } C^\infty(\psi(v);\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Como $\varphi\circ\psi^{-1}$ es la inversa de $\psi\circ\varphi^{-1}$ entonces de la sección A.1, $D(\varphi\circ\psi^{-1})(a)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ es isomorfismo para cualquier $a\in\varphi(U)$. Esto es imposible, y por tanto, la respuesta es negativa.

Definición 2.4 (Variedad Diferencial)**.** Una *n-variedad diferencial, $(M,\mathscr{F})$,* es un par ordenado donde M es un espacio localmente euclídeo de dimensión n que es II-numerable, y $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial maximal en el poset de todos los atlas diferenciales para M.

Para $(M,\mathscr{F})$, la dimensión $\dim(M,\mathscr{F}) := n$.

Observación. Es condición necesaria y suficiente para que $\mathscr{F}$, *un atlas diferencial para* M*, sea maximal* el siguiente enunciado: (V, φ) es diferenciablemente compatible con todas las cartas locales en $\mathscr{F}$ y todas cartas locales en $\mathscr{F}$ son diferenciablemente compatibles con (V, φ) implica que $(V, \varphi) \in \mathscr{F}$.

La siguiente proposición aparece comúnmente en la construcción de variedad diferenciales:

Proposición 2.5. *Sea X un espacio localmente euclídeo de dimensión n se cumple que:*

(i) Si $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial para X entonces existe un atlas diferencial máximal $\mathscr{F}^*$ tal que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}^*$.

(ii) Es condición necesaria y suficiente para que $\{\mathscr{F}, \mathscr{G}\}$ esté acotado superiormente en el poset de atlas diferenciales para X, el siguiente enunciado: $\mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ es un atlas diferencial para X.

Demostración. [Parte (i)] Para ver que $\mathscr{F}$ está contenido dentro un atlas diferencial maximal basta probar que la unión de todos los atlas diferenciales que contienen a $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial para X. Por eso definimos

$$\mathscr{F}^* = \bigcup \{\mathscr{G} \mid \mathscr{G} \text{ es } \textit{atlas diferencial para } X \text{ y } \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}\}$$

Para probar que la colección de cartas locales para X, $\mathscr{F}^*$, es un atlas diferencial empecemos por ver lo cubre. Dado que $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial y $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}^*$, entonces

$$\bigcup_{(V,\varphi)\in\mathscr{F}^*} V \subseteq X = \bigcup_{(V,\varphi)\in\mathscr{F}} V \subseteq \bigcup_{(V,\varphi)\in\mathscr{F}^*} V$$

Falta ver que todas sus cartas locales de $\mathscr{F}^*$ son diferenciablemente compatibles. Para esta tarea escogemos $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathscr{F}^*$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, y debemos ver que la función de transición es $\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ sea de clase C^∞ en el sentido de la definición A.5. Primero mostraremos que $\varphi \circ \psi^{-1}$ es localmente C^∞ y por el teorema A.16 entonces $\varphi \circ \psi^{-1}$ es de clase C^∞.

Para comprobar que $\varphi \circ \psi^{-1}$ es localmente C^∞ notemos que por la definición de $\mathscr{F}^*$ entonces existen atlas diferenciales $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ que contienen a $\mathscr{F}$ tales que $(U, \varphi) \in \mathscr{G}$ y $(V, \psi) \in \mathscr{H}$. Así, si escogemos un $y \in \psi(U \cap V)$ arbitrario; luego, existe un $x \in U \cap V \subseteq E$ tal que $y = \varphi(x)$. Dado que $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial para X, existe una carta local $(W, \theta) \in \mathscr{F}$ tal que $x \in W$. Claramente, $(W, \theta) \in \mathscr{G}$ y por tanto, la función de transición $\varphi \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap W) \to \varphi(U \cap W)$ es de clase C^∞. Por otro lado, $(W, \theta) \in \mathscr{H}$ y entonces $\theta \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \theta(V \cap W)$ es de clase C^∞.

Veamos que $U^* := U \cap V \cap W$ es una vecindad abierta de x. Así, $\varphi(U^*)$, $\theta(U^*)$ y $\psi(U^*)$ son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ porque φ, θ, ψ son homeomorfismos. De esto tenemos dos consecuencias, la primera es que $\psi(U^*)$ es una vecindad abierta de y contenida en $\psi(U \cap V)$. La otra consecuencia es que el siguiente diagrama conmuta y todas sus funciones son de clase C^∞, o bien por ser restricciones son de clase C^∞ o por ser composiciones (tener en mente el teorema A.12):

$$\begin{tikzcd}
\psi(U^*) \arrow[r, "\theta\circ\psi^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi\circ\theta^{-1}\circ\theta\circ\psi^{-1}=\varphi\circ\psi^{-1}"'] & \theta(U^*) \arrow[d, "\varphi\circ\theta^{-1}"] \\
& \varphi(U^*)
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una vecindad de y, $\varphi(U^*)$, tal que $\varphi\circ\psi^{-1}|_{\varphi(U^*)}\in C^{\infty}$. Como y fue arbitrariamente escogida de $\psi(U\cap V)$, $\varphi\circ\psi^{-1}$ es localmente de clase C^{∞}, como se buscaba. Por todo esto, $\mathscr{F}^*$ es un atlas diferencial, más aún, es máximal.

[Parte(ii)] Asumamos $\mathscr{H}$ es supremo de $\{\mathscr{F},\mathscr{G}\}$y mostremos que $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ es un atlas diferencial. $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ cubre a X trivialmente. Además todas las cartas locales de $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ son diferenciablemente compatibles. Pues si (V,φ), (W,ψ) son cartas locales en $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$, aunque no estén los dos en $\mathscr{F}$ o $\mathscr{G}$, están en $\mathscr{H}$ y por tanto diferenciablemente compatibles.

Para la condición suficiente basta ver que $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ es cota superior de $\{\mathscr{F},\mathscr{G}\}$. Y si tomamos $\mathscr{H}$ otra cota superior entonces, $\mathscr{F},\mathscr{G}\subseteq\mathscr{H}$. Esto implica que $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}\subseteq\mathscr{H}$ indicando que la unión es de hecho el supremo.

□

Como construcción usual en topología está la topología heredada de un espacio topológico a un subconjunto arbitrario. Aquí, mostraremos el concepto relativo pero a variedades diferenciales y solo para subconjuntos abiertos.

Lema 2.6 (Sub-variedad Abierta)**.** *Sea $(M,\mathscr{F})$ una n-variedad diferencial. Para cualquier $V\subseteq M$ abierto, la siguiente colección de cartas locales para V, $\mathscr{F}_V$, hacen a $(V,\mathscr{F}_V)$ una n-variedad diferencial.*

$$\mathscr{F}_V := \{(W\cap V, \psi|_{W\cap V}) \mid (W,\psi)\in\mathscr{F} \text{ y } W\cap V\neq\emptyset\},$$

A $\mathscr{F}_V$ se le conoce como la estructura diferencial heredada de la variedad diferencial $(M,\mathscr{F})$

Demostración. Por el lema 2.1 ya sabemos que V *es una variedad topológica dimensión n.* También conocemos que $\mathscr{F}_V$ es una colección de cartas locales para M que cubren a M; pues,

$$V = V\cap\bigcup_{(W,\psi)\in\mathscr{F}} W = \bigcup_{(W,\psi)\in\mathscr{F}} V\cap W = \bigcup_{\left(W\cap V,\,\psi|_{W\cap V}\right)\in\mathscr{F}_V} V\cap W.$$

Ahora, mostremos que las cartas locales de $\mathscr{F}_V$ son diferenciablemente compatibles entre sí. Si tomamos $(W\cap V, \psi|_{W\cap V})$ y $(U\cap V, \gamma|_{U\cap V})$ dos cartas en $\mathscr{F}_V$ tales que $(W\cap V)\cap(U\cap V)\neq\emptyset$ entonces $W\cap U\neq\emptyset$ y la función de transición entre (W,ψ) y (U,γ), $\psi\circ\gamma^{-1}$, es de clase C^{∞}. La función de transición entre $(W\cap V, \psi|_{W\cap V})$ y $(U\cap V, \gamma|_{U\cap V})$ es la restricción de $\psi\circ\gamma^{-1}$ al abierto $W\cap V\cap U$, luego la función de transición es de clase C^{∞}. Por tanto, $\mathscr{F}_V$ *es un atlas diferencial para V.*

Por último, probemos que $\mathscr{F}_V$ *es maximal.* Si (U,φ) es una carta local de V diferenciablemente compatible con $\mathscr{F}_V$ se cumple que es una carta local de M compatible con $\mathscr{F}$. Esto último se ve del hecho que (U,φ) es una carta local para M porque V es un abierto de M. Y de que para cualquier $(W, \psi) \in \mathscr{F}$ tal que $W \cap U \neq \emptyset$ se tiene que (U, φ) y (W, ψ) son diferenciablemente compatibles. En efecto, son diferenciablemente compatibles porque $(W \cap V, \varphi|_{W \cap V}) \in \mathscr{F}_V$ y como (U, φ) es diferenciablemente compatible con $(W \cap V, \varphi|_{W \cap V}) \in \mathscr{F}_V$ entonces la función de transición $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi((W \cap V) \cap U) \to \varphi((W \cap V) \cap U)$ es de clase C^∞. Esta última no es más que la función de transición entre (U, φ) y (W, ψ).

Dado que $\mathscr{F}$ es un atlas maximal para M y que (U, φ) es una carta local para M diferenciablemente compatible $\mathscr{F}$ entonces $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$. Pero $(U, \varphi) = (U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$, luego $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_V$.

□

Observación. Cualquier carta local de $\mathscr{F}_V$ es una carta local en $\mathscr{F}$. Si $(W \cap V, \psi|_{W \cap V}) \in \mathscr{F}_V$ entonces $(W, \psi) \in \mathscr{F}$ y claro, si $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ tal que $U \cap (W \cap V) \neq \emptyset$ entonces las funciones de transición entre $(W \cap V, \psi|_{W \cap V})$ y (U, φ) son

$$\begin{aligned}
(\psi|_{W \cap V}) \circ \varphi^{-1} &: \varphi\left(U \cap (W \cap V)\right) \longrightarrow \psi|_{W \cap V}\left(U \cap (W \cap V)\right), \\
\varphi \circ (\psi|_{W \cap V})^{-1} &: \psi|_{W \cap V}\left(U \cap (W \cap V)\right) \longrightarrow \varphi\left(U \cap (W \cap V)\right).
\end{aligned}$$

Estas funciones son de clase C^∞. Por un lado, se tiene $(\psi|_{W \cap V}) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1})|_{U \cap (W \cap V)}$ y $\varphi \circ (\psi|_{W \cap V})^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})|_{U \cap (W \cap V)}$. Y por otro lado se tiene que $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ son de clase C^∞ por la definición 2.3. Entonces por la arbitrariedad de $(U, \varphi) \in \mathscr{F}$ se tiene que $(W \cap V, \psi|_{W \cap V})$ es diferenciablemente compatible con todas las cartas locales de $\mathscr{F}$ y al revés. Dado que $\mathscr{F}$ es un atlas diferencial máximal entonces $(W \cap V, \psi|_{W \cap V}) \in \mathscr{F}_V$.

Proposición 2.7. *Sea $(M, \mathscr{F})$ una n-variedad diferencial, V y W dos abiertos de M. Si $W \subseteq V$ entonces la estructura diferencial para W heredada de la n-variedad diferencial $(M, \mathscr{F})$ es la misma que heredaría de la n-variedad diferencial $(V, \mathscr{F}_V)$.*

Demostración. Tomemos W un abierto cualquiera de V entonces W es abierto en M. Llamamos $\mathscr{H}$ a la estructura diferencial de W heredado por V y $\mathscr{G}$ a la estructura diferencial de W heredado por M. Recordemos que por el lema 2.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{H} &= \{(Z \cap W, \psi|_{Z \cap W}) \mid (Z, \psi) \in \mathscr{F}_V \text{ y } Z \cap W \neq \emptyset\}, \\
\mathscr{G} &= \{(Z \cap W, \psi|_{Z \cap W}) \mid (Z, \psi) \in \mathscr{F}_M \text{ y } Z \cap W \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

Ver que si $(Z \cap W, \varphi|_{Z \cap W}) \in \mathscr{H}$ con $(Z, \varphi) \in \mathscr{F}_V \subseteq \mathscr{F}_M$. entonces $(Z \cap W, \varphi|_{Z \cap W}) \in \mathscr{G}$. En cambio, si $(Z \cap W, \varphi|_{Z \cap W}) \in \mathscr{G}$ con $(Z, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ entonces $(Z \cap W, \varphi|_{Z \cap W}) \in \mathscr{F}_M$. Dado que $Z \cap W \subseteq V$ entonces por el lema 2.6 se tiene que $(Z \cap W, \varphi|_{Z \cap W}) \in \mathscr{F}_V$. De ello es claro que esta carta local está en $\mathscr{H}$. Con ello, se tiene que $\mathscr{H} = \mathscr{G}$.

□

Para terminar esta sección veremos unos pocos ejemplos sobre objetos que resultan en variedades diferenciales.

Ejemplo 2.8. (Espacio normado real V finito-dimensional) Del ejemplo 2.2 tenemos que V es una n-variedad topológica con una carta local (V, I) que cubre a todo V. (V, I) es diferenciablemente compatible consigo misma, pues la función de transición $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, como se ve en los ejemplos A.10. Con esto $\{(V, I)\}$ es un atlas diferencial para V y por la proposición 2.5 sabemos que existe un atlas diferencial maximal, $\mathscr{I}$, que contiene a $\{(V, I)\}$. Finalmente, $(V, \mathscr{I})$ *es una n-variedad diferencial.*

Cartas locales de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{I})$: Para todo V abierto de $\mathbb{R}^n$, $(\Omega, f) \in \mathscr{I}_V$ *si y solo si* $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $\Omega \subseteq V$ un abierto

Si nos centramos en la variedad diferencial $(\mathbb{R}^n, \mathscr{I})$ con las bases canónicas. Veamos que *si* $(U, \varphi) \in \mathscr{I}$ *entonces* $\varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U); \mathbb{R}^n)$ *y* $\varphi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$. Esto porque φ y φ^{-1} son las funciones de transiciones entre (U, φ) y (U, Id_U).
Esto nos hace ver otra propiedad interesante. Esta es: $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *si y solo si* $(\Omega, f) \in \mathscr{I}$.
Lo último por ver es que si $(W, \gamma) \in \mathscr{I}$ y $W \cap \Omega \neq \emptyset$ entonces

$$f \in C^\infty(\Omega \cap W; \mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \gamma^{-1} \in C^\infty(\gamma(\Omega \cap W); \mathbb{R}^n)$$

Luego, por el teorema A.12 sobre composición tenemos que $f \circ \varphi^{-1} : \gamma(\Omega \cap W) \to \mathbb{R}^n$ es de clase $C^\infty(\gamma(\Omega \cap W); R^n)$. Por tanto, (Ω, f) es diferenciablemente compatible con todas las cartas locales de $\mathscr{I}$, pero $\mathscr{I}$ es máximal. Así, si $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ entonces $(\Omega, f) \in \mathscr{I}$.

Ejemplo 2.9. (La n-esfera $\mathbb{S}^n$) Usando el ejemplo 2.3 tenemos que $\mathbb{S}^n$ es una n-variedad topológica. Además encontramos una colección de cartas locales que cubren $\mathbb{S}^n$. Esta es $\mathscr{P} := \{(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \pi_+), \ (\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \pi_-)\}$ con

$$\begin{aligned} \pi_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{P^+\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x^{i+1}}{1-x^1}\right)_{i=1}^n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_- : \mathbb{S}^n \setminus \{P^-\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \left(\frac{x^{i+1}}{1+x^1}\right)_{i=1}^n \end{aligned}$$

y sus inversas, respectivamente,

$$\begin{aligned} \gamma_+ : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{P^+\} \\ y &\longmapsto \left(\tfrac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}, \tfrac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \cdots, \tfrac{2y^n}{1+\|y\|^2}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma_- : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{P^-\} \\ y &\longmapsto \left(\tfrac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}, \tfrac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \cdots, \tfrac{2y^n}{1+\|y\|^2}\right) \end{aligned}$$

Descartando los casos triviales, comprobemos que $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \pi_+)$ y $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \pi_-)$ son diferenciablemente compatible y viceversa.

Notar que la función de transición es $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1} : \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \to \pi_+(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \subseteq \mathbb{R}^n$ y que para cada $y \in \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que $y \neq 0$ pues $\pi_-(0) = P^-$ y π_- es inyectiva. Además,

$$\begin{aligned} \pi_+ \circ (\pi_-)^{-1}(y) &= \pi_+ \left((\pi_-)^{-1}(y)\right), \\ &= \pi_+ \left(\frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}, \frac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \cdots, \frac{2y^n}{1+\|y\|^2}\right), \\ &= \left(\frac{1+\|y\|^2}{2\|y\|^2} \cdot \frac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \cdots, \frac{1+\|y\|^2}{2\|y\|^2} \cdot \frac{2y^n}{1+\|y\|^2}\right), \\ &= \frac{y}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1} : \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \to \pi_+(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\})$ esta definida por $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1}(y) := y/\|y\|$ para todo $y \in \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\})$ que es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y no incluye a 0. Como se vio en los ejemplos A.10 se trata de una función de clase C^∞ pues es la división de dos funciones de clase C^∞ y el denominador no es cero.

La función de transición faltante es $\pi_- \circ (\pi_+)^{-1} : \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \to \pi_+(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\})$. Notar que para cada $y \in \pi_+(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\})$ se tiene que $y \neq 0$ pues $\pi_-(0) = P^-$ y π_- es inyectiva. Además,

$$\begin{aligned} \pi_- \circ (\pi_+)^{-1}(y) &= \pi_- \left((\pi_+)^{-1}(y)\right), \\ &= \pi_- \left(\frac{\|y\|^2-1}{1+\|y\|^2}, \frac{2y^1}{1+\|y\|^2}, \cdots, \frac{2y^n}{1+\|y\|^2}\right), \\ &= \frac{y}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1} : \pi_-(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}) \to \pi_+(\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\})$ es una función de clase C^∞.

Finalmente de la definición 2.3 se tiene que $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \pi_+)$ y $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \pi_-)$ son diferenciablemente compatible. Luego, $\mathscr{P}$ es un atlas diferencial y por la proposición 2.5 existe un atlas diferencial maximal, $\mathscr{S}$, que contiene a $\mathscr{P}$. Así, $(\mathbb{S}^n, \mathscr{S})$ *es una n-variedad diferencial.*

Ejemplo 2.10. (Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$) Del ejemplo 2.3 tenemos que $\mathbb{P}^n$ es una n-variedad topológica. Además encontramos una colección de cartas locales para $\mathbb{P}^n$, estas son

$$\mathscr{P} := \{(P_j, \pi_j) \mid 0 < j \leq n+1\}.$$

Se sabe que $\mathscr{P}$ cubre a $\mathbb{P}^n$. Queremos ver que $\mathscr{P}$ es un atlas diferencial para $\mathbb{P}^n$. Lo último por hacer es ver que todas las cartas locales de $\mathscr{P}$ son diferenciablemente compatibles.

Sin tomar los casos triviales, debemos comprobar que para cualquier $0 < i, j \leq n+1$ tales que $i \neq j$, (P_i, π_i) y (P_j, π_j) son diferenciablemente compatibles. Para ello, primero veamos que como q es sobreyectiva entonces

$$\begin{aligned} q\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (E_i \cup E_j)\right) &\subseteq q\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E_i\right) \cap q\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus E_j\right), \\ &= P_i \cap P_j. \end{aligned}$$

Claramente, $(\delta_{ik})_{k=1}^{n+1} + (\delta_{jk})_{k=1}^{n+1} \notin E_i \cup E_j$ y por tanto, $P_i \cap P_j \neq \emptyset$. Luego, la función de transición es $\pi_i \circ (\pi_j)^{-1} : \pi_j(P_i \cap P_j) \to \pi_i(P_i \cap P_j)$. Notar que para cada $y \in \pi_j(P_i \cap P_j)$ se tiene que $y \in \mathbb{R}^n$ y

$$\begin{aligned} \pi_i \circ (\pi_j)^{-1}(y) &= \pi_i\left((pi_j)^{-1}(y)\right), \\ &= \pi_i\left(\langle y^1, \cdots, y^{j-1}, 1, y^{i+1}, \cdots, y^n\rangle\right), \\ &= \left(\frac{y^1}{y^i}, \cdots, \frac{y^{j-1}}{y^i}, \frac{1}{y^i}, \frac{y^{i+1}}{y^i}, \cdots, \frac{y^n}{y^i}\rangle\right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $\pi_i \circ (\pi_j)^{-1} : \pi_j(P_i \cap P_j) \to \pi_i(P_i \cap P_j)$ esta definida sobre $\pi_j(P_i \cap P_j)$ que es un abierto de $\mathbb{R}^n$ por que π_j es un homeomorfismo y $P_i \cap P_j$ es abierto en $\mathbb{P}^n$. Como se vio en los ejemplos A.10 se trata de una función de clase C^∞ pues es la composición de divisiones de dos funciones de clase C^∞ con denominador distinto de cero. Por tanto, (P_i, π_i) y (P_j, π_j) son diferenciablemente compatible.

Dada la arbitrariedad de i y j, podemos concluir que todas las cartas locales de $\mathscr{P}$ son diferenciablemente compatibles, luego, $\mathscr{P}$ es un atlas diferencial para $\mathbb{P}^n$. Por la proposición 2.5 existe un atlas diferencial maximal, $\mathscr{R}$, que contiene a $\mathscr{P}$. Así, $(\mathbb{P}^n, \mathscr{R})$ *es una n-variedad diferencial.*

Observación. Hasta ahora hemos usado la proposición 2.5 (i) y (ii). Pero es interesante ver que podemos encontrar para un mismo espacio localmente euclídeo diferentes atlas maximales y por tanto distintas variedades diferenciales. Un primer ejemplo sobre esto es $\mathbb{R}$ que por el ejemplo 2.2 sabemos tiene asociado un atlas diferencial máximal que contiene al atlas diferencial $\{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})\}$. Otro atlas diferencial para $\mathbb{R}$ es $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ donde $\varphi(x) := x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero no existe una misma variedad diferencial que contenga a ambos atlas.

En efecto, $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$ es un atlas diferencial para $\mathbb{R}$ pues, $(\mathbb{R}, \varphi)$ es una carta local que cubre $\mathbb{R}$. Y por otro lado, $(\mathbb{R}, \mathrm{Id}_\mathbb{R})$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$ no son diferenciablemente compatibles; pues la función de transición es $\mathrm{Id}_\mathbb{R} \circ \varphi^{-1}(x) := \sqrt[3]{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que no es de clase C^∞. Así, ambas cartas no pueden estar en un mismo atlas y comprobamos lo que dijimos.

Por último un análogo a las topologías final e inicial en topología clásica, pero ahora aplicado al contexto de variedades diferenciales.

Lema 2.11 (Construcción de Variedades). *Sea $M \neq \emptyset$ y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \, \alpha \in \Lambda\}$ una colección tal que $U_\alpha \subseteq M$ y $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widetilde{U}_\alpha$ una biyección para todo $\alpha \in \Lambda$ donde $\tilde{U}_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$ es una* *abierto de $\mathbb{R}^n$. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto. Además, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta); \mathbb{R}^n)$,

(ii) Para cualquier $x \neq y$ en M, existen un $\alpha \in \Lambda$ tal que $x, y \in U_\alpha$, o existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $x \in U_\alpha$ e $y \in U_\beta$ donde $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$.

(iii) Existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Λ tal que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}$.

Existe una topología para M y un atlas diferencial máximal $\mathscr{C}$ que vuelve a $(M, \mathscr{C})$ en una n-variedad diferencial con $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\} \subseteq \mathscr{C}$ es un atlas diferencial.

Demostración. [Base para topología en M] La siguiente colección es una base para topología en M

$$\mathscr{B} := \left\{ \varphi_\alpha^{-1}(\tilde{V}) \,\middle|\, \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ es abierto y } \alpha \in \Lambda \right\}$$

En efecto, de la condición (iii) y por ser $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de biyecciones se tiene que

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subseteq M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}\left(\tilde{U}_{\alpha_n}\right) \subseteq \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$$

Por otro lado, dados $V, U \in \mathscr{B}$ no disjuntos entonces $\tilde{V}, \tilde{U}$ abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $\varphi_\alpha(V) = \tilde{V_\alpha}$ y $\varphi_\beta(W) = \tilde{W_\beta}$. Ver que $\tilde{W_\beta} \cap \tilde{V_\alpha}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ no vacío; por lo que,

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\tilde{W_\beta} \cap \tilde{V_\alpha}\right) \in \mathscr{B} \qquad \text{y} \qquad \varphi_\alpha^{-1}\left(\tilde{W_\beta} \cap \tilde{V_\alpha}\right) \subseteq U \cap V$$

Con esto comprobamos que $\mathscr{B}$ es una base para topología en M. Denominamos M a este espacio topológico.

[M es un espacio localmente euclídeo de dimensión n] M es un espacio de Hausdorff. De la condición (iii), sean $x \neq y$ en M, si existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que $x, y \in U_\alpha$ entonces como U_α es homeomorfo con $\tilde{U}_\alpha$ que es Hausdorff, U_α es de Hausdorff y existen V, W abierto de M contenidos en U_α tales que $x \in V$, $y \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Si no existe dicho α entonces hay $\beta, \zeta \in \Lambda$ tales que $x \in U_\alpha$, $y \in U_\beta$ y $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ donde U_α y U_β son abiertos de M. Comprobando así la hipótesis de Hausdorff para M. Como $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ es un recubrimiento para M entonces sea $x \in M$ cualquiera existe un U_α tal que $x \in U_\alpha$ que es homeomorfo con $\tilde{U}_\alpha$ que es abierto de $\mathbb{R}^n$.

Esta topología hace homeomorfismo a $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Claro que esto es con la topología inducida. Veamos esto último en detalle. Si tomamos un abierto $\tilde{V}$ de $\mathbb{R}^n$ entonces $\varphi_\alpha^{-1}(\tilde{V})$ es abierto de U_α y por ello φ_α es continua. Por otro lado, para comprobar que φ_α es una aplicación abierta basta con ver que para cualquier $V \in \mathscr{B}$ contenido en U_α se tenga que $\varphi_\alpha(V)$ sea abierto en $\mathbb{R}^n$. Esto se tiene porque existe un $\beta \in \Lambda$ y un $\tilde{V}$ abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi_\alpha(V) = \varphi_\alpha(\varphi_\beta^{-1}(\tilde{V})) = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(\tilde{V} \cap \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))$$

Por (i) se tiene que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Por eso, se tiene que $\varphi_\alpha(V)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$.

[M es un espacio II-numerable] Pero $\tilde{U}_\alpha$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es II-numerable. Por lo tanto, $\tilde{U}_\alpha$ es II-numerable. Como M está cubierto por una cantidad numerable de subespacios II-numerable entonces M es II-numerable.

Es claro que cada U_α es un espacio topológico II-numerable por ser homeomorfo con un abierto de $\mathbb{R}^n$ que se II-numerable. De la condición (iii) tenemos que M está cubierto por numerables abiertos II-numerables, entonces M es II-numerable.

[M admite un atlas diferencial máximal] En M, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\ \alpha \in \Lambda\}$ son cartas locales como ya lo vimos. De la condición (iii) sabemos que cubren a M y de la condición (i) que son todas diferenciablemente compatibles. Por ello, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\ \alpha \in \Lambda\}$ es un atlas diferencial para M, usando la proposición 2.5 existe $\mathscr{F}$ un atlas diferencial máximal que hace que $(M, \mathscr{F})$ sea una n-variedad diferencial.

□

Ejemplo 2.12. (Variedad grassmaniana $Gr(k,V)$) Sea V un espacio vectorial real de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k < n$ denominamos

$$Gr(k,V) := \{W|\ W \text{ es un subespacio vectorial de } V \text{ y } \dim W = k\}$$

Para cada Q subespacio vectorial de V con $\operatorname{codim} Q = k$ definimos $\mathcal{U}_Q := \{P \in Gr(k,V)|\ V = P \oplus Q\}$ tomamos un $P \in \mathcal{U}_Q$ y definimos la función

$$\begin{aligned} \psi : \mathscr{L}(P,Q) &\longrightarrow \mathcal{U}_Q \\ f &\longmapsto \operatorname{Img}(f + \mathrm{id}_P). \end{aligned}$$

Empecemos por ver que ψ es una biyección. Para ello, primero veamos que esté bien definida. Tomemos un $f \in \mathscr{L}(P,Q)$ y veamos que $\psi(f) \in \mathcal{U}_Q$. Es decir, debemos comprobar que

$$V = \psi(f) \oplus Q \tag{2.1}$$

Si por la vía de la contradicción, asumimos que hay un $x \in \psi(f) \cap Q$ entonces existe un $y \in P$ para el que $x = f(y) + y$. Pero $f \in \mathscr{L}(P,Q)$ y entonces, $y = x - f(x) \in Q$ porque $x \in Q$ que es un espacio vectorial. Sin embargo, lo último es un absurdo pues como $P \in \mathcal{U}_Q$ entonces $P \cap Q = \emptyset$. Luego, se concluye que $\psi(f) \cap Q = \emptyset$. Por otro lado, para cualquier $x \in V$, existen un $p \in P$ y $q \in Q$ tales que $x = p + q$ porque $V = P \oplus Q$. Pero $x = (p + f(p)) + (q - f(p))$ donde claramente se tiene que $p + f(p) \in \operatorname{Img}(f + \mathrm{id}_P) = \psi(f)$ y $q - f(p) \in Q$. Entonces $x \in \psi(f) + Q$. Dada la arbitrariedad de x en V se concluye (2.1) verdadera y ψ está bien definida.

ψ es una función biyectiva. En efecto, *ψ es inyectiva.* Dados $f, g \in \mathcal{L}(P,Q)$ tales que $\psi(f) = \psi(g)$. Si tomamos $x \in P$ veremos que $f(x) + x \in \psi(f)$ luego, existe un $y \in P$ tal que

$$\begin{aligned} f(x) + x = g(y) + y &\Longrightarrow \underbrace{[f(x) - g(y)]}_{\in Q} = \underbrace{(x - y)}_{\in P}, \\ &\Longrightarrow f(x) - g(y) = 0 \quad \& \quad x = y. \end{aligned}$$

Y por la arbitrariedad de x en P entonces $f = g$.

También se cumple que *ψ es sobreyectiva.* Recordemos que $V = P \oplus Q$ y las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_P : \quad V &\longrightarrow P \\ p + q &\longmapsto p \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \pi_Q : \quad V &\longrightarrow Q \\ p + q &\longmapsto q \end{aligned}$$

que son aplicaciones lineales

Si tomamos $R \in \mathcal{U}_Q$ entonces $V = R \oplus Q$ y $\pi_P|_R : R \longrightarrow P$ es un isomorfismo. Esto pues $\pi_P|_R$ es una aplicación lineal de R a P con dim$P =$ dim$R = k$ y

$$\mathrm{Ker}(\pi_P|_R) = \mathrm{Ker}(\pi_P) \cap R = Q \cap R = \emptyset$$

Definimos $f := \pi_Q \circ (\pi_P|_R)^{-1} : P \to Q$ que al ser composición de aplicaciones lineales entonces $f \in \mathscr{L}(P, Q)$. De hecho, se tiene que para todo x

$$\begin{aligned} x \in \psi(f) \quad &\Longrightarrow \quad x = f(y) + y \quad \text{para algún } y \in P, \\ &\Longrightarrow \quad x = \pi_Q\left((\pi_P|_R)^{-1}(y)\right) + y. \end{aligned}$$

pero sabemos que hay un $z \in R$ tal que $(\pi_P|_R)^{-1}(y) = z = y + q$ para algún $q \in Q$. Por tanto, $\pi_Q\left((\pi_P|_R)^{-1}(y)\right) = q$. Luego, $x = q + y = z \in R$. Que implica $\psi(f) \subseteq R$. Pero si $x \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_P)$ entonces $x \in P$ y $f(x) + x = 0$. Entonces $x = 0$ luego, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_P) = \{0\}$ y entonces $\psi(f) = R$.

Si tomamos para cada Q con codim $Q = k$ un $P \in \mathcal{U}_Q$ (axioma de elección) entonces definimos para cada Q la función ψ_P como antes y tenemos el siguiente diagrama para cada Q:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_Q \arrow[rr, "(\psi_Q)^{-1}"] \arrow[drr, "\varphi_Q := \mathrm{Iso}_{\mathscr{L}} \circ (\psi_Q)^{-1}"'] & & \mathscr{L}(P_Q, Q) \arrow[d, "\mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}"] \\ & & \mathbb{R}^{k(n-k)} \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}$ es el isomorfismo entre $\mathbb{R}^{k(n-k)}$ y $\mathscr{L}(P_Q, Q)$. Ver que $\varphi_Q(\mathcal{U}_Q) = \mathbb{R}^{k(n-k)}$ es un abierto en $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Por lo que finalmente estamos en el preámbulo del lema 2.11, esto con el conjunto $Gr(k, V)$ y la colección $\{(\mathcal{U}_Q, \varphi_Q)|$ codim$Q = k\}$. Comprobemos las cuatro hipótesis para que $Gr(k, V)$ sea una $k(n-k)$-variedad diferencial, a esta la llamamos *variedad Grassmanniana.*

[**Condición i** (lema 2.11)] Si tomamos Q, O dos subespacios vectoriales con codim $Q =$ codim $O = k$, entonces

$$\varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O) = \mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}\left(\{f \in \mathscr{L}(P_Q, Q)| \ \psi_Q(f) \cap O = \{0\}\ \}\right) \tag{2.2}$$

Esto se puede comprobar si tomamos un $\widehat{f}$ arbitrario en $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Entonces

$$\widehat{f} \in \varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O) \iff \widehat{f} = \varphi_Q(R) \quad \text{para algún } R \in \mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O \subseteq \mathrm{Gr}(k, V).$$

Como $\mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathscr{L}(P_Q)$ entonces $\mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}\ f = \widehat{f}$ para un único $f \in \mathscr{L}(P_Q, Q)$, luego dado que ψ_Q es una biyección, entonces tenemos que $\psi_Q(f) = R$. De allí, $\psi_Q(f) \in \mathcal{U}_Q$; es decir, $V = \psi_Q(f) \oplus Q$, por lo que

$$\begin{aligned} \widehat{f} \in \varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O) &\iff V = \psi_Q(f) \oplus O, \\ &\iff R \cap O = \psi_Q(f) \cap O = \{0\}. \end{aligned}$$

Concluyendo que (2.2) es cierto. De allí, como $\{f \in \mathscr{L}(P_Q, Q)| \ \psi_Q(f) \cap O = \{0\}\}$ es un abierto en $\mathscr{L}(P_Q, Q)$ e $\mathrm{Iso}_{\mathscr{L}}$ es un homeomorfismo; luego, una aplicación abierta. Entonces $\varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O)$ es abierto en $\mathbb{R}^{k(n-k)}$.

[**Condición ii** (lema 2.11)] Comprobemos que

$$\varphi_Q \circ (\varphi_O)^{-1} : \varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O) \longrightarrow \varphi_O(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O) \text{ es de clase } C^\infty(\varphi_Q(\mathcal{U}_Q \cap \mathcal{U}_O); \mathbb{R}^n).$$

Tenemos que $\varphi_Q \circ (\varphi_O)^{-1} (\widehat{f}\,) \in \mathbb{R}^{k(n-k)}$ y que $(\varphi_O)^{-1} (\widehat{f}\,) = \mathrm{Img}\,(f + \mathrm{Id}_{P_O})$, si $g := \varphi_Q \circ (\varphi_O)^{-1} (\widehat{f}\,)$ es tal que $(\varphi_Q)^{-1}(g) = \mathrm{Img}(g + \mathrm{Id}_{P_Q})$. De aquello tenemos que

$$\mathrm{Img}(g + \mathrm{Id}_{P_Q}) = \mathrm{Img}(f + \mathrm{Id}_{P_O})$$

Esto es para todo $x \in P_Q$ existe algún $x' \in P_O$ tal que $f(x) + x = g(x') + x'$. Y claro si existe otro $x'' \in P_O$ que cumpla lo mismo entonces tenemos que $x'' + g(x'') = x' + g(x')$ y $V = P_O \oplus O$; por lo que, $x'' = x'$. Entonces de hecho se puede definir una función, que cumple la siguiente característica $x + f(x) - x' \in O$. Si denominamos $\ell_f := \mathrm{Id}_{P_Q} + f$ entonces para x se cumple que $\pi_{P_Q} \circ \ell_f(x) - x' = 0$. Luego, como $\pi_{P_Q} \circ \ell_f$ es invertible entonces tenemos que $x = \left(\pi_{P_Q} \circ \ell_f\right)^{-1}(x')$ y entonces

$$g(x') = \ell_f \circ \left(\pi_{P_Q} \circ \ell_f\right)^{-1}(x') - x' = \pi_{P_O}\left[\ell_f \circ \left(\pi_{P_Q} \circ \ell_f\right)^{-1}(x')\right]$$

Por lo que,

$$\varphi_Q \circ (\varphi_O)^{-1}\ (\hat{f}\,) := (\pi_{P_O} \circ \ell_f) \circ \left(\pi_{P_Q} \circ \ell_f\right)^{-1}.$$

Pero $f \mapsto \pi_{P_Q} \circ \ell_f$, $f \mapsto \pi_{P_O} \circ \ell_f$ son funciones C^∞. Claramente, $f \longmapsto f^{-1}$ también es C^∞. Y por composiciones se concluye lo requerido.

[**Condición iii** (lema 2.11)] Sean $P, R \in Gr(k, V)$ como ambos tienen la misma dimensión entonces siempre es posible construir un subespacio vectorial Q de dimensión $n-k$ que esté en suma directa con ambos. De hecho, ver que $V \neq P \cup R$ por tanto podemos tomar $v_1 \in V \setminus (P \cup R)$ y sucesivamente para cada $0 < i < n-k$ se puede tomar $v_{i+1} \in V \setminus (P \cup R \cup \{\, v_j|\ 0 < j \leq i\})$. De allí, $\{\, v_j|\ 0 < j \leq n-k\}$ es un conjunto linealmente independiente. Y de hecho, si tomamos una base para P entonces junto con este conjunto son linealmente independientes. Por tanto, $P \oplus \langle \{\, v_j|\ 0 < j \leq n-k\} \rangle = V$. De manera similar para $R \oplus \langle \{\, v_j|\ 0 < j \leq n-k\} \rangle = V$.

[**Condición iv** (lema 2.11)] Tomemos una base $(\mathbf{f}_j)_{j=1}^n$ para V y $S \in Gr(k, V)$ entonces $\dim S = k$, por tanto, existe una base pasa S, $(\mathbf{s}_i)_{i=1}^k$. Notar que la siguiente $(n+k)$-upla $(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ necesita ser linealmente dependiente por la dimensión de V. Así, usando el lema de dependencia lineal existe $J \subseteq \{1, n\}$ tales que para todo $j \in J$ se tiene que

$$\mathbf{f}_j \in \langle \{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq k\} \cup \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq n \ \&\ i \notin J\} \rangle$$

Y $|J| = k$. Para construir J se usa el siguiente esquema: para $i = 0$ $J_0 = \emptyset$ y $0 < i < n-k$ se tiene que $J_{i+1} = J_i \cup \{m\}$ donde $m \notin J_i$ y

$$\mathbf{f}_m \in \langle \{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq k\} \cup \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle$$

Este esquema es posible por el lema de dependencia lineal pues la $(n+k-|J_i|)$-upla que sale de $\{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq k\} \cup \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\}$ es linealmente dependiente porque siempre tiene más de n elementos. Por otro lado, no puede ser que para algún $0 < m \leq k$, $\mathbf{s_i} \in \langle \{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq m-1\} \rangle$ porque son linealmente independientes. Así, necesariamente es parte de $\{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\}$.

Al terminar tomamos $J = J_{n-k}$. Y ver que, $\langle \{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq k\} \cup \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle$ contiene a todos los elementos de la base de V. Por tanto,

$$S + \langle \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle = \langle \{\, \mathbf{s}_i|\ 0 < i \leq k\} \cup \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle = V$$

Pero como $\dim\left(\langle \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle\right) = n-k$, $\dim S = k$ y $\dim V = n$ entonces

$$\dim\left(S \cap \langle \{\, \mathbf{f}_i|\ 0 < i \leq m-1 \ \&\ i \notin J_i\} \rangle\right) = 0.$$

Así, estos dos subespacios están en suma directa. Luego, $S \in \mathcal{U}_{F_J}$. Esto muestra que

$$\mathrm{Gr}(k, V) = \bigcup_{J \subseteq \{1, \ldots, n\}} \mathcal{U}_{F_J}$$

Variedades y aplicaciones suaves

Lección 6

2.2. Funciones de clase $C^\infty(M)$

El concepto de variedades diferenciales aún no está listo sin antes mencionar a las funciones de clase C^∞ sobre variedades diferenciales. Para aliviar el lenguaje, diremos que M es una n-variedad diferencial y será claro que nos referimos a $(M, \mathscr{F})$.

2.2.1. funciones de una variedad

Definición 2.5 (Funciones de Clase $C^\infty(M)$)**.** Sea M una n-variedad y $f : M \to \mathbb{R}$. Decimos que f *es una función de clase* $C^\infty(M)$ si para toda carta local, $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_M$, se tiene que

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{es de clase } C^\infty\left(\varphi(U); \mathbb{R}\right).$$

Observación. Si tenemos una n-variedad diferencial M, $U \subseteq M$ un abierto y una función $f : U \to \mathbb{R}$. Recodemos que por el lema 2.6, $(U, \mathscr{F}_V)$ es una n-variedad diferencial siendo que es válido discutir si f *es una función de clase* $C^\infty(U)$.

Proposición 2.13. *Sea M una n-variedad diferencial y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(M)$. Para cualquier U abierto de M, $f|_U$ es una función de clase $C^\infty(U)$.*

Demostración. Si $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_V$ sabemos que $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_M$, por tanto, de la definición 2.5 $(f|_V) \circ \varphi^{-1} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^\infty(\varphi(U); \mathbb{R})$. Por lo tanto, concluimos que $f|_V$ es una función de clase $C^\infty(M)$.

□

Teorema 2.14 (Propiedades Algebráicas para Funciones de Clase $C^\infty(M)$)**.** *Sean f, g dos funciones de clase $C^\infty(M)$ entonces se tiene que:*

(i) $f + g$ es una función de clase $C^\infty(M)$,

(ii) fg es una función de clase $C^\infty(M)$,

(iii) si $g(p) \neq 0$ para todo $p \in M$, entonces f/g es una función de clase $C^\infty(M)$.

Demostración. Tomemos dos funciones f, g de clase $C^\infty(M)$ y una carta local cualquiera (U, φ) entonces $(f+g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + f \circ \varphi^{-1}$, $(fg) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})$. Si $g(p) \neq 0$ para todo $p \in M$ entonces $(f/g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1})/(g \circ \varphi^{-1})$. Notar que por la definición 2.5 que $f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U); \mathbb{R})$ con ello, el teorema A.11 implica que $(f+g) \circ \varphi^{-1}, (fg) \circ \varphi^{-1}, (f/g) \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U); \mathbb{R})$. Por la arbitrariedad de $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ entonces se confirman los puntos (i), (ii) y (iii).

□

Teorema 2.15 (Lemma del Pegado)**.** *Sea M una n-variedad diferencial, $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto para M y $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$, $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$. Si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ se cumple que:*

(i) f_α es una función de clase $C^\infty(U_\alpha)$,

(ii) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$,

entonces existe una única función f de clase $C^\infty(M)$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ se cumple $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$.

Demostración. Tomemos $f = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha$ y comprobemos que es una función $f : M \to \mathbb{R}$. Entonces ver que f es una relación con codominio $\mathbb{R}$ y con

$$\text{dom } f = \text{dom}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \text{dom } f_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = M.$$

Y por otro lado, sean $(x, y), (x, z) \in f$ entonces existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $f_\alpha(x) = y$ e $f_\beta(x) = z$. Entonces como $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ entonces por hipótesis $y = z$. Por tanto, f es efectivamente función.

Esta función f efectivamente cumple que si tomamos $(V, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ entonces $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Esto se comprueba viendo que existe $\Omega \subseteq \Lambda$ tal que para todo $\alpha \in \Omega$ se tiene que $U_\alpha \cap V \neq \emptyset$ y $V = \bigcup_{\alpha\in\Omega}(U_\alpha \cap V)$.

Si definimos para cada $\alpha \in \Omega$ tal que $\tilde{U}_\alpha = \varphi(U_\alpha \cap V)$ entonces de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}\left\{\bigcup_{\alpha\in\Omega} f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}\Big|_{\tilde{U}_\alpha}\right)\right\} = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \operatorname{dom}\left\{f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}\Big|_{\tilde{U}_\alpha}\right)\right\} &= \bigcup_{\alpha\in\Omega} \varphi(U_\alpha \cap V),\\ &= \varphi\left(\bigcup_{\alpha\in\Omega} U_\alpha \cap V\right),\\ &= \varphi(V) = \operatorname{dom} f.\end{aligned}$$

Además, si $x \in \operatorname{dom} f$ entonces hay $\alpha \in \Omega$ tal que $\varphi^{-1}(y) \in U_\alpha$, luego, $f(\varphi^{-1}(y)) = f_\alpha(\varphi^{-1}(y))$. Esto muestra que

$$f \circ \varphi^{-1} = \bigcup_{\alpha\in\Omega} f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}\Big|_{\tilde{U}_\alpha}\right)$$

Notar que para cada $\alpha \in \Omega$, $f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}|_{\tilde{U}_\alpha}\right) \in C^\infty(\tilde{U};\mathbb{R})$. Esto pues f_α es una función de clase $C^\infty(U_\alpha)$. Y de la condición (ii) tenemos que para cada $\alpha, \beta \in \Omega$ tales que $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta \neq \emptyset$ y cualquier $x \in \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$ entonces $\varphi^{-1}(x) \in (U_\alpha \cap V) \cap (U_\beta \cap V)$ y

$$f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}\Big|_{\tilde{U}_\alpha}\right)(x) = f_\alpha(\varphi^{-1}(x)) = f_\beta(\varphi^{-1}(x)) = f_\beta \circ \left(\varphi^{-1}\Big|_{\tilde{U}_\beta}\right)(x)$$

Por lo tanto, usando el teorema A.16 sobre la colección $\left(f_\alpha \circ \left(\varphi^{-1}|_{\tilde{U}_\alpha}\right)\right)_{\alpha\in\Omega}$ tenemos el resultado requerido sobre $f \circ \varphi^{-1}$. Como la carta fue escogida arbitrariamente de la definición 2.5 entonces f es una función de clase $C^\infty(M)$.

□

Es importante conocer algunas funciones de clase C^∞ que usaremos más adelante.

Ejemplo 2.16. (Sistema de coordenadas sobre una variedad) Digamos tenemos una n-variedad diferencial M y un punto $p \in M$. Dada una carta local (U, φ) alrededor de p con U un conexo de M, decimos *sistema de coordenadas alrededor de p respecto a* (U, φ) a la siguiente colección de funciones:

$$(\varphi_j := \pi_j \circ \varphi \mid 0 < j \leq n)$$

donde $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección j-ésima. Esta colección es de funciones de clase $C^\infty\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Para la comprobación tomemos una carta local $(W \cap U, \psi|_{W\cap U}) \in \mathscr{F}_U$ con $(W, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ y ver que

$$\varphi_j \circ \psi^{-1} = \pi_j \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \qquad \text{en } \psi(W \cap U).$$

Pero como $\varphi\circ\psi^{-1}$ es una función de transición entre cartas en F_M, entonces $\varphi\circ\psi^{-1} \in C^\infty(\psi(W\cap U);\mathbb{R}^n)$ en el sentido clásico de diferenciabilidad. Por otro lado si tomamos en cuenta los ejemplos A.10, $\pi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ porque es una aplicación lineal y acotada. Con esto, es posible aplicar el teorema de cadena A.12 para concluir que $\varphi_j \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(W \cap U);\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.17. (Función constante) Sea M una n-variedad diferencial y $\beta \in \mathbb{R}$, definimos la función constante $\beta\,\mathbf{1} : M \to \mathbb{R}$ tal que $\beta\,\mathbf{1}(p) = \beta$ para todo $p \in M$. *$\beta\,\mathbf{1}$ es una función de clase $C^\infty(M)$.* Esto es cierto porque para cada carta local $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ se tiene que $\beta\,\mathbf{1} \circ \varphi^{-1}$ es una función constante sobre $\varphi^{-1}(U)$ y por los ejemplos A.10 tenemos que es de clase $C^\infty(\varphi^{-1}(U);\mathbb{R})$, por lo tanto, se satisface la definición 2.5.

Ejemplo 2.18. (Funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$) Si vemos a $\mathbb{R}^n$ como en el ejemplo 2.8 entonces $\mathbb{R}^n$ es una n-variedad diferencial. Nuestro objetivo ahora es dejar claro que la definición 2.5 es tal que no deja a confusiones entre $C^\infty(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ de la definición A.1 para cualquier abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Entonces tomemos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ cualquiera. Dado que para cualquier carta local de Ω $(\Theta, g) \in \mathscr{I}_\Omega$ se tiene que $g \in C^\infty(\Theta;\mathbb{R})$, como lo analizamos en el ejemplo 2.8. Entonces por la regla de la cadena A.1

$$f \circ g : \Theta \cap \Omega \to \mathbb{R}^n \qquad \text{es de clase } C^\infty(\Theta \cap \Omega;\mathbb{R})$$

Por lo tanto, f es una función de clase $C^\infty(\Omega)$.

De manera contraria, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty(\Omega)$, nuevamente viendo el ejemplo 2.8 tenemos que $(\Omega, \mathrm{id}_\Omega)$ es una carta local y por tanto, $f \circ \mathrm{id}_\Omega = f$ es una función de clase $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$.

Lema 2.19 (Teorema de Taylor para Funciones de Clase C^∞)**.** *Sea M una n-variedad diferencial, $p \in M$ y $f : M \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^\infty(M)$. Para cualquier carta local de M alrededor de p , (U,φ), con U un conjunto conexo existe una función, h, de clase $C^\infty(U)$ para la que se cumple la siguiente igualdad*

$$f = f(p)\mathbf{1} + \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}) + \sum_{0<i,j\leq n} (\varphi_i - \varphi_i(p)\mathbf{1})(\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1})h$$

Esto es desarollo de Taylor grado 1 alrededor de p con el sistema de coordenadas (φ_j).

Demostración. Tomemos una carta local $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$ alrededor de p entonces tenemos por la definición 2.5 que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R})$ donde $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una vecindad abierta de $\varphi(p)$. En particular, $f \circ \varphi^{-1} \in C^2(\varphi(U);\mathbb{R})$ y $\varphi(U)$ es conexo porque la conexidad es una propiedad topológica. Con ello, la fórmula de Taylor con resto integral A.18 es tal que para todo $x \in \varphi(U)$,

$$\begin{aligned} f\circ\varphi^{-1}(x) = f\circ\varphi^{-1}(\varphi(p)) &+ \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (x^j - \varphi(p)^j) \\ &+ \sum_{0<i,j\leq n} \int_0^1 (1-t)\left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\,\partial x^i}\right|_{\varphi(p)+t(x-\varphi(p))} (x^j - \varphi(p)^j, x^i - \varphi(p)^i)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Por la definición A.2 sobre derivadas parciales y la identificación de los operadores tenemos que todas las derivadas parciales en esta igualdad son elementos en $\mathbb{R}$. Por eso, se tiene que

$$\begin{aligned} f\circ\varphi^{-1}(x) = f\circ\varphi^{-1}(\varphi(p)) &+ \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (x^j - \varphi(p)^j) \\ &+ \sum_{0<i,j\leq n} (x^j - \varphi(p)^j)(x^i - \varphi(p)^i) \int_0^1 (1-t)\left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\,\partial x^i}\right|_{\varphi(p)+t(x-\varphi(p))} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Recordemos por otro lado que

$$\begin{aligned} \psi : \varphi(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^1 (1-t)\left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\,\partial x^i}\right|_{((1-t)\varphi(p)+tx)} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Podemos definir también

$$\begin{aligned}\gamma : [0,1]\times\varphi(U) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (t,x) &\longmapsto (1-t)\left.\frac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j\,\partial x^i}\right|_{((1-t)\varphi(p)+tx)}\end{aligned}$$

Con esto para todo $x\in\varphi(U)$ se tiene que $\psi(x)=\int_0^1\gamma(t,x)\;\mathrm{d}t$. Se puede comprobar que $\gamma\in C^\infty((0,1)\times\varphi(U);\mathbb{R})$ y por la regla de Leibniz generalizado se tiene que $\psi\in C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R})$. Finalmente, si $h=\psi\circ\varphi$ entonces para todo $m\in U\subseteq M$ se tiene que

$$\begin{aligned}f(m)=((f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi)(m) &= f(p)+\sum_{0<j\le n}\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}(\varphi(m)^j-\varphi(p)^j)\\ &\quad+\sum_{0<i,j\le n}(\varphi(m)^j-\varphi(p)^j)(\varphi(m)^i-\varphi(p)^i)\;h(m).\end{aligned}$$

Solo falta ver que h es una función de clase $C^\infty(U)$. Pero esto es claro, pues para cualquier $(W,\theta)\in \mathrm{F}_U$ entonces $h\circ\theta^{-1}=\psi\circ(\varphi\circ\theta^{-1})$ pero $\varphi\circ\theta^{-1}$ es de clase C^∞ en el sentido A.5 porque son funciones de transición de un atlas diferencial. Luego, $h\circ\theta^{-1}$ es de clase C^∞ por el teorema A.12. Con ello, se concluye el resultado.

□

2.2.2. Aplicaciones entre variedades

Definición 2.6 (Aplicaciones de clase $C^\infty(M;N)$)**.** Dadas dos variedades diferenciales M,N y $F:M\to N$ una función continua. Decimos que F *es una aplicación de clase* $C^\infty(M;N)$ si para todo V abierto de N con $F^{-1}(V)\neq\emptyset$ satisface que cualquier función, f, de clase $C^\infty(V)$ cumple

$$f\circ F : F^{-1}(V)\to\mathbb{R}\quad\text{es una función de clase } C^\infty\left(F^{-1}(V)\right)\text{ en el sentido de 2.5.}$$

Proposición 2.20. *Sean M, N variedades diferenciales, $F:M\to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$. Para cualquier V abierto de N, $F|_{F^{-1}(V)}$ es una aplicación de clase $C^\infty(F^{-1}(V);V)$.*

Demostración. Para comprobar que $F|_{F^{-1}(V)}$ es una aplicación de clase $C^\infty(F^{-1}(V);V)$ debemos tomar cualquier W abierto de la variedad diferencial V y cualquier f función de clase $C^\infty(W)$ donde W tiene la estructura diferencial heredada de V y se debe ver que $f\circ F|_{F^{-1}(V)}$ sea una función de clase $C^\infty(F^{-1}(W))$ para la variedad diferencial $F^{-1}(W)$ con la estructura diferencial heredada de $F^{-1}(V)$.

Por la proposición 2.7, si f es una función de clase $C^\infty(W)$ con la estructura diferencial para M heredada de V entonces g es una función de clase $C^\infty(W)$ con la estructura diferencial para W heredada de N. También se puede ver que

$$f\circ F|_{F^{-1}(V)} : \left(F|_{F^{-1}(V)}\right)^{-1}(W)\to\mathbb{R}.$$

no es más que $f \circ F : F^{-1}(W) \to \mathbb{R}$ pues $\left(F|_{F^{-1}(V)}\right)^{-1}(W) = F^{-1}(V \cap W) = F^{-1}(W)$ porque $W \subseteq V$. Recordar que de la definición 2.6 se tiene que $f \circ F$ es una función de clase $C^\infty(f^{-1}(W))$ con la estructura diferencial para $f^{-1}(W)$ heredada de M. En otro uso de la proposición 2.7 tenemos lo requerido.

□

Observación. Si requerimos de probar que una aplicación continua, $F : M \to N$, es una *aplicación de clase* $C^\infty(M;N)$ entonces deberemos probar que para cualquier abierto V abierto de N con $F^{-1}(V) \neq \emptyset$ es cierto que: dada cualquier función $f \in C^\infty(V)$ se cumple que $f \circ F \in C^\infty\left(F^{-1}(V)\right)$. Y si veamos la definición 2.5 entonces esto significa que para toda carta local $(U \cap F^{-1}(V), \varphi) \in \mathscr{F}_{M\setminus F^{-1}(V)}$ donde $(U, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ se debe mostrar

$$(f \circ F) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R} \quad \text{es de clase } C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V); \mathbb{R}) \quad \text{en el sentido de la definición A.5} \tag{2.3}$$

Por otro lado, fijémonos en el siguiente diagrama: Evidentemente el diagrama presentado conmuta,

$$\begin{tikzcd}
F(U \cap F^{-1}(V)) \arrow[dr, "f"'] & & \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \arrow[ll, "F \circ \varphi^{-1}"'] \arrow[rr, "\varphi^{-1}"] \arrow[dl, "f \circ (F \circ \varphi^{-1})"'] \arrow[dr, "(f \circ F) \circ \varphi^{-1}"] & & U \cap F^{-1}(V) \arrow[dl, "f \circ F"] \\
& \mathbb{R} & & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Diagrama para aplicaciones de clase C^∞

de hecho $f \circ (F \circ \varphi^{-1}) = (f \circ F) \circ \varphi^{-1}$. Y si recordamos que $f \in C^\infty(F^{-1}(V))$ junto con la definición 2.5 entonces veremos que mostrar (2.3) basta verificar que $\varphi \circ F^{-1} : F(U \cap F^{-1}(V)) \to \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ exista y que $\left(F(U \cap F^{-1}(V)), \varphi \circ F^{-1}\right) \in \mathscr{F}_V$. Y esto lo podemos hacer mostrando que esta carta local está en $\mathscr{F}_M$ pues como $\left(F(U \cap F^{-1}(V))\right) \cap V = F(U \cap F^{-1}(V))$ por el lema 2.6 implica que la carta está en $\mathscr{F}_V$.

Así notar que hemos reducido el esquema de la demostración a tres objetivos: la comprobación de (2.3), la presentación de fig. 2.1 y la ver que $\left(F(U \cap F^{-1}(V)), \varphi \circ F^{-1}\right) \in \mathscr{F}_M$.

Veamos un teorema clásico del cálculo ampliado a nuestro contexto de variedades diferenciales.

Teorema 2.21 (Regla de la cadena)**.** *Sean M, N, P tres variedades diferenciales, $F : M \to N$ y $G : N \to P$ dos aplicaciones de clase C^∞. Entonces $G \circ F \in C^\infty(M;P)$*

Demostración. Por composición de funciones continuas, $G \circ F$ es continua. Así, solo falta ver que sea W abierto de P tal que $(G \circ F)^{-1}(W) \neq \emptyset$ y una función f de clase $C^\infty(W)$ cualquiera, entonces

$$f \circ (G \circ f) : (G \circ F)^{-1}(W) \subseteq M \to \mathbb{R} \quad \text{es de clase } C^\infty\Big((G \circ F)^{-1}(W)\Big).$$

Notar que $G^{-1}(W) \neq \emptyset$. Como G es una aplicación de clase $C^\infty(N;P)$ entonces $f \circ G$ es *de clase* $C^\infty(G^{-1}(W))$. Por otro lado, $G^{-1}(W)$ es un abierto de N y $F^{-1}(G^{-1}(W)) \neq \emptyset$. Así, como F también es una aplicación de clase C^∞ entonces

$$(f \circ G) \circ F : F^{-1}\Big(G^{-1}(W)\Big) \to \mathbb{R} \quad \text{es de clase } C^\infty\Big(F^{-1}(G^{-1}(W))\Big).$$

Pero $f \circ (G \circ F) = (f \circ G) \circ F$ y $F^{-1}(G^{-1}(W)) = (G \circ F)^{-1}(W)$. Entonces $f \circ (G \circ F)$ es de clase $C^\infty((G \circ F)^{-1}(W))$ como se buscaba.

$\square$

Ejemplo 2.22. (Identidad en una variedad diferencial) Sea M una variedad diferencial, $\mathrm{id}_M : M \to M$. Dado que para cualquier $f : U \subseteq M \to \mathbb{R}$ con U abierto y f una función de clase $C^\infty(U)$ se tiene que $f = f \circ \mathrm{id}_M : U \to \mathbb{R}$. Por lo que, id_M es una aplicación de clase $C^\infty(M;M)$.

Ejemplo 2.23. (Cartas locales como aplicaciones de clase C^∞) Dada M una variedad diferencial de dimensión n y una carta local, $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$. Si $\tilde{U} := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que φ y φ^{-1} son aplicaciones de clase $C^\infty(U;\tilde{U})$ y $C^\infty(\tilde{U};U)$ respectivamente.

φ es una aplicación de clase $C^\infty(U;\tilde{U})$. Usaremos el esquema dado en la observación después de la definición 2.6. Así, tomemos arbitrariamente un abierto $\tilde{W}$ de $\tilde{U}$ tal que $W := \varphi^{-1}(\tilde{W})$ no sea vacío, $h \in C^\infty(\tilde{W})$ y una carta local en $\mathscr{F}_W$, que por el lema 2.6 tiene forma $(V \cap W, \psi|_{V\cap W})$ donde $(V,\psi) \in \mathscr{F}_M$ y $V \cap W \neq \emptyset$. Siguiendo el esquema debemos comprobar que la siguiente función

$$(h \circ \varphi) \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap W) \to \mathbb{R} \quad \text{es } \textit{de clase } C^\infty(\psi(V \cap W);\mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Si denominamos $\tilde{V} \cap \tilde{W} := \varphi(V \cap W)$ como φ es un homeomorfismo entonces es un abierto en $\tilde{W}$. Con esto el diagrama presentado en fig. 2.1 queda así:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V} \cap \tilde{W} \arrow[dr, "h"'] & & \psi(V \cap W) \arrow[ll, "\varphi \circ \psi^{-1}"'] \arrow[rr, "\psi^{-1}"] \arrow[dl, "h \circ (\varphi \circ \psi^{-1})"'] \arrow[dr, "(h \circ \varphi) \circ \psi^{-1}"] & & V \cap W \arrow[dl, "h \circ \varphi"] \\
& \mathbb{R} & & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Como φ y ψ son homeomorfismos entonces $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\tilde{V} \cap \tilde{W}) \to \psi(V \cap W)$ existe. Por tanto, falta por comprobar que $(\tilde{V} \cap \tilde{W}, \psi \circ \varphi^{-1}) \in \mathscr{I}$. Para esto, primero ver que $(\tilde{V} \cap \tilde{W}, \psi \circ \varphi^{-1})$ es efectivamente una carta local para $\tilde{W}$. También debemos recordar que $(W, \varphi|_W), (V,\psi) \in \mathscr{F}_M$ en donde $\mathscr{F}_M$ es un atlas diferencial, $V \cap W \neq \emptyset$ y por tanto,

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \tilde{W} \cap \tilde{V} \to \mathbb{R}^n \quad \text{es } \textit{de clase } C^\infty(\tilde{W};\mathbb{R}^n) \textit{ en el sentido de la definición A.5.}$$

Y por el ejemplo 2.8 sobre las propiedades de $(\mathbb{R}^n, \mathscr{I})$ tenemos que $(\tilde{W} \cap \tilde{V}, \psi \circ \varphi^{-1}) \in \mathscr{I}$. Luego, vemos que (2.4) es cierto, concluyendo la demostración.

φ^{-1} es una aplicación de clase $C^\infty(\tilde{U};U)$ Otra vez siguiendo el esquema, tomemos arbitrariamente un abierto W de U tal que $\tilde{W} := \varphi(W) = (\varphi^{-1})^{-1}(W)$ no sea vacío, $h \in C^\infty(W)$ y una carta local en $\mathscr{I}_{\tilde{W}}$, que por el lema 2.6 tiene forma $(\tilde{V} \cap \tilde{W}, \gamma|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}})$ donde $(\tilde{V},\gamma) \in \mathscr{I}$ y $\tilde{V} \cap \tilde{W} \neq \emptyset$. Siguiendo el esquema debemos comprobar que la siguiente función

$$(g \circ \varphi^{-1}) \circ \gamma^{-1} : \gamma(\tilde{W} \cap \tilde{V}) \to \mathbb{R} \quad \text{es } \textit{de clase } C^\infty(\gamma(\tilde{W} \cap \tilde{V});\mathbb{R}). \tag{2.5}$$

Si denominamos $V \cap W := \varphi^{-1}(\tilde{V} \cap \tilde{W})$, es un abierto en W porque φ es un homeomorfismo entonces. Con esto el diagrama presentado en fig. 2.1 queda así:

$$\begin{tikzcd}
V \cap W \arrow[dr, "g"'] & & \gamma(\tilde{V} \cap \tilde{W}) \arrow[ll, "\varphi^{-1} \circ \gamma^{-1}"'] \arrow[rr, "\gamma^{-1}"] \arrow[dl, "g \circ (\gamma \circ \varphi)^{-1}"'] \arrow[dr, "\left(g \circ \varphi^{-1}\right) \circ \gamma^{-1}"] & & \tilde{V} \cap \tilde{W} \arrow[dl, "g \circ \varphi^{-1}"] \\
& \mathbb{R} & & \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Claramente $\gamma \circ \varphi : W \cap V \to \gamma(\tilde{V} \cap \tilde{W})$ existe, por lo que, $(W \cap V, \gamma \circ \varphi)$ es una carta local para V. Y falta comprobar que $(W \cap V, \gamma \circ \varphi) \in \mathscr{F}_M$. Para esto tomemos $(Y, \psi) \in \mathscr{F}_M$ tal que $Y \cap (W \cap V) \neq \emptyset$ arbitrario, entonces

$$\gamma \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) = (\gamma \circ \varphi) \circ \psi^{-1} : \psi\left(Y \cap (W \cap V)\right) \to \mathbb{R}^n$$

Pero como $\mathscr{F}_M$ es un atlas diferencial entonces la función de transición, $\varphi \circ \psi^{-1}$, es *de clase* $C^\infty(\psi(Y \cap U); \mathbb{R}^n)$. Nuevamente del ejemplo 2.8 como $(\tilde{W}, \gamma) \in \mathscr{I}$ entonces $\gamma \in C^\infty(\tilde{W}; \mathbb{R}^n)$ y por la regla de la cadena, tenemos que $\gamma \circ (\varphi \circ \psi^{-1}) \in C^\infty(\psi(Y \cap (W \cap V)); \mathbb{R}^n)$. Por tanto, $(W \cap U, \gamma \circ \varphi)$ es diferenciablemente compatible con todas las cartas locales de $\mathscr{F}_M$. Como $\mathscr{F}_M$ es máximal entonces $(W \cap V, \gamma \circ \varphi) \in \mathscr{F}_M$. Con ello, comprobamos (2.5) y concluimos la comprobación.

Ejemplo 2.24. (Aplicaciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$) Por ahora, existe una pequeña ambigüedad al momento de hablar sobre $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Para ser específicos, en este ejemplo aclararemos que si $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, decir que F es una aplicación de clase $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ en el sentido de la definición 2.6 y $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ en el sentido de la definición A.5 es lo mismo.

Para ver esto, si F de clase $C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ y $0 < j \leq m$ entonces como $\mathbb{R}^m$ es abierto por definición de $\mathbb{R}^m$ tal que $F^{-1}(\mathbb{R}^m) \neq \emptyset$ y $\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (la proyección canónica j-ésima) es una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, entonces $\pi_j \circ F = F_j$ es una función de clase $C^\infty(\Omega)$. Pero como vimos en el ejemplo 2.18, esto no es más que $F_j \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Luego, como j fue arbitrariamente escogido, la teorema A.14 dice que $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Por el otro lado, si $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ y tomamos un abierto $\Theta \subseteq \Omega$ tal que $F^{-1}(\Theta) \neq \emptyset$ junto con una función $f : \Theta \to \mathbb{R}$ de clase $C^\infty(\Theta)$. Entonces tenemos la siguiente composición

$$f \circ F : F^{-1}(\Theta) \to \mathbb{R}.$$

Pero por el ejemplo 2.18 sabemos que $f \in C^\infty(\Theta; \mathbb{R})$ y por la regla de la cadena teorema A.12 entonces $f \circ F \in C^\infty(F^{-1}(\Theta); \mathbb{R})$. Por lo que, $f \circ F$ es de hecho una función de clase $C^\infty(F^{-1}(\Theta))$. Luego, por la arbitrariedad de Θ y f, tenemos que F es una aplicación de clase $C^\infty(\Theta; \mathbb{R}^m)$.

Teorema 2.25 (Propiedades Algebraicas para Aplicaciones de Clase $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$)**.** *Sean F, G dos aplicaciones de clase $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$, β y $(g_i \mid 0 < i \leq m)$ es una colección de funciones de clase $C^\infty(M)$ entonces se tiene que:*

(i) $F + \beta G$ es una aplicación de clase $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$,

(ii) $(F|G)$ es una función de clase $C^\infty(M)$.

(iii) $(f_1, \ldots, f_m)$ es una aplicación de clase $C^\infty(M; \mathbb{R}^m)$

Demostración. Es claro, que tanto $F + G$, βF y $(F|G)$ son aplicaciones continuas. Solo falta ver que dado V abierto de $\mathbb{R}^m$ tal que $W := (F + G)^{-1}(V) \neq \emptyset$ y cualquier función, f, de clase $C^\infty(V)$ se tiene que

$$f \circ (F + G) : W \to \mathbb{R} \qquad \text{es una función de clase } C^\infty(W)$$

Bien, notar que si $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_W$ entonces en $\varphi(U)$ se tiene que

$$(f \circ (F+G)) \circ \varphi = f \circ (F \circ \varphi + G \circ \varphi)$$

pero $F \circ \varphi, G \circ \varphi : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son aplicaciones de clase $C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R}^m)$ por la regla de la cadena 2.21. Más aún, por el ejemplo 2.24 esto implica que lo es en el sentido de la definición A.5 y ya conocemos que allí que $F \circ \varphi + G \circ \varphi$ es de clase $C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R}^m)$ en ambos sentidos. Y por la definición 2.6 tenemos que $f \circ (F \circ \varphi + G \circ \varphi)$ es de clase $C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R})$. Comprobando lo requerido. Esto es $F+G$ es una aplicación de clase $C^\infty(M;\mathbb{R}^m)$.

De manera similar, para $W := (\beta F)^{-1}(V) \neq \emptyset$, cualquier función, f, de clase $C^\infty(V)$ y $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_W$ se tiene en $\varphi(U)$ que

$$(f \circ (\beta F)) \circ \varphi^{-1} = f \circ (\beta(F \circ \varphi^{-1}))$$

Se tiene que $F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(V);\mathbb{R}^m)$ con todo lo visto en el ejemplo 2.24. Y luego, podemos decir que $\beta(F \circ \varphi^{-1})$ es una aplicación de clase $C^\infty(\varphi(V);\mathbb{R}^m)$. Luego, $(f \circ (\beta F)) \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U);\mathbb{R})$ en el sentido de la definición A.5. Luego, se verifica que βF es una aplicación de clase $C^\infty(M;\mathbb{R}^m)$.

Comprobaremos el literal (iii) y el literal (ii) quedará para el lector. Para ello, tenemos la colección $(f_i)_{0<i\leq m}$ de funciones de clase $C^\infty(M)$. Sabemos que las inyecciones canónicas, $(\rho_i)_{0<i\leq m}$, son lineales y acotadas, por lo que, cada $\rho_i \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$. Del ejemplo 2.24 sabe que de hecho estas son aplicaciones de clase $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$. Usando el teorema 2.21 y el literal (i) tenemos que

$$(f_1,\ldots,f_m) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \circ f_i \qquad \text{es una aplicación de clase } C^\infty(M;\mathbb{R}^m).$$

□

Teorema 2.26 (Lemma del Pegado para Aplicaciones entre Variedades)**.** *Sean M y N dos variedades diferenciales, $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto para M y $(F_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$, $F_\alpha : U_\alpha \to N$. Si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ se cumple que:*

(i) F_α es una aplicación de clase $C^\infty(U_\alpha;N)$,

(ii) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $F_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = F_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$,

entonces existe una única aplicación F de clase $C^\infty(M;N)$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ se cumple $F|_{U_\alpha} = F_\alpha$.

Quisiéramos presentar una equivalencia para la condición de que una función continua sea una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$. Que nos será útil más adelante.

Definición 2.7. Dadas dos variedades diferenciales M, N y $F : M \longrightarrow N$ continua. Para cualquier $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$ y $(V,\psi) \in \mathscr{F}_N$ tales que $F^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$ denominamos *representación local de F respecto a las cartas locales* (U,φ) *y* (V,ψ) a la siguiente función

$$\hat{F}_{U,V} := \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V).$$

Cuando el contexto sea claro solo diremos *una representación local de F* y escribiremos $\hat{F}$.

Proposición 2.27 (Definición alternativa para la aplicación de clase $C^\infty(M;N)$)**.** *Dadas dos variedades diferenciales M, N y $F: M \to N$ continua. F es de clase $C^\infty(M;N)$ si y solo si para cualquier $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$ y $(V,\psi) \in \mathscr{F}_N$ tales que $F^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$, su representación local $\hat{F} \in C^\infty(F^{-1}(V) \cap U; \mathbb{R}^p)$.*

Demostración. [Condición Necesaria] Del ejemplo 2.23 tenemos $\varphi^{-1} \in C^\infty(\tilde{U};U)$ y $\psi \in C^\infty(V;\tilde{V})$ donde $\tilde{U} = \varphi(U)$ y $\tilde{V} = \psi(V)$. Si $W := F^{-1}(V) \cap U$, comprobaremos que

$$\hat{F} : \varphi(W) \to \psi(F(W)) \quad \text{es de clase } C^\infty \text{ en el sentido de la definición A.5.}$$

Para aquello, ver que W es un abierto de U y la proposición 2.20 implica que $\varphi^{-1} : \varphi(W) \to W$ es una *aplicación de clase* $C^\infty\,(\varphi(W);W)$. Luego, como $F \in C^\infty(M;N)$, la proposición 2.20 establece que $F : W \to F(W)$ *aplicación de clase* $C^\infty\,(W;F(W))$. Por último, $F(W)$ es un abierto de N y $F(W) \subseteq F(F^{-1}(V)) \cap F(U) \subseteq V \cap F(U)$, por eso, $F(W)$ es un abierto de V. Y por la proposición proposición 2.20 tenemos que

$$\varphi : F(W) \to \psi(F(W)) \quad \text{es una } \textit{aplicación de clase } C^\infty\,(F(W);\psi(F(W)))$$

Así, concluimos del teorema 2.21 que $\hat{F} \in C^\infty(\varphi(W);\psi(F(W)))$ en el sentido de la definición 2.6.

Notar que $\varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\psi(F(W)) \subseteq \mathbb{R}^p$ se ven como sub-variedades diferenciales abiertas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$ con los atlas diferencial dados en el ejemplo 2.2. Por tanto, aún no concluimos la condición necesaria. Sin embargo, como $\hat{F}$ es una aplicación de clase C^∞ entonces $\hat{F}^j = \pi_j \circ \hat{F}$ es de clase $C^\infty(\varphi(W))$ en el sentido de la definición A.4. Pero $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \in \mathscr{I}$; por lo que, de la definición 2.5 concluimos que $\hat{F}^j = \hat{F}^j \circ (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})^{-1}$ es de clase C^∞ en el sentido usual. Luego, usando el teorema A.3 concluimos que $\hat{F}$ es C^∞ en el sentido usual.

[Condición Suficiente] Aquí debemos probar que para todo abierto V de N y cualquier función $h \in C^\infty(V)$ se cumple que $h \circ F \in C^\infty(F^{-1}(V))$. Para esto último tomemos una carta local arbitraria $\left(U \cap F^{-1}(V), \varphi|_{U \cap F^{-1}(V)}\right) \in \mathscr{F}_{M \setminus F^{-1}(V)}$ con $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$ tal que $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ y comprobemos que

$$(h \circ F) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \mathbb{R} \quad \text{es } \textit{de clase } C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V)); \mathbb{R})$$

Veamos que para cada punto de $x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ hay un $y \in U \cap F^{-1}(V)$ tal que $x = \varphi(y)$. Como $F(y) \in N$ existe una carta local $(W,\gamma) \in \mathscr{F}_N$ centrada en $f(y)$. Notar que $W \cap (U \cap F^{-1}(V)) \neq \emptyset$, por tanto, $\varphi(W \cap (U \cap F^{-1}(V)))$ es una vecindad de x. Además, si restringimos φ^{-1} a $\varphi\,(W \cap (U \cap F^{-1}(V)))$ entonces

$$(h \circ F) \circ \varphi^{-1} = (h \circ \gamma^{-1}) \circ (\gamma \circ F \circ \varphi^{-1}) \quad \text{en } \varphi\left(W \cap (U \cap F^{-1}(V))\right)$$

Por la definición 2.5 tenemos que $h \circ \gamma^{-1}$ es de clase C^∞ y por la hipótesis $\hat{F} = \gamma \circ F \circ \varphi^{-1}$ también es de clase C^∞, todo en el sentido usual. Así, para todo $x \in \varphi(U \cap F^{-1}(V))$ existe una vecindad de x, Y, para la que $(h \circ F) \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(Y;\mathbb{R}^p)$ en el sentido usual. Con ello por el teorema A.16 entonces $(h \circ F) \circ \varphi^{-1}$ es de clase C^∞ como se quería.

□

Variedades y aplicaciones suaves

Lección 7

2.3. Segundo axioma de numerabilidad

Para terminar con las herramientas fundamentales de las variedades diferenciales ahora hablaremos de la partición de la unidad. Aunque también traeremos a colación en esta sección ciertas peculiaridades topológicas sobre las variedades diferenciales.

Definición 2.8 (Espacio topológico paracompacto)**.** Un espacio topológico X *se dice que es paracompacto* si para cada cubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de X existe un refinamiento abierto localmente finito. Que $(V_\beta)_{\beta\in\Omega}$ *sea un refinamiento abierto de* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ significa que para cada $\beta\in\Omega$ existe un $\alpha\in\Lambda$ tal que $V_\beta\subseteq U_\alpha$. Y que $(V_\beta)_{\beta\in\Omega}$ *sea localmente finito* significa que para cada $x\in X$ existe una vecindad W tal que $\{\alpha\in\Lambda|\ W\cap A_\alpha\neq\emptyset\}$ es finito.

Proposición 2.28. *Sea X un espacio topológico que es localmente compacto, Hausdorff, y II-numerable. Entonces existe un cubrimiento abierto $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X tal que para todo $i\in\mathbb{N}$ se tiene que:*

- *G_i es relativamente compacto,*
- *$\overline{G_i}\subseteq G_{i+1}$.*

Demostración. X es II-numerable, por tanto, existe una base para la topología numerable, $\{V_i \mid i\in\mathbb{N}\}$. Más aún,

$$\mathcal{B}=\left\{V_i\ \middle|\ i\in\mathbb{N}\ \&\ \overline{V_i}\text{ es compacto}\right\}$$

es base también. Esto pues, para cada $x\in X$ y cualquier vecindad abierta U de x existe un $i\in\mathbb{N}$ tal que $\overline{V_i}$ es compacto y $x\in V_i\subseteq U$.

Para encontrar dicho i, sabemos que existe un G, vecindad de x compacta, pues X es localmente compacto. Luego, $G\cap U$ es una vecindad de x relativamente compacta. Y i es cualquiera tal que $V_i\subseteq G\cap U\subseteq U$, notar que V_i es relativamente compacto por ser subconjunto de otro relativamente compacto.

Al ordenar $\mathcal{B}$ obtenemos $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Sea $G_1 = U_1$, $k_1 = 1$ y si para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos que

$$G_{i+1} = \bigcup_{j=1}^{k_{i+1}} U_j \qquad \text{donde} \quad k_{i+1} = \min\left\{\ell \in \mathbb{N} \;\middle|\; \overline{G_i} \subseteq \bigcup_{j\le\ell} U_j\right\} + 1.$$

Tendremos una construcción recursiva para $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y (k_i). Tomemos cualquier i hasta donde la construcción haya funcionado, entonces tenemos k_i y G_i. Claro, $G_i = \bigcup_{j\le k_i} U_j$ por tanto $\overline{G_i}$ es compacto, notar que

$$\overline{G_i} = \overline{\bigcup_{j\le k_i} U_j} = \bigcup_{j\le k_i} \overline{U_j}.$$

Y como $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de $\overline{G_i}$ entonces existe un subrecubrimiento finito. Esto es $\left\{\ell \in \mathbb{N} \;\middle|\; \overline{G_i} \subseteq \bigcup_{j\le\ell} U_j\right\} \neq \emptyset$. Luego, es posible realizar el esquema una vez más. Y como el esquema se puede realizar al menos al principio entonces por inducción la construcción siempre se puede realizar.

Es claro que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\overline{G_i}$ es compacto y que $\overline{G_i} \subseteq G_{i+1}$. Por otro lado, (k_i) es estrictamente creciente y por la forma de $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\le k_i} U_j = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = X.$$

□

Lema 2.29. *Sea X un espacio topológico que es localmente compacto, Hausdorff, y II-numerable. Para cualquier cubrimiento abierto de X existe un refinamiento abierto contable localmente finito de solo conjunto relativamente compactos. Entonces X es un espacio para-compacto*

Demostración. Sea $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento arbitrario de abierto para X. Y si tomamos el cubrimiento abierto, $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$, de conjuntos relativamente compacto como en la proposición proposición 2.28. Debido a esto podemos fragmentar el espacio X en los siguientes conjuntos:

$$\left\{\overline{G_2}\right\} \cup \left\{\overline{G_i} \setminus G_{i-1} \mid i > 2\right\}$$

Escogemos estos conjuntos porque son compactos, por ello, podremos lograr la propiedad de la finitud local.

Ahora bien, necesitamos un refinamiento para $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que de alguna manera cubra la fragmentación que hicimos. La propuesta es

$$\bigcup_{2<i} \left\{U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \mid \alpha \in \Lambda\right\} \cup \{U_\alpha \cap G_3 \mid \alpha \in \Lambda\}$$

Claro, para cualquier $2 < i$ y $\alpha \in \Lambda$ entonces $U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right)$ es un abierto por ser intersección de abiertos. Además, $\left\{U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \mid \alpha \in \Lambda\right\}$ es un cubrimiento abierto de

$\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$, ver que

$$\begin{aligned} x \in \overline{G_i} \setminus G_{i-1} &\Longrightarrow x \in G_{i+1} \ \& \ x \notin G_{i-1}, \\ &\Longrightarrow x \in G_{i+1} \ \& \ x \notin \overline{G_{i-2}}, \\ &\Longrightarrow x \in G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}} \cap \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha, \\ &\Longrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}} \cap U_\alpha \right). \end{aligned}$$

Claro, como $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$ es compacto[ver apéndice sobre topología]. Por tanto, existe un Λ_i finito tal que para todo $\alpha \in \Lambda_i$, $U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \neq \emptyset$ y $\left\{U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \mid \alpha \in \Lambda_i\right\}$ es un recubrimiento de $\overline{G_i} \setminus G_{i-1}$. Lo mismo se puede hacer con $\{U_\alpha \cap G_3 \mid \alpha \in \Lambda\}$ y entonces tenemos

$$\mathcal{R} = \bigcup_{2<i} \left\{U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \mid \alpha \in \Lambda_i\right\} \cup \{U_\alpha \cap G_3 \mid \alpha \in \Lambda_2\}$$

Notar que si $x \in X \setminus \overline{G_2}$ entonces existe un $i > 2$ tal que $x \in G_i$. Claro escogemos i como el más pequeño de estos, así, $x \notin G_{i-1}$. Por tanto, $x \in \overline{G_i} \setminus G_{i-1}$. Así,

$$X = \overline{G_2} \cup \bigcup_{2<i} \overline{G_i} \setminus G_{i-1} = (\overline{G_2} \cap \bigcup_{\alpha \in \Lambda_i} U_\alpha) \cup \left(\bigcup_{2<i} \left[\overline{G_i} \setminus G_{i-1} \cap \bigcup_{\alpha \in \Lambda_i} U_\alpha \right) \right] = \bigcup \mathcal{R}.$$

Es decir que $\mathcal{R}$ es un cubrimiento abierto. Por otro lado, ver que por la forma de los elementos en $\mathcal{R}$, para todo $B \in \mathcal{R}$ existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que $B \subseteq U_\alpha$. Por tanto, $\mathcal{R}$ es un refinamiento abierto de $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Para ver que $\mathcal{R}$ es localmente finito. Tomemos $x \in X$ arbitrario, luego, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \overline{G_i} \setminus G_{i-1}$. Luego, $x \in G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}$ que es abierto. Llamemos $W := G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}$ y analicemos el conjunto

$$\{B \in \mathcal{R} \mid B \cap W \neq \emptyset\}$$

Si tomamos un $B \cap W \neq \emptyset$ entonces existe un $z \in B$ tal que $z \in G_{i+1}$ pero $z \notin \overline{G_{i-2}}$. De hecho, para todo $j < i$ se tiene que $z \notin G_{j-2}$. Luego, $z \notin G_{j+1} \setminus \overline{G_{j-2}}$. Por otro lado, si $j > i+1$ y asumimos $z \in G_{j+1} \setminus \overline{G_{j-1}}$ entonces tenemos una contradicción pues $z \in G_i \subseteq \overline{G_{j-1}}$.

$$\{B \in \mathcal{R} \mid B \cap W \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{i-1<j\leq i+1} \left\{U_\alpha \cap \left(G_{i+1} \setminus \overline{G_{i-2}}\right) \mid \alpha \in \Lambda_i\right\}$$

Por tanto, $\{B \in \mathcal{R} \mid B \cap W \neq \emptyset\}$ es finito. Y como x fue arbitrariamente escogido, $\mathcal{R}$ es localmente finito.

Así, tenemos que cualquier cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. Por tanto, X es paracompacto.

□

Corolario 2.30. *Si M es una variedad diferencial, M es un espacio paracompacto. En particular, como M es regular se tiene que M es un espacio topológico normal.*

Definición 2.9 (Partición de la unidad C^∞)**.** Sea M una n-variedad diferencial, una partición de la unidad C^∞ sobre M es una colección de funciones $C^\infty(M)$, $\{f_i \mid i \in I\}$ no negativas, tales que

(1) $\{\text{supp } f_i \mid i \in I\}$ es localmente finito.

(2) $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Esta partición de la unidad está subordinada a un cubrimiento $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ si para cada $i \in I$ existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que supp $\varphi_i \subseteq U_\alpha$.

Teorema 2.31 (Existencia de la partición de la unidad C^∞)**.** *Sea M una n-variedad diferencial y $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe una partición de la unidad, $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, de funciones de soporte compacto subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$.*

Demostración. Del lema 2.29 conocemos de la existencia de un refinamiento abierto para $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$. Digamos que es $\mathcal{R}$. Si tomamos $B \in \mathcal{R}$ arbitrario sabemos que existe una carta local, $(V, \tau) \in \mathscr{F}_M$ tal que $V \subseteq B$ y $\tau(V) \subseteq \prod_{i \leq n}[-2, 2]$. En esta demostración trabajaremos bastante con cubos en $\mathbb{R}^n$, su notación será $\sqsubseteq[r] := \prod_{i \leq n}[-r, r]$ y $\sqsubseteq(r) := \prod_{i \leq n}(-r, r)$ para todo $r > 0$.

Si definimos

$$\begin{aligned} \psi_B : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\longmapsto \begin{cases} \varphi \circ \tau(p) & \text{si } p \in V, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

con $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\varphi(\sqsubseteq[1]) = \{1\}$ y $\varphi(\mathbb{R}^n \setminus \sqsubseteq(2)) = \{0\}$. Para ver que $\psi_B \in C^\infty(M)$ primero ver que si $W := \tau^{-1}\left(\prod_{i \leq n}[-1, 1]\right)$ entonces como τ es homeomorfismo entonces W es un cerrado en M. Luego, $X \setminus W$ es un abierto tal que $\psi_B|_W \equiv 0$. Por tanto, $\psi_B|_W \in C^\infty(W)$. Por otro lado, $\psi_B \circ \tau^{-1} : \tau(V) \to \mathbb{R}$ es $\varphi|_{\tau(V)}$ es de clase C^∞. Y claro, $\{(V, \varphi)\}$ es un atlas diferencial para la sub-variedad diferencial abierta V. Luego, $\psi_B|_V \in C^\infty(V)$. Entonces ver que $X = V \cup W$ y entonces por el teorema 2.15 lema del pegado concluimos que $\psi_B \in C^\infty(M)$.

De este proceso hemos obtenido la colección de funciones $\{\psi_B \mid B \in \mathcal{R}\}$ que es contable pues $\mathcal{R}$ es contable. Notar que para cada $B \in \mathcal{R}$ se tiene

$$Y := \tau^{-1}\{\tau(V) \setminus \sqsubseteq(2)\} \cup (M \setminus V) \subseteq \{p \in M \mid \psi_B(p) = 0\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_B \subseteq \overline{M \setminus Y} &\subseteq \overline{V \setminus \tau^{-1}(\sqsubseteq(2))}, \\ &= V \setminus \tau^{-1}\{\sqsubseteq(2)\}, \\ &\subseteq B \subseteq \overline{B}. \end{aligned}$$

Y como $\overline{B}$ es compacto entonces ψ_B es de soporte compacto. Ahora, veamos que $\{\text{supp } \psi_B \,|B \in \mathcal{R}\}$ es una colección de subconjunto de M localmente finita. Por un lado sabemos que $\mathcal{R}$ es localmente finita, así, para cada $p \in M$ existe una vecindad abierta W_p tal que $J := \{B \in \mathcal{R} \mid W_p \cap B \neq \emptyset\}$ es finito. Como supp $\psi_B \subseteq B$ para todo $B \in \mathcal{R}$ entonces

$$\{B \in \mathcal{R} \mid W_p \cap \text{supp } \psi_B \neq \emptyset\} \subseteq J.$$

Y por ello, $\{B \in \mathcal{R} \mid W_p \cap \text{supp } \psi_B \neq \emptyset\}$ es finito. Dada la arbitrariedad de p entonces la colección de soportes para $\{\psi_B \,|B \in \mathcal{R}\}$ es localmente finita.

Una consecuencia de estas últimas comprobaciones, en particular de que la colección de soportes sea localmente finita, se deduce que $0 < \sum_{B\in\mathcal{R}} \psi_B(p) < +\infty$. Más aún, en W_p se cumple que $\sum_{B\in\mathcal{R}} \psi_B = \sum_{B\in J} \psi_B$ y por el teorema 2.14 tenemos que la restricción de $\sum_{B\in\mathcal{R}} \psi_B$ a W_p es de clase $C^\infty(W_p)$. Como $(W_p)_{p\in M}$ forma un cubrimiento abierto para M y la colección de funciones

$$\left(\left(\sum_{B\in\mathcal{R}} \psi_B \right)\Bigg|_{W_p} \,\Bigg|\, p \in M \right)$$

cumple con las hipótesis del lema del pegado 2.15 entonces se concluye que $\sum_{B\in\mathcal{R}} \psi_B$ es una función de clase $C^\infty(M)$.

Finalmente, la colección candidata a partición de la unidad es la siguiente

$$\left\{ \gamma_B := \frac{\psi_B}{\sum_{C\in\mathcal{R}} \psi_C} \,\middle|\, B \in \mathcal{R} \right\}$$

Que cada γ_B es de clase $C^\infty(M)$ es una consecuencia inmediata del teorema 2.14. Tenemos que $\gamma_B > 0$ y que $\{\text{supp } \gamma_B \mid B \in \mathcal{R}\}$ es localmente finito porque para cada $B \in \mathcal{R}$ se cumple supp $\gamma_B =$ supp ψ_B. Dado que $\sum_{B\in\mathcal{R}} \gamma_B = \mathbf{1}$, efectivamente, $\{\gamma_B \,|B \in \mathcal{R}\}$ es una partición de la unidad para M.

Esta partición de la unidad está subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$. Y esto no es más que una consecuencia de que $\mathcal{R}$ es un refinamiento del cubrimiento y entonces supp $\gamma_B \subseteq$ supp $\psi_B \subseteq B \subseteq U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$.

□

Corolario 2.32. *Sean A un cerrado de M y G abierto de M tal que $A \subseteq G$. Entonces existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que*

- $f(M) \subseteq [0, 1]$,
- $f|_A \equiv 1$,
- *supp* $f \subseteq G$.

Esto implica que como f es continua, M es un espacio topológico normal.

Capítulo 3 Análisis básico sobre variedades

Lección 8

3.1. Espacio tangente, fibrado tangente y otras herramientas

3.1.1. Haz de funciones de clase $C^\infty(M)$

Llevaremos en esta parte el enfoque actual al espacio tangente para las variedades diferenciales. Usaremos fuertemente la herramienta de haces. Es, para nosotros, la mas grande aplicación de lo expuesto en el chapter 1. No siendo más, entremos en contexto. Digamos M es una n-variedad diferencial a analizar. Claro, M es un espacio topológico y además tiene un atlas diferencial máximal que en síntesis le añade a M una colección de colecciones de funciones que llamamos de clase $C^\infty(U)$ con $U \subseteq M$ un abierto. Esto último es un prehaz sobre M.

Definición 3.1 (Prehaz de las funciones de clase C^∞)**.** Sea M una n-variedad diferencial. Se define *el prehaz de funciones de clase* C^∞, $\mathscr{O}_M : \mathbf{Op}^{op}(M) \to \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$, por:

(1) (**Secciones de** M) para cada sub-variedad abierta $V \subseteq M$, un *conjunto de secciones*,

$$\mathscr{O}_M(V) := \{f : V \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es una función de clase } C^\infty(V)\},$$

(2) (**Restricciones para** $\mathscr{O}_M$) para cada inclusión de sub-variedades abiertas $U \subseteq V \subseteq M$ una *restricción,*

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{V,U} : \mathscr{O}_M(V) &\longrightarrow \mathscr{O}_M(U) \\ f &\longmapsto f|_U \,. \end{aligned}$$

Observación. Esta colección de restricciones está bien definida, pues, como vimos si $f \in \mathscr{O}_M(V)$, $\mathrm{res}_{V,U}(f) = f|_U$ es una función de clase $C^\infty(U)$ con U sub-variedad abierta de M y por ello, $\mathrm{res}_{V,U}(f) \in \mathscr{O}_M(U)$, ver toda esta discusión en las proposiciones 2.13 y 2.7.

$\mathscr{O}_M$ es efectivamente un prehaz. Verificar los axiomas $(PH1)$ y $(PH2)$ de la definición 1.13, sabiendo que las aplicaciones restricción están bien definidas, es un ejercicio simple de funciones que dejamos al lector si duda sobre este aspecto.

Ejemplo 3.1. **(Prehaz $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}$)** Todo lo discutido alrededor de los ejemplos 2.8 y 2.18 dan como consecuencia que para todo abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathscr{O}_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$.

Para aliviar la notación, siempre preferiremos nueva notación. Así, ya no diremos que $f : U \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty(U)$ sino que diremos $f \in \mathscr{O}_M(U)$.

Pasemos a la discusión sobre el tallo del prehaz $\mathscr{O}_M$. Sea $p \in M$ un punto y el conjunto dirigido $(\mathcal{V}(p), \subseteq)$ de todas las vecindades abiertas de p. Recordar que la restricción de $\mathscr{O}_M$ a $\mathcal{V}(p) \subseteq \mathbf{Op}^{op}(M)$ sigue siendo un funtor covariante; esto implica que esta restricción es un sistema directo. De las observaciones sobre el tallo de $\mathscr{O}_M$ en $p \in M$, $\mathscr{O}_{M,p}$, vistas en la sección section 1.3, encontramos que,

$$\mathscr{O}_{M,p} := \varinjlim_{V\in\mathcal{V}(p)} \mathscr{O}_M(V) = \bigsqcup_{V\in\mathcal{V}(p)} \mathscr{O}_M(V) \Big/ \sim .$$

Con $(U, f) \sim (V, g)$ si y solo si existe $W \in \mathcal{V}(p)$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y $\mathrm{res}_{U,W}(f) = \mathrm{res}_{V,W}(g)$, junto a los morfismos obvios de cada sección en $\mathcal{V}(p)$ a $\mathscr{O}_{M,p}$.

También probamos que $\mathscr{O}_{M,p} \in \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$ con las siguientes operaciones para cualesquiera gérmenes $[U, f], [V, g] \in \mathscr{O}_{M,p}$ y $\beta \in \mathbb{R}$:

- $[U, f] + [V, g] := [U \cap V, \mathrm{res}_{U,U\cap V}(f) + \mathrm{res}_{V,U\cap V}(g)] = [U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}]$,
- $[U, f] \cdot [V, g] := [U \cap V, \mathrm{res}_{U,U\cap V}(f) \cdot \mathrm{res}_{V,U\cap V}(g)] = [U \cap V, f|_{U\cap V} \cdot g|_{U\cap V}]$,
- $\beta\ [U, f] := [U, \beta\ \mathrm{res}_{U,U}(f)] = [U, \beta\ \ f|_U]$.

Es preciso aclarar cierta notación que presentaremos posteriormente respecto a los gérmenes. Lo primero es que si $f \in \mathscr{O}_M(V)$ con $U \subseteq V$ entonces escribiremos $[U, f]$ en vez de $[U, \mathrm{res}_{V,U}(f)]$. Lo segundo, es que en cualquier caso que tengamos $f \in \mathscr{O}_M(V)$, $g \in \mathscr{O}_M(U)$ escribiremos $[U \cap V, f + g]$ y no $[U \cap V, f|_{U\cap V} + g|_{U\cap V}]$. Lo mismo para $[U \cap V, f \cdot g]$.

Observación. Un caso harto frecuente en todas nuestras discusiones es hablar de la n-sub-variedad abierta V de la n-variedad diferencial M. Es natural preguntarse si el tallo de cualquier punto $p \in V$ permanece invariante tanto si se ve desde el prehaz $\mathscr{O}_M$ como el prehaz $\mathscr{O}_V$. Para aclarar esto, veamos el siguiente morfismo de $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} T : \mathscr{O}_{M,p} &\longrightarrow \mathscr{O}_{V,p} \\ [U, f]_M &\longmapsto [U \cap V, f]_V. \end{aligned}$$

T está bien definido; esto porque si $[U, f]_M$ entonces existe $(U, f) \in \bigsqcup_{W\in\mathcal{W}(p)} \mathscr{O}_M(W)$. Sabemos que $(U \cap V, f) \in \bigsqcup_{W\in\mathcal{W}(p)} \mathscr{O}_M(W)$; por tanto, $[U \cap V, f]_V \in \mathscr{O}_{V,p}$. Comprobar que es un morfismo es un ejercicio simple dado otra vez al lector si ve necesario. Más aún, $S\ [U, f]_V := [U, f]_M$ para cualquier $[U, f]_V \in \mathscr{O}_{V,p}$ es el morfismo inverso de T. Por eso, se tiene que $\mathscr{O}_{M,p} \cong \mathscr{O}_{V,p}$.

Proposición 3.2. *Sea M una n-variedad diferencial y $p \in M$. El tallo del prehaz $\mathscr{O}_M$ en p, $\mathscr{O}_{M,p}$, es una $\mathbb{R}$-álgebra local. Al único ideal máximal de $\mathscr{O}_{M,p}$ lo denominamos $\mathfrak{m}_p$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m}_p$ el conjunto de todos los gérmenes, $[U, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$, tales que $f(p) = 0$. Notar que $\mathfrak{m}_p = \mathrm{Ker}\ \eta$ donde $\eta : \mathscr{O}_{M,p} \to \mathbb{R}$ es el homeomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras definido por $\eta\,([U, f]) := f(p)$ para todo $[U, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$. Y por ello, $\mathfrak{m}_p$ es un ideal de $\mathscr{O}_{M,p}$. Revisemos que

η está bien definida y lo otro queda para el lector. Si $[U, f] = [V, g]$ entonces existe $W \in \mathcal{V}(p)$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y $f|_W = g|_W$ y por tanto, $f(p) = g(p)$. Por ello, η está bien definida.

Se sabe más de $\mathfrak{m}_p$. Notar que si $\beta \in \mathbb{R}$ entonces la función constante $\beta\mathbf{1} : M \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty(M)$ como se vio en el ejemplo 2.17. Como $M \in \mathcal{V}(p)$ y $\beta\mathbf{1} \in \mathscr{O}_M(M)$ uno obtiene que $\eta([M, \beta\mathbf{1}]) = \beta\mathbf{1}(p) = \beta$. Esto muestra que η es un epimorfismo y del *primer teorema de isomorfismos* tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{M,p} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{R} \\
\mathscr{O}_{M,p}/\,\mathfrak{m}_p \arrow[ur, dashed, "\cong", "\hat{f}"']
\end{tikzcd}$$

Esto muestra que $\mathscr{O}_{M,p}/\,\mathfrak{m}_p$ es un cuerpo, que implica que $\mathfrak{m}_p$ es un ideal máximal.

De hecho, $\mathfrak{m}_p$ es el único ideal máximal. Para ver esto comprobaremos la condición (ii) de la proposición 1.20. Si $[U, f] \notin \mathfrak{m}_p$ entonces $f(p) \neq 0$. Digamos $V_\varepsilon f(p)$ es una vecindad abierta de $f(p)$ que no tiene a 0 entonces como f es una función continua tenemos que $W := f^{-1}(V_\varepsilon f(p))$ es una sub-variedad abierta de M alrededor de p. Esto nos permite asegurar que $f|_W$ nunca se anula y por el teorema 2.14 es cierto que, $1/(f|_W) \in \mathscr{O}_M(W)$. $[W, 1/(f|_W)] \in \mathscr{O}_{M,p}$ es el inverso de $[U, f]$ en $\mathscr{O}_{M,p}$. Por tanto, $\mathscr{O}_{M,p} \setminus \mathfrak{m}_p$ consta solo de unidades.

□

Teorema 3.3. *Sea M una n-variedad diferencial. El prehaz de funciones de clase C^∞, $\mathscr{O}_M$, es un haz sobre M.*

Demostración. La propiedad del **Pegado** en la definición 1.17 es una consecuencia inmediata del teorema 2.15 y la propiedad de **Unicidad** es consecuencia conjuntista dada la naturaleza de las secciones de $\mathscr{O}_M$.

□

3.1.2. Variedades diferenciales como espacios localmente anillados

En lo visto hasta ahora y en lo que se verá más adelante, el haz de funciones suaves de una variedad diferencial juega un rol fundamental. Si bien toda la teoría puede desarrollarse sin hacer mención directa a los haces y espacios localmente anillados, en la matemática moderna solemos tomar este lenguaje como punto de partida, pues permite extender las nociones de la topología y geometría diferencial a otros contextos tales como la geometría compleja, geometría algebraica, etc.

Esta subsección puede ser omitida sin perjuicio del resto del contenido de este trabajo. Sin embargo, es aquí donde se evidencia la importancia de lo presentado en las primeras secciones.

Teorema 3.4. *Sea M una variedad diferencial y $\mathcal{O}_M$ su haz de funciones suaves, entonces $(M, \mathcal{O}_M)$ es un espacio localmente anillado en $\mathbb{R}$-álgebras*
Recíprocamente, sea $(M, \mathcal{O}_M)$ un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras, tal que M es Hausdorff,

segundo contable y asuma que existe un cubrimiento abierto $(U_i)_{i\in I}$ con la propiedad de que para cada $i \in I$ existe un abierto $\hat{U}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que los espacios localmente anillados $(U_i, \mathcal{O}_M|_{U_i})$ y $(\hat{U}_i, \mathcal{O}_{\hat{U}_i})$ son isomorfos, donde $(\hat{U}_i, \mathcal{O}_{\hat{U}_i})$ es el espacio localmente anillado estudiado en 1.4.2. Entonces M es una variedad diferencial y $\mathcal{O}_M$ es (isomorfo a) su haz de funciones suaves.

Demostración. El hecho de que $(M, \mathcal{O}_M)$ es un espacio localmente anillado en $\mathbb{R}$-álgebras, provisto que M es una variedad diferencial, es el contenido de la Proposición 3.2.

Asumamos las hipótesis de la implicación contraria, y para cada $i \in I$ sea $(\varphi_i, \varphi_i^{\#}) : (U_i, \mathcal{O}_M|_{U_i}) \to (\hat{U}_i, \mathcal{O}_{\hat{U}_i})$ un isomorfismo de espacios localmente anillados en $\mathbb{R}$-álgebras. En particular, $\varphi_i : U_i \to \hat{U}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, de modo que M es una variedad topológica. Para probar que M es una variedad diferencial, debemos probar que

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es suave. Para ello sean $x^r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la proyección sobre la r-ésima componente. Para evitar saturación con índices, escribamos $U = U_i$, $V = U_j$, $W = U \cap V$, $\varphi = \varphi_i$ y $\psi = \varphi_j$. Con esto obtenemos un isomorfismo de haces dado por la composición

$$\mathcal{O}_{\hat{U}}|_{\varphi(U\cap V)} \xrightarrow{\quad \varphi^{\#} \quad} (\varphi_* \mathcal{O}_M|_U)|_{U\cap V} \xrightarrow{(\psi\circ\varphi^{-1})_*(\psi^{\#})^{-1}} (\psi \circ \varphi^{-1})_*^{-1} \mathcal{O}_{\hat{V}}|_{\psi(U\cap V)},$$

y por lo probado en 1.4.2, esto implica que $\psi \circ \varphi^{-1}$ es suave.

Finalmente, es claro por hipótesis que $\mathcal{O}_M$ es un haz isomorfo al haz de funciones suaves de M. Esto completa la demostración. $\square$

3.1.3. Espacio tangente $\mathbf{T}_p(M)$

Para empezar la discusión del espacio tangente primero desarrollaremos un ejemplo de lo que después llamaremos espacio tangente.

Ejemplo 3.5. (Derivación lineal usual en $\mathbb{R}^n$) Volviendo a la definición A.5, hablamos que para cualquier $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, f era diferenciable y existe su derivada $Df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ que cumple cierta aproximación. Lo que queremos destacar ahora es que podemos definir una serie de funciones con propiedades interesantes desde $C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$. Pues bien, si tomamos $a \in \mathbb{R}^n$ entonces por la identificaciones necesarias tenemos $D|_{a,\Omega} : C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido tal que $D|_{a,\Omega}\ (f) := Df(a)$ para todo $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$.

Más aún, por la teorema A.2 tenemos que $D|_a$ es una aplicación lineal. Si en cambio, tomamos $0 < j \leq n$ entonces de la definición A.2 y la identificación tenemos

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{a,\Omega} : C^\infty(\Omega; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_a \end{aligned}$$

Por lo que, no solo que esta es una aplicación lineal sino que

$$\left.\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x^j}\right|_{a,\Omega} = f(a) \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_{a,\Omega} + g(a) \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial x^j}\right|_{a,\Omega}$$

para todo $f, g \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Esto significa ser una derivación lineal.

Podemos apreciar que el dominio de f no juega relevancia, esto dentro de los posibles dominios que podría tener (vecindades abiertas de a). Por aquello, nos preguntamos si de alguna manera podemos eliminar esa información. La respuesta es la siguiente derivación lineal

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_a : \mathscr{O}_{\mathbb{R}^n,a} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [U,f] &\longmapsto \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_a. \end{aligned}$$

Con este ejemplos se puede empezar a hablar del espacio tangente de una n-variedad diferencial.

Definición 3.2 (Espacio tangente)**.** Sea M una n-variedad diferencial y p un punto de M. Una derivación lineal en el tallo de $\mathscr{O}_M$ en p, $\mathscr{O}_{M,p}$, hacia $\mathbb{R}$ es cualquier $v : \mathscr{O}_{M,p} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $[U,f],[V,g] \in \mathscr{O}_{M,p}$ y todo $\beta \in \mathbb{R}$ que cumple:

(1) $v([U,f]+[V,g]) = v([U,f]) + v([V,g])$,

(2) $v([U,f]\cdot[V,g]) = f(p)\cdot v([U,f]) + g(p)\cdot v([U,f])$,

(3) $v(\beta\ [U,f]) = \beta\ v([U,f])$.

A la colección de todas las derivaciones lineales se le conoce como *espacio tangente a M en p*, $\mathbf{T}_p(M)$. Con las operaciones habituales sobre funciones $\mathbf{T}_p(M)$ es un espacio vectorial.

Observación. Otra vez, nos preguntamos en una n-variedad diferencial M y $V \subseteq M$ abierto, si hay alguna ambigüedad en hablar de $\mathbf{T}_p(M)$ o de $\mathbf{T}_p(V)$. Veremos que son isomorfos naturalmente. Dicho isomorfismo es el siguiente:

$$\begin{aligned} T : \mathbf{T}_p(M) &\longrightarrow \mathbf{T}_p(V) \\ v &\longmapsto T(v) \end{aligned}$$

donde $T(v) : \mathscr{O}_{V,p} \to \mathbb{R}$ tal que $T(v)\ [U,f]_V := v([V,f]_M)$. Para cualquier $v \in \mathbf{T}_p(M)$ se tiene que $T(v)$ es una aplicación lineal por ser composición de v y el isomorfismo entre $\mathscr{O}_{V,p}$ y $\mathscr{O}_{M,p}$. Es una derivación porque para cualesquier $[U,f]_V,[W,g]_V \in \mathscr{O}_{V,p}$ se cumple que

$$\begin{aligned} T(v)\ ([U,f]_V\cdot[W,g]_V) &= V([[U,f]_M\cdot[W,g]_M]), \\ &= f(p)\cdot v([U,f]_M) + g(p)\cdot v([W,g]_M), \\ &= f(p)\cdot T(v)\ [U,f]_V + g(p)\cdot T(v)\ [W,g]_V. \end{aligned}$$

La inversa es $S : \mathbf{T}_p(V) \longrightarrow \mathbf{T}_p(M)$ donde para cada $w \in \mathbf{T}_p(V)$, $S(w) : \mathscr{O}_{M,p} \to \mathbb{R}$ se define por $S(w)\ [W,g]_M := w([W\cap V,g]_V)$ para todo $[W,g]_M \in \mathscr{O}_{M,p}$. Con esto, $\mathbf{T}_p(M) \cong \mathbf{T}_p(V)$.

Menos arbitrario es la definición 3.2 cuando nos damos cuenta que comparten la misma dimensión de la variedad. A continuación, una serie de razonamientos que buscan comprobar este hecho.

Lema 3.6. *Denominamos como espacio tangente de Zariski para p en la n-variedad diferencial M al espacio vectorial $\left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^*$. Es cierto que $\left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^* \cong \mathbf{T}_p(M)$.*

Demostración. A los elementos de $\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2$ que son clases de equivalencias lo llamamos $\{[U,f]\}$ para cualquier $[U,f] \in \mathfrak{m}$. Ahora, definamos $S : \mathbf{T}_p(M) \to \left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^*$ de tal manera que para todo $v \in \mathbf{T}_p(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} S(v) : \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \{[U,f]\} &\longmapsto v\left([U,f]\right). \end{aligned}$$

Para comprobar que S es una función bien definida tenemos que ver que para todo $v \in \mathbf{T}_p(M)$, $S(v)$ está bien definida y que $S(v) \in \left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^*$. Digamos que tenemos $\{[U,f]\} = \{[V,g]\}$ y ver que $[U,f] - [V,g] \in \mathfrak{m}_p^2 \subseteq \mathscr{O}_{M,p}$. Esto implica que existen dos colecciones de elementos finitos en $\mathfrak{m}_p$ tales que $[U,f] - [V,g] = \sum_{i \in I}[W_i,h_i] \cdot [Z_i,\ell_i]$. Dado que v es una derivación lineal entonces

$$\begin{aligned} S(v)\left([U,f] - [V,g]\right) = v\left([U,f] - [V,g]\right) &= v\left(\sum_{i\in I}[W_i,h_i]\cdot[Z_i,\ell_i]\right), \\ &= \sum_{i\in I} v\left([W_i,h_i]\cdot[Z_i,\ell_i]\right), \\ &= \sum_{i\in I} h_i(p)\cdot v\left([W_i,h_i]\right) + v\left([Z_i,\ell_i]\right)\cdot \ell_i(p), \\ &= \sum_{i\in I} 0\cdot v\left([W_i,h_i]\right) + v\left([Z_i,\ell_i]\right)\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $S(v)\left([U,f]\right) = S(v)\left([V,g]\right)$ y $S(v)$ está bien definida. $S\ v$ es lineal porque esa propiedad la hereda de v que es lineal. Por todo esto, si, S es una función bien definida.

La linealidad de S se tiene de la siguiente igualdad para todo $[U,f] \in \mathfrak{m}_p$, $v,w \in \mathbf{T}_p(M)$ y $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S(v+\beta w)\left\{[U,f]\right\} = v\left([U,f]\right) + \beta w\left([U,f]\right) &= S\ v\left\{[U,f]\right\} + \beta\ S\ w\left\{[U,f]\right\}, \\ &= \left(S\ v + \beta\ S\ w\right)\left\{[U,f]\right\}. \end{aligned}$$

Por último falta ver que S es un isomorfismo. Por tanto, primero probemos la inyectividad de S verificando que $\mathbf{Ker}\ S = \{0\}$. Tomemos un $v \in \mathbf{Ker}\ S$ y un $[U,f] \in \mathscr{O}_{M,p}$ cualquiera. Ya vimos en los ejemplo 2.17 que la función constante $f(p)\ \mathbf{1} \in \mathscr{O}_M(M)$; por tanto, $[M, f(p)\ \mathbf{1}] \in \mathscr{O}_{M,p}$ es el gérmen de esta función constante y cumple que $[U,f] - [M, f(p)\mathbf{1}] \in \mathfrak{m}$ porque $f(p) - f(p)\mathbf{1}(p) = 0$. Como v está en $\mathbf{Ker}\ S$ entonces $S\ v\left\{[U,f]\right\} = v([U,f]) = 0$. Dada la arbitrariedad de $[U,f]$ en el tallo de M en p entonces $v = 0$. Y con ello, S es inyectiva como dijimos.

La comprobación de la sobreyectividad de S va tal que así. Si tomamos $w \in \left(\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2\right)^*$ podemos definir la función v tal que

$$\begin{aligned} v : \mathscr{O}_{M,p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [U,f] &\longmapsto w\left\{[U,f] - [U, f(p)\mathbf{1}]\right\} \end{aligned}$$

claramente v está bien definida porque como vimos antes $[U,f] - [M, f(p)\mathbf{1}] \in \mathfrak{m}_p$. El procedimiento rutinario para comprobar la linealidad de v no es difícil. Para ver que es una derivación no es tan sencillo y se procede así. Tomemos $[U,f], [V,g] \in \mathscr{O}_{M,p}$ y notar que

$$v\left([U,f]\cdot[V,g]\right) = w\Big\{\ [U\cap V, fg] - [U\cap V, f(p)\mathbf{1}\cdot g(p)\mathbf{1}]\ \Big\}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
[U\cap V, fg]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\cdot g(p)\mathbf{1}] &= [U\cap V, fg]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\cdot g(p)\mathbf{1}] \\
+\Big(\ [U\cap V, f(p)\mathbf{1}\ g]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\ g]\ \Big) &+ \Big(\ [U\cap V, g(p)\mathbf{1}\ f]-[U\cap V, g(p)\mathbf{1}\ f]\Big),\\
&= ([U\cap V, f]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}])\cdot([U\cap V, g]-[U\cap V, g(p)\mathbf{1}])\\
&\qquad + [U\cap V, g(p)\mathbf{1}\ f]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\ g].
\end{aligned}$$

Notar que $([U\cap V, f]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}])\cdot([U\cap V, g]-[U\cap V, g(p)\mathbf{1}])\in\mathfrak{m}_p^2$ y esto dice que su clase de equivalencia en $\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2$ es 0. A su vez, esto implica lo siguiente

$$\begin{aligned}
w\left\{[U\cap V, fg]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\cdot g(p)\cdot\mathbf{1}]\right\} &= w\left\{[U\cap V, g(p)\mathbf{1}\ f]-[U\cap V, f(p)\mathbf{1}\ g]\right\},\\
&= v\left([U\cap V, g(p)\mathbf{1}\ f]\right)+v\left([U\cap V, f(p)\mathbf{1}\ g]\right).
\end{aligned}$$

Luego, $v\left([U,f]\cdot[V,g]\right)=f(p)\ v\left([V,g]\right)+g(p)\ v\left([U,f]\right)$. Y comprobamos que es una derivación. Con lo que, $v\in\mathbf{T}_p(M)$. Más aún, $S\ v=w$ pues para todo $[U,f]\in\mathfrak{m}_p$ se tiene que $[U,f(p)\mathbf{1}]=[W,\mathbf{0}]$ y entonces $S(v)\left\{[U,f]\right\}=w\left\{[U,f]-[U,\mathbf{0}]\right\}=w\left\{[U,f]\right\}$.

□

Lo que sigue es probar que $(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2)^*$ es de dimensión finita y que coincide con la dimensión de la variedad diferencial. Para ello, primero veremos un lema sobre funciones de clase $C^\infty(M)$:

Teorema 3.7. *Para cualquier punto p de una n-variedad diferencial M se cumple que el espacio tangente de Zariski, $\left(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\right)^*$, es de dimensión n.*

Demostración. Sea (U,φ) una carta local de M alrededor p tal que U es un conjunto conexo como vimos en el ejemplo 2.16, el sistema de coordenadas correspondiente (φ_j) es tal que para cada $0<j\le n$, $\varphi_j\in\mathscr{O}_M(U)$. Lo que haremos ahora es mostrar que el siguiente conjunto es una base para $\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2$:

$$\mathscr{B}=\left\{\ \{[U,\varphi_j]-[U,\varphi_j(p)\mathbf{1}]\}\in\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\ \middle|\ 0<j\le n\right\}$$

Por tanto, es de dimensión finita. Teniendo por consecuencia que

$$\dim\left(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\right)=\dim\left(\mathfrak{m}_p\big/\mathfrak{m}_p^2\right)^*=n.$$

Para empezar probemos que $\mathscr{B}$ es una colección de vectores linealmente independientes. Para ver esto tomemos una combinación lineal de vectores en $\mathscr{B}$ que se anule y comprobar que en consecuencia esos escalares son todos ceros. Notar que como $\mathscr{B}\subseteq\mathfrak{m}\big/\mathfrak{m}_p^2$, decir que la combinación se anule no es más que la combinación de cualquiera de sus representantes es parte de $\mathfrak{m}_p^2$. Es decir, si $\gamma:=\sum_{0<j\le n}\beta_j\cdot(\varphi_j-\varphi_j(p)\ \mathbf{1})$, asumimos que

$$\sum_{0<j\le n}\beta_j\cdot\left(\ [U,\varphi_j]-[U,\varphi_j(p)\mathbf{1}]\ \right)=[U,\gamma]\in\mathfrak{m}_p^2.$$

Como consecuencia inmediata $W \in \mathcal{V}(p)$ y dos colección de gérmenes $([W_j, g_j])_{0<j\leq n}$ y $([V_j, h_j])_{0<j\leq n}$ en $\mathfrak{m}_p$ tales que

$$[U, \gamma] = \sum_{0<j\leq n} [W, g_j] \cdot [W, h_j].$$

En adelante, solo hablaremos de funciones en $Z := \bigcup_{0<j\leq n} W_j \cap V_j$. Notar que

$$\gamma \circ \varphi^{-1} = \sum_{0<j\leq n} (g_j \cdot h_j) \circ \varphi^{-1} = \sum_{0<j\leq n} (g_j \circ \varphi^{-1}) \cdot (h_j \circ \varphi^{-1})$$

Y cada $[Z, g_j \circ \varphi^{-1}], [Z, h_j \circ \varphi^{-1}] \in \mathfrak{n}_{\varphi(p)}$ entonces $[Z, \gamma \circ \varphi^{-1}] \in \mathfrak{n}^2_{\varphi(p)}$. Por otro lado,

$$\gamma \circ \varphi^{-1} = \sum_{0<j\leq n} \beta_j \cdot \left(\varphi_j \circ \varphi^{-1} - \pi_j\left(\varphi(p)\right) \mathbf{1} \circ \varphi^{-1}\right) = \sum_{0<j\leq n} \beta_j \cdot \left(\pi_j - \pi_j\left(\varphi(p)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}\right)$$

Combinando estos resultados y la derivación lineal usual del ejemplo 3.5, de la demostración anterior tenemos que a derivación se va anular en este gérmen. Esto concluye lo requerido. De manera más precisa, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = \left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}\right|_{\varphi(m)} [Z, \gamma \circ \varphi^{-1}] &= \left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p), Z} \left\{\sum_{0<j\leq n} \beta_j \cdot \left(\pi_j - \pi_j\left(\varphi(p)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}\right)\right\}, \\
&= \sum_{0<j\leq n} \beta_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p), Z} \left(\pi_j - \pi_j\left(\varphi(p)\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}\right), \\
&= \sum_{0<j\leq n} \beta_j \left.\frac{\partial \pi_j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} - \pi_j\left(\varphi(p)\right) \left.\frac{\partial \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}, \\
&= \beta_i.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathscr{B}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ver que $\mathscr{B}$ genera a $\mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2$ es una consecuencia inmediata del lema 2.19. Ver que sea $\{[U, f]\} \in \mathfrak{m}_p \big/ \mathfrak{m}_p^2$ entonces $f \in \mathscr{O}_M(U)$ y U es conexo por tanto, existe $h \in \mathscr{O}_M(U)$ tal que

$$\begin{aligned}
f &= f(p)\mathbf{1} + \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}) + \sum_{0<i,j\leq n} (\varphi_i - \varphi_i(p)\mathbf{1})(\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1})h, \\
&= \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}) + \sum_{0<i,j\leq n} (\varphi_i - \varphi_i(p)\mathbf{1})(\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1})h.
\end{aligned}$$

Claro para cada $0 < i, j \leq n$ se tiene que $[U, \varphi_i - \varphi_i(p)\mathbf{1}], [U, \varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}] \in \mathfrak{m}_p$. Luego, por definición de $\mathfrak{m}_p^2$ se tiene que $\sum_{i,j} [U, \varphi_i - \varphi_i(p)\mathbf{1}] \cdot [U, \varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}]$ es parte de este ideal. Por la naturaleza del ideal podemos concluir aún más,

$$\{[U, f]\} = \sum_{0<j\leq n} \left\{\left[U, \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} (\varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1})\right]\right\}.$$

Pero por la identificación de la derivada parcial tenemos

$$\{[U, f]\} = \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \left\{[U, \varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}]\right\}.$$

Por tanto, $\langle \mathscr{B} \rangle = \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$.

$\square$

Corolario 3.8. *Toda n-variedad diferencial M es tal que* $\dim \mathbf{T}_p(M) = n$ *para cualquier $p \in M$.*

Ejemplo 3.9. (Derivada direccional de una función de clase $C^\infty(M)$) Sea M una n-variedad diferencial, $p \in M$ y un sistema de coordenadas $(U; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ asociado a (U, φ). Denominamos para cada $0 < j \leq n$ la *derivada direccional en p respecto a la dirección coordenada φ_j* al siguiente vector tangente en $\mathbf{T}_p(M)$,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right|_p : \mathscr{O}_{M,p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [V, f] &\longmapsto \left.\frac{\partial\left(f \circ \varphi^{-1}\right)}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)}. \end{aligned}$$

Esto se comprueba al tomar dos gérmenes $[V, f], [W, g] \in \mathscr{O}_{M,p}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y ver que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(V \cap U); \mathbb{R})$, $g \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(W \cap U); \mathbb{R})$. Por tanto, sobre $Z := \varphi(V \cap U) \cap \varphi(W \cap U)$ se tiene que

$$(f + \beta g) \circ \varphi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} + \beta\ g \circ \varphi^{-1} \qquad \text{y} \qquad (f \cdot g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \cdot (g \circ \varphi^{-1}).$$

Y de lo visto en el teorema A.2 sobre propiedades algebraicas de la derivada se concluye que $\left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi_j}\right|_p$ es, efectivamente, una derivación lineal como se quería.

Una Base Explícita para $\mathbf{T}_p(M)$

Con todo lo visto en el teorema 3.7 y el corolario 3.8, tenemos el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_p(M) \arrow[r, "S"] \arrow[rr, bend right, dashed, "T"'] & \left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^* \arrow[r, "\delta^{-1}"] & \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \end{tikzcd}$$

donde S es el isomorfismo del lema 3.6, δ es el isomorfismo usual entre un espacio y su dual para la base en $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$, (r_j), con $r_j := \{[U, \varphi_j] - [U, \varphi_j(p)\mathbf{1}]\} \in \mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2$. Y $T = \delta^{-1} \circ S$ por tanto isomorfismo. Y entonces $\left(T^{-1}(r_j)\right)_{0<j\leq n}$ es una base para $\mathbf{T}_p(M)$.
Hallaremos de forma explícita $T^{-1}(r_j)$ para cada j. Para ello recordemos del álgebra lineal básica que para cada r_j, δ_j es la imagen de r_j a través de δ y está definida por $\delta_j(r_i) := 0$ si $i \neq j$ y $\delta_j(r_i) := 1$ caso contrario. De hecho, $(\delta_j)_j$ es una base para $\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^*$ y δ^{-1} es tal que $\delta^{-1}\left(\sum_j \alpha^j\ \delta_j\right) := \sum_j \alpha^j\ r_j$.
También ver que

$$S^{-1}(\delta_j)\ [U, f] := \delta_j \left\{[U, f] - [U, f(p)\mathbf{1}]\right\} \qquad \text{para todo } [U, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$$

Entonces sea $[U, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$ cualquiera entonces $[U, f - f(p)\mathbf{1}] \in \mathfrak{m}_p$ y

$$\begin{aligned} \{[U, f - f(p)\mathbf{1}]\} &= \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial((f - f(p)\mathbf{1}) \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \{[U, \varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}]\}, \\ &= \sum_{0<j\leq n} \left(\left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} - f(p) \left.\frac{\partial(\mathbf{1} \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(p)} \right) \{[U, \varphi_j - \varphi_j(p)\mathbf{1}]\}, \\ &= \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi_j}\right|_p r_j. \end{aligned}$$

Entonces $S^{-1}(\delta_j)\ [U,f] = \left.\frac{\partial f}{\partial \varphi_j}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right|_p\ [U,f]$. Concluyendo que $\left(\left.\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right|_p\right)_j$ es una base para $\mathbf{T}_p(M)$.

El siguiente concepto va de la mano del espacio tangente, no es más que una generalización de la derivada presentada en la definición A.1.

Definición 3.3 (Diferencial de una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$ en un punto)**.** Sean M, N dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$. Se define el *diferencial de F en $p \in M$*, $\mathrm{d}F_p : \mathbf{T}_p(M) \longrightarrow \mathbf{T}_{F(p)}(N)$, tal que para todo $v \in \mathbf{T}_p(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p(v) : \mathscr{O}_{N,F(p)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [V,g] &\longmapsto v\ [F^{-1}(V), g \circ F] \end{aligned}$$

También se define *la aplicación dual de ψ en p*, $\delta F_p : \mathbf{T}_{F(p)}(N)^* \longrightarrow \mathbf{T}_p(M)^*$, tal que para todo $\omega \in \mathbf{T}_{F(p)}(N)^*$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta F_p(\omega) : \mathbf{T}_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \omega(\mathrm{d}F_p(v)) \end{aligned}$$

Observación. El diferencial es una aplicación lineal. Notar que sean $v, w \in \mathbf{T}_p(M)$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se cumple para todo $[U,f] \in \mathscr{O}_{N,\Gamma(p)}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_p(v + \beta w)\ [U,f] &= (v + \beta w)\ [F^{-1}(U), f \circ F] \\ &= v\ [F^{-1}(U), f \circ F] + \beta\ w\ [F^{-1}(U), f \circ F], \\ &= (\mathrm{d}F_p(v) + \beta\ \mathrm{d}F_p(w))\ [U,f]. \end{aligned}$$

Dado esto, es un resultado de álgebra que δF_p es un aplicación lineal. Más aún, la inyectividad de $\mathrm{d}F_p$ equivale a la sobreyectividad de δF_p y la sobreyectividad de $\mathrm{d}F_p$ equivale a la inyectividad de δF_p.

Observación. El diferencial de la restricción de una aplicación de clase C^∞ es la misma que el diferencial de la aplicación en ese punto.

Ahora, vamos a ver una conexión entre el espacio tangente presentado y la idea geométrica de que un espacio tangente se produce de todos los vectores tangentes a una curva.

Teorema 3.10 (Teorema de la cadena)**.** *Sean M, N, Q tres variedades diferenciales y $F : M \to N$, $G : N \to Q$ dos aplicaciones de clase C^∞. Entonces se tiene que $G \circ F$ es una aplicación de clase $C^\infty(M;Q)$ y para cada $p \in M$:*

$$\mathrm{d}(G \circ F)_p = \mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p$$

Demostración. Que $G \circ F$ es una aplicación de clase $C^\infty(M;Q)$ ya lo explicamos en el teorema 2.21. Por otro lado, si tomamos $p \in M$, $v \in \mathbf{T}_p(M)$ y $[U,f] \in \mathscr{O}_{Q,G\circ F(p)}$ cualesquiera entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(G \circ F)_p(v)\ [U,f] &= v\ [(G \circ F)^{-1}(U), f \circ (G \circ F)], \\ &= v\ [F^{-1}\left(G^{-1}(U)\right), (f \circ G) \circ F]. \end{aligned}$$

Es claro que $f \circ G \in \mathscr{O}_N\left(G^{-1}(U)\right)$ y por tanto, $[\psi^{-1}(U), f \circ G] \in \mathscr{O}_{N,F(p)}$. Luego, por la definición 3.3 tenemos que $\mathrm{d}(G \circ F)_p(v)\ [U,f] = \mathrm{d}F_p(v)\ [G^{-1}(U), f \circ G]$. Por otro lado, $\mathrm{d}F_p \in \mathbf{T}_{F(p)}(N)$, $\mathrm{d}G_{F(p)} : \mathbf{T}_{F(p)}(N) \to \mathbf{T}_{G(F(p))}$ y $[U,f] \in \mathscr{O}_{Q,G(F(p))}$. Así, por la definición 3.3 tenemos que

$$\mathrm{d}(G \circ F)_p(v)\ [U,f] = \mathrm{d}G_{F(p)}(\mathrm{d}F_p(v))\ [U,f] \qquad \text{para todo } [U,f] \in \mathscr{O}_{Q,G\circ F(p)}.$$

Por tanto, $\mathrm{d}(G \circ F)_p(v) = \mathrm{d}G_{F(p)}\left(\mathrm{d}F_p(v)\right) = \mathrm{d}G_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p(v)$ para todo $v \in \mathbf{T}_p(M)$.

□

Corolario 3.11. *Sean M, N dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$. Si F es biyectiva y $F^{-1} : N \to M$ una aplicación de clase $C^\infty(N;M)$ entonces para todo $p \in M$ se tiene que $\mathrm{d}F_p$, $\mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)}$ son invertibles,*

$$\mathrm{d}F_p \circ \mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)} = \mathrm{id}_{\mathbf{T}_{F(p)}(N)} \qquad y \qquad \mathrm{d}(F^{-1})_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p = \mathrm{id}_{\mathbf{T}_p(M)}.$$

Este ejercicio queda como un ejercicio para el lector. Volviendo al análisis sobre variedades diferenciales tenemos los siguientes dos teoremas:

Teorema 3.12. *Sea M una n-variedad diferencial conexa, N una m-variedad diferencial y $F : M \to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M;N)$. Si suponemos que para todo $p \in M$, $\mathrm{d}F_p = 0$. Entonces F es una aplicación constante.*

Demostración. Probemos que la aplicación F es localmente constante. Tomamos un $p \in M$ cualquiera, un sistema de coordenadas sobre M $(V;\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ y un sistema de coordenadas sobre N, $(V;\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$. Nuestro objetivo entonces es probar que la representación local de F, $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, es constante. Y como hablamos de una función en $C^\infty(\varphi(U \cap F^{-1}(V));\mathbb{R}^m)$ donde $\varphi(U \cap F^{-1}(V))$ es conexo (cosa que puede comprobar el lector); lo mejor será probar que su derivada es 0 en todo el dominio.

Tomemos $q \in U \cap F^{-1}(V)$ y analicemos los siguientes vectores tangente sobre M, introducidos en el ejemplo 2.16, para cada $0 < j \leq n$

$$\mathrm{d}F_q\left(\left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi_j}\right|_q\right) \equiv 0 \in \mathbf{T}_{F(q)}(N).$$

De nuestras definiciones, para cualquier $0 < k \leq m$ se tiene que $[V,\psi_k] \in \mathscr{O}_{N,F(q)}$ y

$$\mathrm{d}F_q\left(\left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi_j}\right|_q\right)\ [V,\psi_k] = \left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial\varphi_j}\right|_q\ [F^{-1}(V),\psi_q \circ F] = \left.\frac{\partial((\psi_k \circ F)\circ\varphi^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi(q)} = 0.$$

Esto implica de la definición A.5 y del teorema A.8 que $D((\psi_k \circ F)\circ\varphi^{-1})\ (\varphi(q)) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})}$. Pero como k fue arbitrariamente elegido, $D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})\ (\varphi(q)) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}$. Así, por la arbitrariedad de q en $W := \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap F^{-1}(V)) \in \mathcal{V}(p)$, se tiene que $F|_W \equiv F(p)$. Terminando la comprobación de que F es localmente constante. Concluimos que F es constante porque M es conexo.

□

Ejemplo 3.13. Diferencial para aplicaciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ Digamos que $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$ con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto es una aplicación de clase $C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ como en la definición 2.6. A cada punto $p\in\Omega$ le corresponde su diferencial, $\mathrm{d}F_p:\mathbf{T}_p(\Omega)\to\mathbf{T}_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$. Pero por el corolario 3.8 tenemos que $\mathbf{T}_p(\Omega)\cong\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{T}_{F(p)}(\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^m$ y de ello $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\cong\mathscr{L}(\mathbf{T}_p(\Omega);\mathbf{T}_{F(p)}(\mathbb{R}^m))$. En este ejemplo el objetivo es explicitar dicho isomorfismo; de manera más específica, encontrar el representante de $\mathrm{d}F_p$ en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Analicemos el comportamiento de $\mathrm{d}F_p$. De la definición 3.3 como $[W,f]\in\mathscr{O}_{\mathbb{R}^m,F(p)}$, para cualquier $0<k\leq m$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial\pi_j}\right|_p\right)[V,f]=\left.\frac{\partial}{\partial\pi_j}\right|_p[F^{-1}(V),f\circ F]&=\left.\frac{\partial(f\circ F)}{\partial\pi_j}\right|_p,\\&=\left.\frac{\partial((f\circ F)\circ\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1})}{\partial x^j}\right|_p,\\&=\left.\frac{\partial(f\circ F)}{\partial x^j}\right|_p.\end{aligned}$$

Sin embargo, $f\circ F:F^{-1}(V)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ es bien conocido de la appendix A.2. Podemos usar la regla de la cadena teorema A.1 y ver que

$$\left.\frac{\partial(f\circ F)}{\partial x^j}\right|_p=Df(F(p))\cdot\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_p$$

donde $Df(F(p))\in\mathbb{R}^{1\times m}$ y $\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_p\in\mathbb{R}^{m\times 1}$. De hecho, de la identificación de los diferenciales, como F va a un espacio producto del teorema A.3 y el teorema A.8 se deduce que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_p=\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial F_1}{\partial x^j}\right|_p\\ \vdots\\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x^j}\right|_p\end{bmatrix}\qquad\text{y}\qquad Df(F(p))=\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial f}{\partial x^1}\right|_{F(p)} & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x^m}\right|_{F(p)}\end{bmatrix}$$

Así,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_p=\sum_{0<k\leq m}\left.\frac{\partial F_k}{\partial x^j}\right|_p\left.\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|_{F(p)}=\sum_{0<k\leq m}\left.\frac{\partial F_k}{\partial x^j}\right|_p\left.\frac{\partial f}{\partial\rho_k}\right|_{F(p)}$$

que por la arbitrariedad de $[V,f]\in\mathscr{O}_{\mathbb{R}^m,F(p)}$ implica

$$\mathrm{d}F_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial\pi_j}\right|_p\right)=\sum_{0<k\leq m}\left.\frac{\partial F_k}{\partial x^j}\right|_p\left.\frac{\partial}{\partial\rho_k}\right|_{F(p)}$$

Para ser más claros todavía, si fijamos un sistema de coordenadas $(\Omega;\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathcal{V}_M(p)$ y otro sistema de coordenadas $(\Theta;\rho_1,\dots,\rho_m)\in\mathcal{V}_N(F(p))$. Entonces del ejemplo 3.9 tenemos las respectivas bases para los espacios tangentes. Entonces los ismorfismos son aquellos que envían cada elemento de la base a un elemento de la base del otro espacio en orden. Con esto, la aplicación $\hat{\mathrm{d}}F_p\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ que le corresponde a $\mathrm{d}F_p$ es tal que a cada $0<j\leq n$ se tiene que

$$\hat{\mathrm{d}}F_p(\mathbf{e}_j):=\begin{bmatrix}\left.\frac{\partial F_1}{\partial x^j}\right|_p\\ \vdots\\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x^j}\right|_p\end{bmatrix}$$

Que es lo mismo que decir, $\hat{\mathrm{d}}F_p=DF(p)$ según la definición A.1 y definición A.2.

Ejemplo 3.14. (Diferencial de una Dirección Coordenada) Sea M una n-variedad diferencial y $(U;\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ un sistema de coordenadas cualquiera. Para cada j, $\varphi_j := \pi_j \circ \varphi$, por el teorema 2.21, φ_j es una aplicación de clase $C^\infty(U;\mathbb{R})$. Más aún, del teorema 3.10 tenemos que $\mathrm{d}(\varphi_j)_p = \mathrm{d}(\pi_j)_{\varphi(p)} \circ \mathrm{d}\varphi_p$. Pero como $\mathbf{T}_{\varphi_j(p)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ y la base es $\left(\frac{\partial}{\partial x}\big|_{\varphi_j(p)}\right)$.

Estamos interesados en hallar la representación del diferencial; esto es, $\hat{\mathrm{d}}(\varphi_j)_p : \mathbf{T}_p(M) \to \mathbb{R}$ respecto a la base dada. Así, recordemos que para cualquier $0 < k \leq n$ se tiene que

$$\mathrm{d}\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\bigg|_p\right)[V,f] = \frac{\partial}{\partial \pi_k}\bigg|_p [\varphi^{-1}(V), f\circ\varphi] = \frac{\partial f}{\partial x^k}\bigg|_{\varphi(p)} = \frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p [V,f].$$

Por lo que, $\mathrm{d}\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\big|_p$. Pero del ejemplo 3.13, tenemos que $\mathrm{d}(\pi_j)_p = D\pi_j(\varphi(p))$. Concluyendo que

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{d}}(\varphi_j)_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\bigg|_p\right) &= \mathrm{Iso}_{\ \mathbf{T}_{\varphi_j(p)}(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}}\left\{\mathrm{d}(\pi_j)_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p\right)\right\},\\ &= \mathrm{Iso}_{\mathbf{T}_{\varphi_j(p)}(\mathbb{R}),\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial \pi_k}{\partial x^j}\bigg|_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\pi_j(\varphi(p))}\right\} = \delta_{j,k}.\end{aligned}$$

Con esto, se halla lo siguiente

$$\hat{\mathrm{d}}\varphi_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\bigg|_p\right) = \left[\hat{\mathrm{d}}(\varphi_1)_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\bigg|_p\right) \quad \cdots \quad \hat{\mathrm{d}}(\varphi_n)_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_k}\bigg|_p\right)\right].$$

De ahora en adelante, cuando refiramos al diferencial en estos casos especificados no hablaremos del diferencial en el sentido de la definición 3.3 sino de las identificaciones presentadas en los ejemplos. Estos ejemplos no fueron agregados de manera arbitraria; sin embargo, no es nada que la intuición no nos haya dicho ya. Y quedan solo como una comprobación rápida de estas intuiciones.

3.1.4. Fibrado tangente

Definición 3.4 (Fibrado tangente)**.** Sea M una n-variedad diferencial. Definimos los siguientes conjuntos y funciones

$$\begin{cases}\mathbf{T}(M) := \displaystyle\bigsqcup_{p\in M} \mathbf{T}_p(M)\\[2em] \begin{aligned}\iota : \mathbf{T}(M) &\longrightarrow M\\ (p,\upsilon) &\longmapsto p.\end{aligned}\end{cases}$$

Para cada sistema de coordenadas $(U,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in \mathscr{F}_M$ una función que indica los valores de cada sistema de coordenadas junto con sus diferenciales:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \iota^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n\\ (p,\upsilon) &\longmapsto (\varphi_1(p),\ldots,\varphi_n(p),\mathrm{d}(\varphi_1)_p(\upsilon),\ldots,\mathrm{d}(\varphi_n)_p(\upsilon)).\end{aligned}$$

La familia $\mathscr{T}_M := \{(\iota^{-1}(U),\tilde{\varphi}) \mid (U,\varphi)\in\mathscr{F}_M\}$ que cumple con las hipótesis del lema 2.11. A la variedad, $(\mathbf{T}(M),\mathscr{T}_M)$ dada en el lema 2.11, se la conoce como *fibrado tangente*.

Demostración. Empecemos por ver que para cada $(U,\varphi) \in \mathscr{F}_M$ se tiene que $\tilde{\varphi}$ es una función biyectiva y $\tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es abierto. Primero, ver que para todo $(p,v),(m,w)$ en $\iota^{-1}(U)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(p,v) = \tilde{\varphi}(m,w) &\implies \varphi_j(p) = \varphi_j(m) \ \text{ y } \ \mathrm{d}(\varphi_j)_p(v) = \mathrm{d}(\varphi_j)_m(w) \qquad \text{para todo } 0 < j \leq n,\\ &\implies \varphi(p) = \varphi(m).\end{aligned}$$

Con ello, $p = m$ y $v, w \in \mathbf{T}_p(M)$. Una expresión en función de bases es posible ahora, recordar las bases vistas en el ejemplo 3.9 para $\mathbf{T}_p(M)$. Digamos que $(\alpha^j),(\beta^j)$ en $\mathbb{R}$ tales que

$$v = \sum_j \alpha^j \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right|_p \quad \text{ y } \quad w = \sum_j \beta^j \left.\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right|_p.$$

Sea $0 < j \leq n$ se tiene que $\mathrm{d}(\varphi_j)_p(v) = \mathrm{d}(\varphi_j)_p(w)$. De hecho, si se toma el siguiente vector tangente, $[V, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}] \in \mathscr{O}_{\mathbb{R},\varphi_j(p)}$ tenemos una consecuencia importante

$$\begin{aligned}v[\varphi_j^{-1}(V), \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_j] - w[\varphi_j^{-1}(V), \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi_j] = 0 &\implies \sum_k (\alpha^k - \beta^k) \left.\frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi_k}\right|_p [\varphi_j^{-1}(V), \varphi_j] = 0,\\ &\implies \sum_k (\alpha^k - \beta^k) \left.\frac{\partial(\varphi_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k}\right|_{\varphi(p)} = 0,\\ &\implies \sum_k (\alpha^k - \beta^k) \left.\frac{\partial \pi_j}{\partial x^k}\right|_{\varphi(p)} = 0,\\ &\implies (\alpha^j - \beta^j) \left.\frac{\partial \pi_j}{\partial x^k}\right|_{\varphi(p)} = \alpha^j - \beta^j = 0.\end{aligned}$$

Entonces se concluye que $v = w$ pues j fue escogido arbitrariamente. Por tanto, $\tilde{\varphi}$ es inyectiva.

Falta ver que $\tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ y de allí es claro que se trata de una abierto en $\mathbb{R}^{2n}$ porque $\varphi(U)$, $\mathbb{R}^n$ son abiertos y el producto de abiertos es abierto. Ahora, bien si $(x_j)_{0<j\leq 2n}$ está en $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ entonces $x = (x_j)_{0<j\leq n} \in \varphi(U)$, y por otro lado, $x^* = (x_{j+n})_{0<j\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Bien, como φ es una biyección entre U y $\varphi(U)$, existe un $p \in U$ tal que $x = \varphi(p)$. Por otro lado, $\varphi : U \to \varphi(U)$ es una aplicación de clase $C^\infty(U;\varphi(U))$, $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ es una aplicación de clase $C^\infty(\varphi(U);U)$ y por el corolario 3.11 tenemos que $\mathrm{d}\varphi_p : \mathbf{T}_p(U) \to \mathbf{T}_{\varphi(p)}(\varphi(U)) \cong \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Con lo que también existe un $\tilde{v} \in \mathbf{T}_p(U)$ tal que $d\varphi_p(\tilde{v}) = x^*$. O lo que es igual existe un $v \in \mathbf{T}_p(U)$ tal que $d\varphi_p(v) = x^*$. Y para cada $0 < j \leq n$ se tiene del ejemplo 3.14 que $d(\varphi_j)_p(v) = x_{j+n}$. Concluyendo finalmente que $\tilde{\varphi}(p,v) = (x_j)_{0<j\leq 2n}$.

Así, existe un $v \in \mathbf{T}_m(M)$ tal que $(\mathrm{d}\varphi_j(v))_{n<j\leq 2n} = \mathrm{d}v = (\alpha^j)_{n<j\leq 2n}$. Luego, se tiene que $(\alpha^j) \in \tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U))$. Debemos comprobar las tres condiciones del lema 2.11:

Condición (i). Dadas dos cartas locales (U,φ), (V,ψ) con intersección no vacía entonces

$$\tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V)) = \tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U \cap V))$$

Pero $(U \cap V, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ y por tanto, $\tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es abierto. Por otro lado,

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V)) \longrightarrow \tilde{\psi}(\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V))$$

Para cada $x \in W := \tilde{\varphi}(\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V))$ denominamos $z = (x_j)_{0<j\leq n}$ y $t = (x_j)_{n<j\leq n}$ entonces $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x) = \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}^{-1}(x))$. Digamos $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$ y

$\tilde{\varphi}^{-1}(x) = (p, v)$ entonces $p = \varphi^{-1}(z)$ y $v = (\mathrm{d}\psi)^{-1}(t)$ luego, para cada $0 < j \leq n$ se tiene que por el corolario 3.11 lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\psi_j)_p\left((\mathrm{d}\varphi_p)^{-1}(t)\right) &= \mathrm{d}(\psi_j)_p \circ \mathrm{d}(\varphi)^{-1}_{\varphi(p)}(t), \\
&= \left[(\mathrm{d}(\pi_j)_{\psi(p)} \circ \mathrm{d}\psi_p) \circ \mathrm{d}(\varphi)^{-1}_{\varphi(p)}\right]\ (t), \\
&= (\mathrm{d}(\pi_j)_{\psi(p)} \circ \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)})\ (t), \\
&= \mathrm{d}(\gamma_j)_z\ (t).
\end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x) \ = (\gamma_1(z), \ldots, \gamma_n(z), \mathrm{d}(\gamma_1)_z(t), \ldots, \mathrm{d}(\gamma_n)_z(t)).$$

donde $\mathrm{d}(\gamma_j)_z(t) = D\gamma_j(z)\ t$ como lo vimos en el ejemplo 3.13. Si definimos la función

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\
(z, t) &\longmapsto (\gamma(z), D\gamma(z)\ t).
\end{aligned}$$

Es más claro que $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ para esto ver que $\gamma \in C^\infty(\varphi(U \cap V); \mathbb{R}^n)$ y luego aplicar el criterio de derivadas parciales. Con esto, como $\mathbb{R}^{2n}$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $\varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ difeomorfo a W entonces tenemos que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \in C^\infty(W; \mathbb{R}^{2n})$.

Condición (ii). Sea $(p, v) \neq (m, w)$ en $\mathbf{T}(M)$, si p, m no están dentro de una misma carta local entonces como M es de Hausdorff existe dos cartas locales, (U, φ) y (V, ψ), disjuntas alrededor de p, m. Entonces $\iota^{-1}(U) \cap \iota^{-1}(V) \neq \emptyset$, $(p, v) \in \iota^{-1}(U)$ y $(m, w) \in \iota^{-1}(V)$.

Condición (iii). Como M es II-numerable entonces existe $(U_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Por tanto,

$$\mathbf{T}(M) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \iota^{-1}(U_n).$$

Las comprobaciones respecto a $\mathbf{T}^*(M)$ son iguales a las que hemos hecho con excepción de la parte (i). Esto se deja como ejercicio para el lector.

□

Con la definición de estas variedades a partir de otra. Es el primer ejemplo de una construcción de variedades a partir de otra que vemos. Pero más importante que eso, es la posibilidad de realizar la siguiente definición.

Definición 3.5 (Diferencial de una aplicación global)**.** Sea M y N dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M; N)$. Se llama diferencial de F global, o simplemente diferencial, a la función

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F : \mathbf{T}(M) &\longrightarrow \mathbf{T}(N) \\
(p, v) &\longmapsto (F(p), \mathrm{d}F_p(v))
\end{aligned}$$

Observación. El diferencial de una aplicación de clase $C^\infty(M; N)$, $\mathrm{d}F$, es una aplicación de clase $C^\infty(\mathbf{T}(M); \mathbf{T}(N))$.

Análisis básico sobre variedades

Lección 9

3.2. Aplicaciones de clase C^∞ Importantes y Teoremas Relacionados

Para abordar toda esta sección, seguiremos en la reducción del uso del lenguaje español en nuestras explicaciones y la adopción de notación relevante para aliviar la longitud de nuestra exposición. Aprovechamos también para recordar ciertas notaciones:

- Para referirnos a una n-variedad diferencial M, abreviamos por M^n. Otras combinaciones son N^m, P^ℓ, Q^s, O^t,
- A menos que se diga lo contrario, $F : M^n \to N^m$ siempre será una aplicación de clase $C^\infty(M; N)$. Otras posibilidades son G, H y T.
- Usaremos $f \in \mathscr{O}_M(V)$ con $V \subseteq M$ abierto para referir a una función de clase C^∞. Otras letras usadas serán g, h, t y r.
- Dado M^n, usamos $[V, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$ para nombrar a un germen. Y se asume que f tiene por dominio V o de caso contrario se interpreta f como la restricción de esta a V. Otras ejemplos de gérmenes pueden incluir $[U, G]$, $[W, h]$, $[Z, t]$ y $[Y, r]$.
- Para M^n, nos referimos a un sistema de coordenadas por $(V; x_1, \ldots, x_n)$ donde $(V, \varphi) \in \mathscr{F}_M$ y $x_i = \varphi_i$ para todo $0 < i \leq n$, además se asume V conexo. Otros ejemplos de sistema de coordenadas pueden incluir $(U; y_1, \ldots, y_n)$, $(W; z_1, \ldots, z_n)$, $(Z; t_1, \ldots, t_n)$ y $(Y; r_1, \ldots, r_n)$.

Con esto en mente empecemos con las aplicaciones entre variedades que hemos mencionado son importantes, casi fundamentales.

3.2.1. Inmersiones, sub-variedades, incrustaciones y difeomorfismos

Definición 3.6. Sean M^n, N^m dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ decimos que:

(1) F es una inmersión (submersión) si $\mathrm{d}F_p$ es inyectivo (sobreyectivo) para todo $p \in M$,

(2) El par (M, F) es una *sub-variedad de* N si F es una inmersión inyectiva,

(3) F es una incrustación si además de que F sea una inmersión inyectiva, también cumple que ser un homeomorfismo entre M y $F(M)$,

(4) F es un difeomorfismo si es una biyección con $F^{-1} : N \to M$ una aplicación de clase $C^\infty(N; M)$.

Definición 3.7 (Rango de una aplicación entre variedades)**.** Sean M^n, N^m dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ definimos para cada $p \in M$ el *rango de* F *en* p*, denotado por* $rank(F; p)$*,* al número $rank(\mathrm{d}F_p) = \dim(\mathrm{Im}\ \mathrm{d}F_p)$.

Observación. Son de relevancia las *aplicaciones de rango constante*. Veamos brevemente que las *inmersiones, submersiones, sub-variedades, inscrustaciones y difeomorfismos* son un caso particular de aplicaciones de rango constante.

Analizaremos solo las inmersiones y submersiones, dado que el resto de aplicaciones son casos particulares de estos. Digamos $F : M^n \to N^m$ es una inmersión entonces para cada punto $p \in M$ se tiene del *teorema Rango-Nulidad* que

$$\dim \mathbf{T}_p M = \dim(\mathrm{Im}\ \mathrm{d}F_p) + \dim(\mathrm{Ker}\ \mathrm{d}F_p)$$

Por ser $\mathrm{d}F_p$ inyectiva entonces $rank(F; p) = n$. Comprobando que F es de rango constante y $rank(F) = n$. El mismo procedimiento comprueba que las submersiones son de rango constante con $rank(F) = m$.

3.2.2. Teorema de la función inversa, del rango y sus consecuencias inmediatas

Teorema 3.15 (Teorema de la Función Inversa)**.** *Dadas dos variedades diferenciales* M^n*,* N^m *y* $F : M \to N$*. Si en* $p \in M$*,* $\mathrm{d}F_p : \mathbf{T}_p(M) \to \mathbf{T}_{F(p)}(N)$ *es un isomorfismo, entonces existe* $V \in \mathcal{V}_M(p)$ *con* $F(V) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ *y* $F : V^n \to F(V)^m$ *un difeomorfismo.*

Demostración. Tomemos dicho $p \in M$, $(V, \varphi) \in \mathcal{V}_M(p)$ y $(U, \psi) \in \mathcal{V}_N(F(p))$. Del proposición 2.27 sabemos que la representación local de F es

$$\hat{F} :\ \varphi(F^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{es de clase } C^\infty(\varphi(F^{-1}(V) \cap U); \mathbb{R}^m)$$

Del teorema 3.10 se tiene que

$$\mathrm{d}\hat{F}_{\varphi(p)} = \mathrm{d}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = \mathrm{d}\psi_{F(p)} \circ \mathrm{d}F_p \circ \mathrm{d}\varphi^{-1}_{\varphi(p)}.$$

donde como φ^{-1}, ψ son difeomorfismo, entonces por el corolario 3.11 $\mathrm{d}\psi_{F(p)}$ y $\mathrm{d}\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ son isomorfismos. Luego, como $\mathrm{d}F_p$ es un isomorfismo entonces $\mathrm{d}\hat{F}_{\varphi(p)}$ es un isomorfismo y $D\hat{F}(\varphi(p))$ también lo es. Tenemos, así, todas las hipótesis del teorema de la función inversa en espacios normados el teorema A.19. La consecuencia es la existencia de un $\tilde{W} \subseteq \varphi(F^{-1}(V) \cap U)$ abierto en $\mathbb{R}^n$ con $\hat{F}(\tilde{W})$ abierto, $\hat{F} : \tilde{W} \to \tilde{W}$ de clase $C^\infty(\tilde{W}; \mathbb{R}^m)$, invertible y $\hat{F}^{-1} : \hat{F}(W) \to \tilde{W}$ de clase $C^\infty(\hat{F}(\tilde{W}); \mathbb{R}^n)$.

Esto da casi por terminada la demostración pues si definimos $W := \varphi^{-1}(\tilde{W})$ vecindad abierta de p, luego $F(W) = \psi(\psi^{-1} \circ F \circ \varphi^{-1}(\tilde{W})) = \psi(\hat{F}(\tilde{W}))$ vecindad abierta de $F(p)$ y $F : W \to F(W)$ es una biyección (este detalle queda al lector si no es claro). Más aún, $F^{-1} : F(W) \to W$ es una aplicación de clase $C^\infty(F(W); W)$, recordemos que $F^{-1} := \varphi \circ \hat{F}^{-1} \circ \psi^{-1}$.

□

Definición 3.8. Sea $(x_i \mid 0 < i \leq \ell)$ una colección en $\mathscr{O}_M(V)$ para algún $V \in \mathcal{V}(p)$. Decimos que (x_i) *es una colección de funciones linealmente independiente para* p si $(\mathrm{d}(x_i)_p \mid 0 < i \leq n)$ es un conjunto l.i. en $\mathbf{T}_p(M)^*$.

Ejemplo 3.16. (sistema de coordenadas) Este ejemplo no viene con ninguna sorpresa. Si hablamos de M^n una variedad diferencial, $(V; x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ entonces $(x_i \mid 0 < i \leq n)$ es una *colección de funciones linealmente independiente para* p.

Ver que φ es una aplicación de clase C^∞ con inversa que también es de clase C^∞, esto implica por el corolario 3.11 que $\mathrm{d}\varphi_p$ es un isomorfismo. Recordar que $x_i = \pi_i \circ \varphi$ y por el teorema 3.10 tenemos $\mathrm{d}(x_i)_p = \mathrm{d}(\pi_i)_{\varphi(p)} \circ \mathrm{d}\varphi_p$. Sabemos que $(D\pi_1(\varphi(p)), \dots, D\pi_n(\varphi(p)))$ son l.i. en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Entonces por la forma de los diferenciales en el ejemplo 3.14, sabemos que $\big(d(\pi_i)_{\varphi(p)} \mid 0 < i \leq n\big)$ es l.i. en $\mathscr{L}(\mathbf{T}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n); \mathbf{T}_{x_i(p)}(\mathbb{R}))$. Con esto si $(\beta^i \mid 0 < i \leq n)$ es una colección en $\mathbb{R}$ tales que $\sum_i \beta^i \mathrm{d}x_i = 0$ entonces para todo $v \in \mathbf{T}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_i \beta^i \ \mathrm{d}(\pi_i)_{\varphi(p)} \ v \ &= \sum_i \beta^i \ \left[\mathrm{d}(\pi_i)_{\varphi(p)} \circ \mathrm{d}\varphi_p\right] \ \left((\mathrm{d}\varphi_p)^{-1} \, v\right), \\ &= \sum_i \beta^i \ \mathrm{d}(x_i)_p \ \left((\mathrm{d}\varphi_p)^{-1} \, v\right) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_i \beta^i \ \mathrm{d}(\pi_i)_{\varphi(p)} = 0$ y entonces $\beta^i = 0$ para todo i. Esto indica que $(\mathrm{d}x_i \mid 0 < i \leq n)$ es l.i. en $\mathscr{L}(\mathbf{T}_p(M); \mathbf{T}_{x_i(p)}(\mathbb{R}))$.

Corolario 3.17. *Sea M^n una variedad diferencial, $p \in M$ y $(x_i \mid 0 < i \leq \ell)$ colección en $\mathscr{O}_M(V)$ para $V \in \mathcal{V}(p)$:*

a) si $\ell = n$ e (x_i) es una colección l.i. entonces $(W; x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $W \subseteq V$,

b) si $\ell < n$ es (x_i) es una colección l.i. entonces existe $(W; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathcal{V}_M(p)$, tal que $\tilde{x}_i = x_i$ para todo $0 < i \leq \ell$ con $W \subseteq V$,

c) si (x_i) es tal que $\langle(\mathrm{d}x_i \mid 0 < i \leq \ell)\rangle = \mathbf{T}_p(M)^*$ entonces existe (k_i) tal que $0 < k_1 < \dots < k_n \leq \ell$ y $(W; x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $W \subseteq V$.

Corolario 3.18. *Sea M^n y N^m dos variedades diferenciales, $F : M \to N$. Sea $p \in M$ y $(V; y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ un sistema de coordenadas:*

a) si $\mathrm{d}F_p$ es sobreyectiva entonces $m \leq n$ y existe $(W; x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$, tal que $x_i = y_i \circ F$ para todo $0 < i \leq m$ con $W \subseteq F^{-1}(V)$.

b) si $\mathrm{d}F_p$ es inyectiva entonces $n \leq m$ y existe una subcolección (k_i) tal que $0 < k_1 < \ldots < k_m \leq n$, $(W; x_{k_1}, \dots, x_{k_m}) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $x_{k_i} = y_{k_i} \circ F$ para todo $0 < i \leq m$ con $W \subseteq F^{-1}(V)$.

Definición 3.9 (Cortes de una variedad)**.** Sea M^n una variedad diferencial, $(V; x_1, \dots, x_n)$ un sistema de coordenadas en M. Sea $0 \leq k \leq n$ y $a \in \varphi(V)$, definimos un *corte de M respecto al sistema de coordenadas* $(x_1, \dots, x_n)$ por:

$$\mathbf{S}((V; x_1, \dots, x_n), a, k) = \{q \in V \mid x_i(q) = \pi_i(a) \quad (\forall\ k < i \leq n)\}$$

Observación. Los cortes de una variedad son de hecho un tipo de variedades, más aún, son *sub-variedades de M*. Si vemos a $\mathbf{S}((V, x_1, \dots, x_n), a, k)$ con la topología heredada de M. Veremos que el siguiente es un homeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{S}((V; x_1, \dots, x_n), a, k) &\longrightarrow \ \psi(\mathbf{S}) \subseteq \mathbb{R}^k \\ q \qquad &\longmapsto \ (x_1(q), \dots, x_k(q)) \end{aligned}$$

Para hacer las comprobaciones nos referiremos al corte por $\mathbf{S}$. Notar que cualquier $U \cap \mathbf{S} \in \mathbf{Op}^{op}(\mathbf{S})$ se tiene que $\psi(U \cap \mathbf{S}) \in \mathbf{Op}^{op}(\mathbb{R}^k)$. En efecto, si tomamos $z \in \psi(U \cap \mathbf{S})$ con U abierto de M, existe un $q \in U \cap V$ tal que $x_i(q) = \pi_i(a)$ para todo $k < i \leq n$ y $z = (x_1(q), \dots, x_k(q))$. Sabemos que $\varphi(q) \in \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\varphi(U \cap V)$ es abierto, por lo tanto hay un $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(\varphi(q); \varepsilon) \subseteq \varphi(U \cap V)$. Más aún, para todo $y \in B_{\mathbb{R}^k}(z; \varepsilon)$ se tiene que $(y^1, \dots, y^k, \pi_{k+1}(a), \dots, \pi_n(a)) \in B_{\mathbb{R}^n}(\varphi(q); \varepsilon)$ por tanto existe un $\ell \in U \cap V$ tal que $\varphi(\ell)$ es este vector en $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, $\ell \in U \cap \mathbf{S}$ y $\psi(\ell) = y$; por lo que, $y \in \psi(U \cap \mathbf{S})$, esto es finalmente, $B_{\mathbb{R}^k}(z; \varepsilon) \subseteq \psi(U \cap \mathbf{S})$. Y comprobamos que $\psi(U \cap \mathbf{S})$ es abierto en $\mathbb{R}^k$. Esto muestra que $\psi(\mathbf{S})$ es abierto y que ψ es una aplicación abierta.

Adicionalmente, ψ es una biyección. Esto porque si $p, q \in \mathbf{S}$ son tales que $\psi(p) = \psi(q)$ entonces $\varphi(p) = \varphi(q)$ y como φ es inyectiva, $p = q$. Comprobar que ψ es continua es consecuencia que si extendiéramos ψ hacia V es muy claro que es continua por tener componentes continuas. Luego, al notar que ψ es la restricción de esa extensión entonces sobre la topología inducida por V sobre $\mathbf{S}$, que es la misma que le dimos a $\mathbf{S}$, ψ es continua.

Es claro que, $\{(\mathbf{S}, \psi)\}$ es un atlas diferencial para $\mathbf{S}$ entonces existe uno máximal que lo contiene y es claro que $\mathbf{S}^k$ es una variedad diferencial.

Proposición 3.19. *Sea M^n una variedad, $(V; x_1, \dots, x_n)$ sistema de coordenadas sobre M. Cualquier corte de M, $\mathbf{S} := \mathbf{S}((V; x_1, \dots, x_k), a, k)$, cumple que $(\mathbf{S}, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M con dimensión k.*

Demostración. Probemos que $\mathbf{S} \hookrightarrow M$ es una inmersión inyectiva. Primero discutimos sobre si es una aplicación de clase $C^\infty(\mathbf{S}; M)$. La continuidad de la inclusión es bien conocida pues $\mathbf{S}$ lleva la topología heredada de M. Por otro lado, dado cualquier $U \in \mathbf{Op}^{op}(M)$ tal que $U \cap \mathbf{S} \neq \emptyset$ y $f \in \mathscr{O}_M(U)$, se tiene que sea (W, ζ) una carta local de $\mathbf{S}$ entonces

$$\begin{aligned} (f \circ (\hookrightarrow)) \circ \zeta^{-1} &= \Big(f \circ (\hookrightarrow) \circ \psi^{-1} \circ \psi\Big) \circ \zeta^{-1}, \\ &= \Big(f \circ (\hookrightarrow) \circ \psi^{-1} \circ \gamma\Big) \circ \gamma^{-1} \circ (\psi \circ \zeta^{-1}), \\ &= (f \circ \varphi^{-1}) \circ \gamma^{-1} \circ (\psi \circ \zeta^{-1}). \end{aligned}$$

Notar que $(\psi^{-1} \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}(z) = \psi^{-1} \circ \gamma(z^1, \dots, z^k, \pi_{k+1}(a), \dots, \pi_n(a))$ y que existe un único $q \in \mathbf{S}$ tal que $\psi(q) = (x_1(q), \dots, x_k(q)) = z$. De hecho, como $q \in V$ está en el corte $\varphi(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q)) = (z^1, \dots, z^k, \pi_{k+1}(a), \dots, \pi_n(a))$. Entonces concluimos por un lado que $q = \varphi^{-1}(z^1, \dots, z^k, \pi_{k+1}(a), \dots, \pi_n(a))$ (q es el único con esta propiedad pues φ^{-1} es inyectiva) y por otro que $q = \psi^{-1}(z)$. Entonces $(\psi^{-1} \circ \gamma) \circ \gamma^{-1}(z) = (\varphi^{-1}) \circ \gamma^{-1}(z)$ aclarando nuestro último paso. Retomando la anterior discusión sabemos que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, pues $f \in \mathscr{O}_M(U)$; también $\gamma^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n)$ y $(\psi \circ \zeta^{-1}) \in C^\infty(\gamma(W); \mathbb{R}^k)$ de la definición de atlas diferencial. Por todo esto, $(f \circ (\hookrightarrow)) \circ \gamma^{-1} \in C^\infty(\gamma(W); \mathbb{R})$. Y por la arbitrariedad de f y U concluimos que la inclusión es de clase C^∞.

$\mathbf{S} \hookrightarrow M$ es una inmersión. En efecto, veamos $\mathrm{d} \hookrightarrow_p$: $\mathbf{T}_p(\mathbf{S}) \longrightarrow \mathbf{T}_p(M)$ para lo cual tomamos un sistema de coordenadas $(U; x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ y como vimos existe $W \subseteq U$ tal que $(W; x_1, x_2 \ldots, x_k) \in \mathcal{V}_{\mathbf{S}}(p)$ el objetivo ahora es encontrar la *matriz jacobiana que representa a* $\mathrm{d} \hookrightarrow_p$ recordemos que

$$\operatorname{Jac}\{\mathrm{d} \hookrightarrow_p\} = \left[\left.\frac{\partial x_i \circ \hookrightarrow}{\partial j}\right|_p \right]_{n \times k}$$

Desarrollando esto tenemos que

$$\operatorname{Jac}\{\mathrm{d} \hookrightarrow_p\} = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\right|_p & \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial x_k}{\partial x_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right|_p & \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial x_k}{\partial x_2}\right|_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right|_p & \left.\frac{\partial x_2}{\partial x_n}\right|_p & \cdots & \left.\frac{\partial x_k}{\partial x_n}\right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times k}$$

Es claro entonces que $\operatorname{Jac}\{\mathrm{d} \hookrightarrow_p\}$ es inyectivo por ser de *rango fila k*. Luego, $\mathrm{d} \hookrightarrow_p$ es inyectivo para cualquier $p \in \mathbf{S}$. Esto concluye que $\mathbf{S} \hookrightarrow M$ es una inmersión.

□

Teorema 3.20 (Teorema del Rango)**.** *Sean M^n, N^m, $F : M \to N$ y $p \in M$. Si F es de rango constante k entonces existen:*

(i) un sistema de coordenadas $(V; x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $\varphi(V) = \sqsubseteq_n (1)$,

(ii) un sistema de coordenadas $(W; y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ con $\psi(W)$ contenido en $\sqsubseteq_m (1)$ y que cumple $F(V) \subseteq W$,

tales que

$$\begin{aligned} \hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \quad \varphi(V) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (z^1, \ldots, z^n) &\longmapsto (z^1, \ldots, z^k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Observación. Si $F : M^n \to N^m$ se trata de una inmersión y $p \in M$. En una paráfrasis del teorema anterior, hay sistemas de coordenadas $(W; y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ y una carta local $(V, \varphi) \in \mathcal{V}_M(p)$ (no necesariamente conexa) tales que $F|_V$ es inyectiva y

$$F(V) = \mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0), n)$$

En este caso tomaremos la notación $\mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), 0, n)$ para referirnos al corte de N

$$\mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), 0, n)$$

Explícitamente del teorema del rango tenemos que existen $(U; x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $\varphi(U) = \sqsubseteq_n$ (1) y $(W; y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ con $\psi(W) \subseteq \sqsubseteq_m$ (1) tales que $F(U) \subseteq W$ y

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \varphi(U) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (z^1, \ldots, z^n) &\longmapsto (z^1, \ldots, z^n, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

De aquí, es claro que si $V := F^{-1}(W) \cap U \in \mathcal{V}_M(p)$ entonces para todo $q \in F(V)$, existe $p \in V$ tal que $F(p) = q \in W$, entonces $\hat{F}(\varphi^{-1}(p)) = \psi(q) = (y_1(q), \ldots, y_m(q))$ y por ello se concluye que $y_{n+1}(q) = \cdots = y_m(q) = 0$. Es decir, $F(V) \subseteq \mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), 0, n)$. Para ver la otra parte, si $q \in W$ y cumple que $y_{n+1}(q) = \cdots = y_m(q) = 0$ entonces si $z := (y_1(q), \ldots, y_n(q))$, se tiene que $z \in \sqsubseteq_n (1) = \varphi(U)$ (¿por qué?). Por tanto, tenemos de la representación local de F que $\psi(F \circ \varphi^{-1}(z)) = \hat{F}(z) = \psi(q)$. Y como ψ es biyectiva entonces $q = F \circ \varphi^{-1}(z) \in F(U)$. Mostrando que $\mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), 0, n) \subseteq F(V)$.

Demostración. Tomemos $(V; x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$, $(W; y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ y su representación local es

$$\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(F^{-1}(W) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

Por el teorema de composición de diferenciales para todo $y \in \varphi(F^{-1}(W) \cap V)$ se tiene que

$$\mathrm{d}\hat{F}_y = \mathrm{d}\psi_{F(\varphi^{-1}(y))} \circ \mathrm{d}F_{\varphi^{-1}(y)} \circ (\mathrm{d}\varphi_y)^{-1}.$$

Pero $\mathrm{d}\psi_{F \circ \varphi^{-1}(y)}$ y $\mathrm{d}\varphi_y$ son isomorfismos entonces $rank\left(\mathrm{d}\hat{F}_y\right) = rank\left(\mathrm{d}F_{\varphi^{-1}(y)}\right) = k$ y como $\mathrm{d}\hat{F}_y$ se identifica con $D\hat{F}(y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $\hat{F}$ es de rango constante k.

Con estas hipótesis del teorema del rango A.20 si $b = \psi(F(p))$ y $a = \varphi(p)$ tenemos que: (i) existe $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$ tal que $U \subseteq \varphi(F^{-1}(W) \cap V)$ y $U \cong \sqsubseteq_n (1)$ por medio del difeomorfismo υ; (ii) existe $Z \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^m}(b)$ tal que $\hat{F}(U) \subseteq Z$ y $Z \cong \sqsubseteq_m (1)$ por medio del difeomorfismo η; (iii) existe F_0 definida tal que $F_0(x^1, \ldots, x^m) := (x^1, \cdots, x^k, 0, \ldots, 0)$ para todo $x \in \sqsubseteq_m (1)$ y que cumple $\hat{F}\Big|_U \equiv \eta^{-1} \circ F_0 \circ \upsilon$.

Luego,

$$\begin{aligned} F_0 : \quad \sqsubseteq_n (1) &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (z^1, \ldots, z^n) &\longmapsto \eta \circ \hat{F}\Big|_U \circ \upsilon^{-1}(z) := (z^1, \ldots, z^k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Si $\tilde{V} := \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{V}_M(p)$ con $\tilde{V} \subseteq F^{-1}(W) \cap V$ es claro que $\tilde{V}$ es conexo y que el siguiente es un sistema de coordenadas, $(\tilde{V}; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathcal{V}_M(p)$, con $\tilde{x}_i := \pi_i \circ (\upsilon \circ \varphi)$ para $0 < i \leq n$. Notemos que $\hat{F}(U) \subseteq Z \cap \psi(W)$ y si definimos $\tilde{W}$ como el abierto conexo más grande que tiene $F(p)$ y que está contenido en $\psi^{-1}(Z \cap \psi(W))$ entonces tenemos que $(\tilde{W}; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ donde $\tilde{y}_j := \pi_j \circ (\psi \circ \eta)$ para $0 < j \leq m$.

Si tomamos los siguientes sistemas de coordenadas, $(\tilde{V}; \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ y $(\tilde{W}; \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$ entonces la representación local de F es la deseada.

□

Proposición 3.21. *Sea $F : M^n \to N^m$ de rango constante. Si F es inyectiva, entonces (M, F) es una sub-variedad de N.*

Demostración. Como vimos en alguna observación anterior basta ver que $rank(F) = n$. Podemos *por la vía de la contradicción* asumir que $k := rank(F) < n$. Entonces dado $p \in M$ cualquiera, por el teorema 3.20 sabemos de dos sistemas de coordenadas $(V; x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}_M(p)$ y $(W; y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ con $F(V) \subseteq W$, tales que la *representación local* $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ que cumple:

$$\hat{F}(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) \qquad (\forall\ x \in \varphi(F^{-1}(W) \cap V))$$

Claro que por ser F inyectiva, la representación también lo es. Sin embargo, si tomamos $x \in \varphi(F^{-1}(W) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$ existe un cubo abierto vecindad de x contenido en $\varphi(F^{-1}(W) \cap V)$. Podemos asumir que el cubo es de lados iguales a $\varepsilon > 0$, y por tanto,

$$x^* := (x^1, \ldots, x^{m-1}, x^m + \varepsilon) \in \varphi(F^{-1}(W) \cap V) \setminus \{x\}$$

Más aún, esto dice que $\hat{F}(x) = \hat{F}(x^*)$ que es absurdo.

□

Proposición 3.22. *Sean M^n, N^m dos variedades diferenciales y $F : M \to N$ una aplicación de clase $C^\infty(M; N)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) F es una inmersión biyectiva,

(ii) F es una submersión biyectiva,

(iii) F es difeomorfismo.

Demostración. Obviando los casos más directos, pasemos a ver $(i) \Rightarrow (iii)$ para entonces para a ver $(ii) \Rightarrow (iii)$ terminando nuestra demostración (¿por qué?). Asumiendo que F es una inmersión biyectiva, vamos a probar que para todo $p \in M$, $\mathrm{d}F_p$ es sobreyectiva. Digamos por la *vía de la contradicción* que existe $p_0 \in M$ para el cual $\mathrm{d}F_{p_0}$ no es sobreyectiva. Directamente del *teorema Rango-Nulidad* derivamos que

$$n = rank\,(\mathrm{d}F_p) + null\,(\mathrm{d}F_p) = rank(\mathrm{d}F_p) < m.$$

Sea (U, φ) es un sistema de coordenadas en N tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^m$. Dado que F es sobreyectiva, entonces

$$\varphi \circ F : F^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \qquad \text{es una aplicación biyectiva de clase } C^\infty(F^{-1}(U); \mathbb{R}^m)$$

De las observaciones anteriores por ser F una inmersión entonces para cualquier $p \in F^{-1}(U) \subseteq M$ existe $(W_p; y_1^{(p)}, \ldots, y_m^{(p)}) \in \mathcal{V}_N(F(p))$ y $V_p \in \mathcal{V}_M(p)$ con $F(V_p) \subseteq W_p$ tales que

$$\begin{aligned} &F(V_p) = \mathbf{S}((W_p; y_1^{(p)}, \ldots, y_m^{(p)}), 0, n) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ \psi_p \circ F(V_p) = \left\{ z \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \begin{array}{l} (\exists\ q \in W_p) \\ z = \psi^{(p)}(q) \quad \text{y} \quad z^{n+1} = \cdots = z^m = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Y claro que $(V_p \mid p \in F^{-1}(U))$ es un cubrimiento de $F^{-1}(U)$ que es II-numerable. Luego de Lindelöf, y por tanto, existe (p_k) tal que $(V_{p_k} \mid k \in \mathbb{N})$ cubre a $F^{-1}(U)$. Al ser $\varphi \circ F$ una biyección se tiene que

$$\mathbb{R}^m = \varphi(U) = \varphi \circ F(F^{-1}(U)) \subseteq \varphi \circ F\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_{p_k}\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\varphi \circ \psi_{p_k}^{-1})\ (\psi_{p_k} \circ F(V_{p_k}))$$

Entonces ver que $Z_k := \psi_{p_k} \circ F(V_{p_k}) \subseteq \pi_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^m)$ donde $\pi_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^m)$ es la proyección de $\mathbb{R}^m$ hacia $\langle\{\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq n\}\rangle \subseteq \mathbb{R}^m$. Dado que este último es denso en ninguna parte entonces Z_k es denso en ninguna parte para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Y como $\varphi \circ \psi_{p_k}^{-1}$ es un homeomorfismo entonces $\varphi \circ \psi_{p_k}^{-1}(Z_k)$ es denso en ninguna parte. Luego, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \varphi \circ \psi_{p_k}^{-1}(Z_k)$ es un absurdo pues $\mathbb{R}^m$ es un espacio de Banach y por el *teorema de Categorías de Baire* al menos uno de los elementos del cubrimiento de $\mathbb{R}^m$ debe tener interior no vacío.

Por tanto, no existe punto en M, p, tal que $\mathrm{d}F_p$ no sea sobreyectiva. Concluyendo que $\mathrm{d}F_p$ es isomorfismo para todo $p \in M$ y que F es un difeomorfismo local. Por el teorema de la función inversa 3.15 y el lema del pegado 2.26 llegamos a que F es difeomorfismo.

Continuando con $(ii) \Rightarrow (iii)$, asumamos que F es una submersión biyectiva y de la proposición 3.21 tenemos que por ser F de rango constante e inyectiva entonces se trata en particular de una inmersión. Así, F es un difeomorfismo local que implica es un difeomorfismo.

□

3.2.3. Pequeña discusión sobre sub-variedades y factorizaciones

Ilustremos la siguiente situación sobre una variedad diferencial, digamos $\mathbb{S}^1$: podemos formar está variedad tomando un hilo que luego unimos por sus extremos hasta lograr la forma esperada. ¿Cómo pensamos en esto desde el punto de vista de la topología diferencial? esto trataremos de responder en lo que sigue de este pequeño análisis. En el contexto de variedades topológicas, la respuesta se da a través de homeomorfismos y es $\mathbb{S}^1 \cong [0,1]/_{\{0,1\}}$, donde $[0,1]/_{\{0,1\}}$ es un espacio cociente que es literalmente la acción de *'unir* $[0,1]$ *por sus extremos'*.

Esta perspectiva de la topología clásica responde bien a la necesidad de crear $\mathbb{S}^1$ siendo que nos dan $[0,1]$ (un hilo finito). Si tenemos $\mathbb{R}$ (un hilo infinito) la respuesta se agota pues no podemos tomar sus extremos para formar la figura. Aún así, no se nos agota las ideas sobre como transformar $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}^1$, veamos la siguiente función:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin\ \varphi(t), \cos\ \varphi(t)) \end{aligned}$$

donde $\varphi(t) := 2\arctan\ t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Del gráfico, vemos que al igual que en caso de variedades topológicas, aquí vemos a $\mathbb{S}^1$ como el producto de doblar $\mathbb{R}$. De hecho, se cumple que rec $F = \mathbb{S}^1$ Y que F es una aplicación de clase $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ (verificar esto último se deja al lector) tal que $(\mathbb{R}, F)$ *es una sub-variedad de* $\mathbb{R}^2$. Para verificar esto último basta ver que $\mathrm{d}F_t$ identificado con $DF(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ es inyectiva para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Dado que

$$Df(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{2\cos\ \varphi(t)}{1+t^2} & \dfrac{-2\sin\ \varphi(t)}{1+t^2} \end{bmatrix} \qquad (\forall\ p \in \mathbb{R})$$

es claro que $Df(t) \neq 0$; y por tanto, inyectiva, para todo t.

Asumiendo que como $(\mathbb{R}, F)$ *es una sub-variedad* entonces podemos formar una variedad diferencial con rec F. Siguiendo el enfoque anterior, podremos decir que efectivamente, esta transformación de $\mathbb{R}$ nos da $\mathbb{S}^1$ si es que logramos ver que rec F es difeomorfo con $\mathbb{S}^1$. Toda está información puede ser resumida en el siguiente diagrama conmuta. Aquí también está en duda si las flechas del segundo diagrama son aplicaciones de clase C^∞.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "F"'] & \mathbb{R}^2 \\
& \mathbb{S}^1 \arrow[u, "\mathrm{id}|_{\mathbb{S}^1}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, two heads, "F"] \arrow[dr, dashed, "F"'] & (\text{rec } F, \mathscr{F}_{\text{rec } F}) \arrow[d, two heads, "\cong"', "\mathrm{id}|_{\mathbb{S}^1}"] \\
& \mathbb{S}^1 \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

En general, la herramienta para generar nuevas variedades va por medio de las *sub-variedades*. Eso trataremos más adelante, primero debemos discutir más sobre *factorización a través de sub-variedades*. Digamos que tenemos una aplicación de clase C^∞, digamos F, que va de M^n a N^m. Si tenemos otra variedad diferencial P^ℓ y una sub-variedad (P, G) de N. Entonces decimos que F factoriza (P, G) si se da que $F(M) \subseteq G(P)$. Dado ese caso, se tiene existe un único $F_0 : M \to P$ tal que $G \circ F_0 = F$. Sin embargo, no se sabe si F_0 es una aplicación de clase C^∞, de hecho, de eso trata el teorema que enunciaremos. Solo nos dice que existe dicho factor, $F_0 : M \to P$. Veamos un ejemplo en dónde no se logra que F_0 es una aplicación de clase C^∞.

Ejemplo 3.23. (Una factorización que no es de clase C^∞) Dada la sub-variedad diferencial abierta $(-\pi, \pi)^1 \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} F : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\sin t \cos t, \sin t) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} H : (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (-\sin t \cos t, \sin t) \end{aligned}$$

Ver que se trata de F y H son aplicaciones de clase $C^\infty((-\pi, \pi); \mathbb{R}^2)$ no es difícil; pues, coincide con las definiciones de diferenciación entre espacios normados. Dado que sin es inyectiva de $(-\pi, \pi)$ se puede comprobar que F y H son inyectivas. Sabemos por todo lo desarrollado en nuestra teoría que

$$\mathrm{d}F_t = \begin{bmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t & \cos t \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}H_t = \begin{bmatrix} \sin^2 t - \cos^2 t & \cos t \end{bmatrix}$$

Y claramente, tanto $\mathrm{d}F_t$ como $\mathrm{d}H_t$ no es la derivación lineal, 0, para ningún $t \in (-\pi, \pi)$. Por tanto, F y H son inmersiones. Luego, $(\mathbb{R}, F)$ y $(\mathbb{R}, H)$ son ambas *sub-variedades* con la misma imagen. Por tanto, podemos decir que F factoriza $(\mathbb{R}, H)$ y por tanto existe $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F = H \circ G$. Está función no es continua.

Comprobemos esto último. Tomemos $(-\pi/4, \pi/4) \subseteq (-\pi, \pi)$ que es abierto y $G^{-1}(-\pi/4, \pi/4)$. Por un lado, $H(-\pi/4, \pi/4)$ es un segmento del infinito que va en diagonal hacia abajo. Sin embargo, la imagen inversa de ese trozo a través de F es $(-\infty, -\beta] \cup \{0\} \cup [\beta, \infty)$ para algún $\beta > 0$. Como F y H son inyectivas y dado que $F = H \circ G$ concluimos que $G^{-1}(-\pi/4, \pi/4) = (-\infty, -\beta] \cup \{0\} \cup [\beta, \infty)$ que no es abierto.

Con este ejemplo, enunciemos nuestro resultado.

Teorema 3.24 (Factorización de sub-variedades)**.** *Sean M^n, N^m y P^ℓ tres variedades diferenciales, $F : M \to N$ y (P, G) es una sub-variedad de N. Suponiendo que F factoriza a (P, G); esto es, $F(M) \subseteq G(P)$, entonces existe un único $F_0 : M \to P$ (no necesariamente una aplicación de clase $C^\infty(M; P)$) tal que $G \circ F_0 = F$.*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "F_0"'] & N \\
& P \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}
$$

Más aún, lo siguiente se tiene para F_0:

- *F_0 es una aplicación $C^\infty(M;P)$, si F_0 es continua,*
- *F_0 es continua si G es una incrustación.*

Demostración. Tomemos $F_1 : M \to P$ tal que $G \circ F_1 = F$ si por la vía de la contradicción asumimos existe un $p \in M$ tal que $F_1(p) \neq F_0(p)$; sin embargo, $F(p) = G(F_1(p)) = G(F_0(p))$ y G es inyectiva. Como esto contradice la inyectividad, concluimos que $F_1 \equiv F_0$. Para la existencia tomamos $G : P \to G(P)$ que es una biyección y $F_0 = G^{-1} \circ F_0$. Si G es una incrustación entonces es un homeomorfismo y $F_0 = G^{-1} \circ F$; es decir, composición de funciones continuas, comprobando el segundo literal.

Para el primer literal, asumamos que F_0 es continua. Vamos a usar el lema del pegado 2.26 para ver que F_0 es una aplicación de clase $C^\infty(M;P)$. Si $p \in P$ y $(V,\varphi) \in \mathcal{V}_N(G(p))$ son arbitrarias definimos la siguiente colección de funciones $C^\infty(P)$

$$(y_i \mid y_i := \pi_i \circ (\varphi \circ G) \text{ y } 0 < i \leq n\,).$$

Como $(\pi_i \mid 0 < i \leq n)$ es un sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^n$ y $\varphi \circ G : G^{-1}(V) \to \varphi(V)$ es tal que $\mathrm{d}(\varphi \circ G)_p$ es inyectiva (porque por el teorema 3.10 es la composición de diferenciales inyectivos) de la corolario 3.18 encontramos un (k_i) tal que $0 < k_1 < \cdots < k_m \leq n$ con $(G^{-1}(V); y_{k_1}, \ldots, y_{k_m}) \in \mathcal{V}_N(F(p))$. Si $\tau := (y_{k_1}, \ldots, y_{k_m})$ entonces τ se puede ver como $\pi \circ (\varphi \circ G)$ para algún $\pi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ de rango m y de allí tenemos que

$$
\begin{aligned}
F_0|_{F_0^{-1}(U)} &= \tau^{-1} \circ (\tau \circ F_0)\Big|_{F_0^{-1}(U)} = \tau^{-1} \circ ((\pi \circ \varphi \circ G) \circ F_0)\Big|_{F_0^{-1}(U)}, \\
&= \tau^{-1} \circ (\pi \circ \varphi \circ F)\Big|_{F_0^{-1}(U)}.
\end{aligned}
$$

De aquí, es claro que $F_0|_{F_0^{-1}(U)}$ es una aplicación de clase $C^\infty(F_0^{-1}(U); P)$ que era lo necesario para aplicar el teorema 2.26 del pegado y concluir el teorema.

□

Observación. Debemos dar una motivación a la decisión de llamar a los pares (N,F) con $F : N \to M$ una inmersión inyectiva, *sub-variedades de M*. Para ello definamos la siguiente relación de equivalencia sobre todas las *sub-variedades de M* de la siguiente manera:

$$(N_1, F_1) \text{ y } (N_2, F_2) \text{ son equivalentes} \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} (\exists\ F : N_1 \to N_2) \\ \qquad \text{F es un difeomorfismo tal que } F_1 = F_2 \circ F \end{array}$$

A las clases de equivalencia las denotaremos por ξ. Se conoce que existe un único subconjunto $A \subseteq M$ para el que existe un representante en ξ de la forma $(A, \hookrightarrow)$ donde $A \subseteq M$ tiene una estructura de variedad diferencial que hace a $A \hookrightarrow M$ una inmersión.

Para ver esta unicidad sobre A, tomemos un $B \subseteq M$ con la misma propiedad entonces $(B, \hookrightarrow) \in \xi$ y existe un $F : A \to B$ difeomorfismo. Así,

$$A = (\hookrightarrow)(A) = (\hookrightarrow)(F(A)) = (\hookrightarrow)(B) = B$$

Proposición 3.25 (Representante en M de una Sub-variedad de M)**.** *Sean M^n, N^m dos variedades diferenciales y $F : N \to M$. Si (N, F) es una sub-variedad de M y $A := F(N)$ entonces existe al menos una topología y $\mathscr{G}$ un atlas diferencial máximal para A tal que $A \hookrightarrow M$ es una inmersión.*

Demostración. Definimos $A := F(N) \subseteq M$ y entonces $F : N \to A$ es una biyección. Lo que falta del resultado se puede abreviar como: *dotar a A de una topología y $\mathscr{G}$ un atlas diferencial máximal que haga $F^{-1} : A \to N$ un difeomorfismo.* Asumiendo tenemos aquello entonces $A \hookrightarrow M$ es una aplicación de clase $C^\infty(A; M)$ pues $A \hookrightarrow M = F^{-1} \circ F$ y es una inmersión porque para todo $p \in A$ se tiene que $\mathrm{d}(F^{-1})_p$ es un isomorfismo y para todo $m \in N$ se tiene que $\mathrm{d}F_m$ es una inyección. Luego, del teorema 3.10 la relación $\mathrm{d}(A \hookrightarrow M)_p = \mathrm{d}F_{G(p)} \circ \mathrm{d}F_p$ da la inyectividad deseada para cualquier $p \in A$.

Con esto claro, ocupémonos brevemente de encontrar dicha variedad diferencial sobre A. Para comodidad de la demostración denominaremos a F^{-1} por G. Sabemos que N es una variedad diferencial por lo que tomamos su atlas diferencial máximal $\mathscr{F}_N$. Proponemos la siguiente colección para atlas diferencial a través del lema 2.11:

$$\mathscr{G} := \left\{ (B, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\exists\ (V, \psi) \in \mathscr{F}_N) \\ \qquad\qquad B := G^{-1}(V) \text{ y } \varphi := \psi \circ G \end{array} \right\}$$

Notar que para cada $(B, \varphi) \in \mathscr{G}$ se existe un $(V, \psi) \in \mathscr{F}_N$ tal que $\varphi = \psi \circ G$. Por lo que, φ es una composición de biyecciones. Por otro lado, $\varphi(B) = \psi \circ G(G^{-1}(V)) = \psi(V)$ que es abierto comprobando finalmente que estamos en el contexto del lema 2.11 de construcción de variedades diferenciales.

- *Condición i.* Tomemos (B, φ), (C, γ) en $\mathscr{G}$ tales que $B \cap \emptyset$ entonces es claro que $\gamma(C \cap B)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, la función

  $$\varphi \circ \gamma^{-1} : \gamma(C \cap B) \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{ es una función de clase } C^\infty(\gamma(C \cap B); \mathbb{R}^n).$$

  Esto pues existen $(V, \psi), (W, \upsilon) \in \mathscr{F}_N$ tales que para todo $x \in \gamma(C \cap B)$ se tiene que $\varphi \circ \gamma^{-1}(x) = (\psi \circ G) \circ (\upsilon \circ G)^{-1}(x) = \psi \circ \upsilon^{-1}(x)$. Y $\psi \circ \upsilon^{-1}$ es de clase $C^\infty(\gamma(C \cap B); \mathbb{R}^n)$ por definición de atlas diferencial para $\mathscr{F}_N$.

- *Condición ii.* Dados $m \neq p$ en A, entonces $G(m) \neq G(p)$ en N como N es de Hausdorff entonces existen (V, ψ) y (W, γ) tales que $V \cap W = \emptyset$, $V \in \mathcal{V}_N(G(m))$ y $W \in \mathcal{V}_N(G(p))$. Claramente, por ser G una biyección $m \in G^{-1}(V)$, $p \in G^{-1}(W)$ y $G^{-1}(V) \cap G^{-1}(W) = \emptyset$. También,

  $$\Big(G^{-1}(V), \psi \circ G\Big), \Big(G^{-1}(W), \gamma \circ G\Big) \in \mathscr{G}.$$

- *Condición iii.* Como N es II-numerable entonces es de Lindelöf y $\mathscr{F}_N$ forma un cubrimiento abierto. Así, existe una sucesión $(V_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathscr{F}_N$ tales que cubre N. Esto implica que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G^{-1}(V_n)$$

Evidentemente, $(G^{-1}(V_n), \varphi_n \circ G)$ es una sucesión en $\mathscr{G}$ comprobando la condición iii.

Con las hipótesis comprobadas sabemos de una topología sobre A para la que $\mathscr{G}$ es un atlas diferencial y que vuelve a $(A, \mathscr{G}^*$ en una variedad diferencial. ($\mathscr{G}^*$ es el elemento máximal dentro de la cadena de atlas diferenciales en la que está $\mathscr{G}$)

Falta ver que $G : A \to N$ es un difeomorfismo. Para esto tomemos $(B, \varphi) \in \mathscr{G}$ y $(V, \psi) \in \mathscr{F}_N$ cualesquiera tales que $G^{-1}(V) \cap B \neq \emptyset$ y analicemos la representación local de G, $\hat{G} = \psi \circ (G \circ \varphi^{-1})$. Es claro que $(G^{-1}(V), \varphi \circ G) \in \mathscr{G}$, por lo que $\hat{G} \in C^\infty(\varphi(G^{-1}(V) \cap B); \mathbb{R}^n)$. Entonces de la proposición 2.27 tenemos que G es una aplicación de clase $C^\infty(A; N)$. Para $F : N \to A$ también tomamos una representación local, $\hat{F} = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$, y tenemos que $\hat{F} = \varphi \circ (\psi \circ G)^{-1}$. Ver que el dominio de esta función es

$$\psi(F^{-1}(B) \cap V) = \psi \circ G(G^{-1}(F^{-1}(B)) \cap G^{-1}(V)).$$

Dado que $(\psi(F^{-1}(B) \cap V), \psi \circ G) \in \mathscr{G}$, se concluye que $\hat{F} \in C^\infty(\psi(F^{-1}(B) \cap V); \mathbb{R}^n)$ que implica F es una aplicación de clase $C^\infty(N; A)$.

□

Teorema 3.26. *Sea M una variedad diferencial y $A \subseteq M$. Los siguientes resultados se tienen:*

- *Si fijamos una topología sobre A entonces a lo más existe un atlas diferencial máximal para A tal que $(A, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M,*
- *Si en la topología inducida por M, A tiene un atlas diferencial tal que $(A, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad diferencial de M entonces dicha topología y atlas máximal son los únicos que vuelven a A en una variedad diferencial tal que $(A, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad diferencial de M.*

Demostración. [Topología fija sobre A] Para comprobar lo primero, fijemos una topología para A. Asumamos que existe $\mathscr{G}$ un atlas máximal diferencial tal que $((A, \mathscr{G}), \hookrightarrow)$ es una *sub-variedad diferencial*. Para ver la unicidad de $\mathscr{G}$ tomaremos un $\mathscr{H}$ atlas diferencial cualquiera para A tal que $((A, \mathscr{H}), \hookrightarrow)$ es una *sub-variedad de M*. Basta mostrar que las cartas locales de $\mathscr{H}$ son todas diferenciablemente compatibles con todas las cartas locales de $\mathscr{G}$, entonces por el carácter maximal de estos atlas se tiene que $\mathscr{H} = \mathscr{G}$.

Notar que $(A, \mathscr{H}), \hookrightarrow)$ factoriza a $(A, \mathscr{G}) \hookrightarrow M$ y que $(A, \mathscr{G}), \hookrightarrow)$ factoriza a $(A, \mathscr{H}) \hookrightarrow M$, esto implica por el teorema 3.24 que

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathscr{G}) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed, leftrightarrow, "F_0"] & M \\
M & (A,\mathscr{H}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $F_0 = \mathrm{id}_A$. Notar que ambas variedades diferenciales tienen la misma topología por lo que F_0 es continua y entonces $\mathrm{id}_A : (A, \mathscr{G}) \to (A, \mathscr{H})$ es un difeomorfismo. Y por el proposición 2.27 para cualesquiera $(U, \varphi) \in \mathscr{G}$ y $(V, \psi) \in \mathscr{G}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$ la representación local de F_0,

$$\hat{F}_0 = \varphi \circ \mathrm{id}_A \circ \psi^{-1} \quad \text{es de clase } C^\infty(\psi(U \cap V); \mathbb{R}^n)$$

Esto es, (U, φ) y (V, ψ) son cartas locales diferenciablemente compatibles. Y probamos entonces $\mathscr{H} = \mathscr{G}$.

[Topología inducida sobre A] Asumamos que $(A, \mathscr{H})$ tiene la topología inducida, por otro lado, asumamos que existe $(A, \mathscr{G})$ una variedad diferencial con otra topología que cumple $(A, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad diferencial de M. Es clara las siguientes factorizaciones

$$\begin{tikzcd}
(A,\mathscr{G}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed, "id_A"'] & M \\
 & (A,\mathscr{H}) \arrow[u, hook, "f"']
\end{tikzcd}$$

Se tiene que f es una incrustación. Y por el teorema 3.24, $\mathrm{id}_A : (A, \mathscr{G}) \to (A, \mathscr{H})$ es una aplicación de clase $C^\infty((A, \mathscr{G}), (A, \mathscr{H}))$. De hecho, es una inmersión biyectiva y por el proposición 3.22 se tiene que es un difeomorfismo. Luego, homeomorfismo y por tanto las topologías son iguales.

Para terminar podemos usar el anterior literal para ver que $\mathscr{G} = \mathscr{H}$.

$\square$

Lema 3.27 (Sub-variedades de nivel). *Siendo $F : M^n \to N^m$, $q \in N$ tal que $F^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ y $\mathrm{d}F_p$ es sobreyectiva para todo $p \in F^{-1}(\{q\})$. Entonces $F^{-1}(\{q\})$ tiene una topología y un atlas diferencial respecto a los que $F^{-1}(\{q\})$ es una variedad diferencial de dimensión $(n - m)$ y $(F^{-1}(\{q\}), \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M, donde $P \hookrightarrow M$ es una incrustación.*

Demostración. Vamos mostrar que $P := F^{-1}(\{q\})$ con la topología heredada de M posee un atlas diferencial máximal que satisfaga nuestro resultado. Tomemos un sistema de coordenadas $(W; y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{V}_N(q)$ y $p \in P$ cualquiera, dado que $\mathrm{d}F_p$ es sobreyectiva entonces del corolario 3.18 (i) tenemos que $m \leq n$ y que hay $(V_p; x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}) \in \mathcal{V}_M(p)$ tal que $x_i^{(p)} = y_i \circ F$ para todo $0 < i \leq m$ con $V_p \subseteq F^{-1}(W)$. Notar que si $r \in V_p \cap P$ entonces $x_i(r) = y_i(p)$ para cualquier $0 < i \leq m$. Así, podemos definir $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\tau(z^1, \ldots, z^n) := (z^n, \ldots, z^1)$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ que es un isomorfo lineal, con el objetivo de definir $\tilde{\varphi} := \tau \circ \varphi - \tau(\varphi(q))$ y $\tilde{x}_i^{(p)} := \pi_i \circ \tilde{\varphi}$ para todo $0 < i \leq n$, obteniendo el siguiente sistema de coordenadas $(V_p, \tilde{x}_1^{(p)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(p)}) \in \mathcal{V}_M(p)$ que cumple:

$$\begin{aligned}
r \in V_p \cap P \implies & \tilde{\varphi}(r) = \tau \circ \varphi(r) - (x_n^{(p)}(q), \ldots, x_1^{(p)}(q)), \\
\implies & \tilde{x}_i(r) = x_{n-i+1}^{(p)}(r) - x_{n-i+1}(q) = 0 \quad (\forall\ n - m - 1 < i \leq n), \\
\implies & r \in \mathbf{S}_p := \mathbf{S}((V_p; \tilde{x}_1^{(p)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(p)}), 0, m - n).
\end{aligned}$$

De hecho si $r \in \mathbf{S}_p$, $r \in V_p$ y $x_i(r) = x_i(q)$ para todo $0 < i \leq m$ entonces $\psi \circ F(r) = \psi(q)$, por ser ψ biyectiva; por lo que, $F(r) = q$. En síntesis, para cualquier $p \in P$ encontramos para $V_p \cap P \in \mathcal{V}_P(p)$ que es un corte de dimensión $m - n$, de la discusión sobre cortes de una variedad tenemos la siguiente colección de cartas locales $\{(\mathbf{S}_p, \gamma_p) \mid p \in P\}$ para P donde

$$\begin{aligned} \gamma_p : \mathbf{S}_p &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ r &\longmapsto (\tilde{x}_1^{(p)}(r), \ldots, \tilde{x}_{n-m}^{(p)}(r)) \end{aligned}$$

Falta ver que estas cartas son diferenciablemente compatibles, pero esto es sencillo dado que, si $\rho(z) := (z^1, \ldots, z^{n-m}, 0, \ldots, 0)$ para todo $z \in \mathbb{R}^{n-m}$ y $\tau(z) := (z^1, \ldots, z^{n-m})$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ entonces se tiene que $\gamma_p \circ \gamma_{p'} = \tau \circ \varphi_p \circ \varphi_{p'}^{-1} \circ \rho$. comprobando que las funciones de transición son de clase C^∞. Por tanto, P tiene un atlas diferencial. Del lema del pegado, como cada corte $\mathbf{S}_p \in \mathbf{Op}^{op}(P)$ cumple que $(\mathbf{S}_p, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M, por el proposición 3.19, entonces $P \hookrightarrow M$ es una aplicación de clase C^∞, una inmersión y una inyección que ya se sabía antes. Entonces $(P, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M, por el teorema 3.26 tenemos la unicidad de la topología y el atlas diferencial máximal sobre P para que $(P, \hookrightarrow)$ sea una sub-variedad de M.

□

Teorema 3.28 (Teorema de la función implícita para variedad diferenciales)**.** *Sea $F : M^n \to N^m$ y (O^t, G) una sub-variedad de N. Asumiendo que para todo $m \in F^{-1}(G(O))$, se tiene que*

$$\mathbf{T}_{F(m)}(N) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}F_m) + \mathrm{Im}\left(\mathrm{d}G_{G^{-1}(F(m))}\right)$$

Si $P := F^{-1}(G(O)) \neq \emptyset$, entonces existe una topología y un atlas diferencial máximal para P tal que $(P, \hookrightarrow)$ es una sub-variedad de M, donde si $\ell := \dim\, P$ tenemos que

$$\dim\, M - \dim\, P = \dim\, N - \dim\, O.$$

Más aún, que (O^t, G) sea una incrustación implica que $(P^\ell, \hookrightarrow)$ también.

Demostración. Sea $p \in O$ de la observación en el teorema del rango 3.20 como G es una inmersión, existe $(W; y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{V}_N(G(p))$ donde $\tau := (y_1, \ldots, y_m)$ y $(V, \varphi) \in \mathcal{V}_O(p)$ tales que $G|_V$ es inyectiva y

$$G(V) = \mathbf{S}((W; y_1, \ldots, y_m), 0, t)$$

Notar que si $\pi(z) := (z^{t+1}, \ldots, z^m)$ para todo $z \in \mathbb{R}^m$ entonces se tiene que $\pi \circ \tau(G(V)) = \{0\}$.

Sea $U := F^{-1}(W) \in \mathbf{Op}^{op}(M)$ y $\tilde{\varphi} := \pi \circ \tau \circ F|_U$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} q \in \tilde{\varphi}^{-1}(\{0\}) &\iff q \in U \quad \text{y} \quad \pi \circ \tau(F(q)) = 0, \\ &\iff F(q) \in W \quad \text{y} \quad y_{t+1}(F(q)) = \cdots = y_m(F(q)) = 0, \\ &\iff F(q) \in G(V), \\ &\iff q \in F^{-1}(G(V)). \end{aligned}$$

Para cada $q \in \tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})$ se tiene que $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_p$ es sobreyectiva. Del teorema de composición de diferenciales tenemos que $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_p = \mathrm{d}(\pi \circ \tau)_{F(q)} \circ \mathrm{d}F_q$. Y por tanto, tenemos que

$$\mathbf{T}_{F(q)}(N) = \mathrm{d}F_q\,(\mathbf{T}_p(M)) + \mathrm{d}G_{G^{-1}(F(q))}\left(\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}(O)\right).$$

Con esto bastaría, ver que $dG_{G^{-1}(F(q))}\left(\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}(O)\right) = \{0\}$ para comprobar la sobreyectividad de dF_q. Empecemos por describir de manera más sencilla $\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}(O)$ a través de una base. Cómo ya sabemos, $V \in \mathcal{V}_O(G^{-1}(F(q)))$ y entonces existe un sistema de coordenadas $(\tilde{V}; x_1, \dots, x_t) \in \mathcal{V}_O(G^{-1}(F(q)))$; por lo que tenemos una base para $\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}(O)$. La base es

$$\left(v_i := \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{G^{-1}(F(Q))} \middle|\ 0 < i \leq t \right)$$

También tenemos una base para $\mathbf{T}_{F(q)}(N)$, este es

$$\left(w_i := \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(Q)} \middle|\ 0 < i \leq m \right)$$

Con esto encontremos la matriz Jacobiana de G en $F(Q)$. Empecemos por ver que para cualquier $[W, f] \in \mathscr{O}_{N,G^{-1}(F(q))}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
dG_{G^{-1}(F(Q))}(v_i)\ [W, f] &= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{G^{-1}(F(q))} [G^{-1}(W), f \circ G], \\
&= \left.\frac{\partial((f \circ G) \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))}, \\
&= \left.\frac{\partial((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ G \circ \varphi^{-1}))}{\partial x^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))}, \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial \hat{G}_j}{\partial x^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))} \cdot \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j}\right|_{\psi(F(q))}, \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial \hat{G}_j}{\partial z^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\psi(F(q))} [W, f].
\end{aligned}$$

De aquí, sabemos que $\hat{G}(z^1, \dots, z^t) = (z^1, \dots, z^t, 0, \dots, 0)$, y por tanto,

$$\left.\frac{\partial \hat{G}_j}{\partial z^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))} = \delta_{ij} \qquad \text{si } j \leq t$$
$$\left.\frac{\partial \hat{G}_j}{\partial z^i}\right|_{\varphi(G^{-1}(F(q)))} = 0 \qquad \text{si } t < j \leq m$$

Por ello,

$$dG_{G^{-1}(F(q))}\left(\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}(O)\right) \subseteq \langle \{w_i \mid 0 < i \leq t\} \rangle$$

Ahora discutiremos sobre

$$\begin{aligned}
d(\pi \circ \tau)_{F(q)}(w_i)\ [W, g] &= \left.\frac{\partial((g \circ (\pi \circ \tau)) \circ \tau^{-1})}{\partial y^i}\right|_{\tau(F(q))}, \\
&= \left.\frac{\partial(g \circ \pi)}{\partial y^i}\right|_{\tau(F(q))} = \sum_{j=t+1}^{m} \left.\frac{\partial g^j}{\partial y^i}\right|_{\tau(F(q))} = 0.
\end{aligned}$$

Y como vemos esto lleva a que $\mathrm{d}(\pi\circ\tau)_{F(q)}\left(\mathrm{d}G_{G^{-1}(F(q))}\left(\mathbf{T}_{G^{-1}(F(q))}\right)\right)=\{0\}$. Entonces

$$\mathrm{d}(\pi\circ\tau)_{F(q)}\left(\mathbf{T}_p(M)\right)=\mathrm{d}\tilde{\varphi}_p(\mathbf{T}_p(M))+\{0\}\,.$$

Por otro lado, $\pi\circ\tau$ son submersiones y por tanto, se tiene que $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_p(\mathbf{T}_p(M))=\mathbf{T}_{\tilde{\varphi}(p)}(\mathbb{R}^{m-t})$. ES decir, que tenemos que $\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})=F^{-1}(G(V))$ y $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_p$ es sobreyectiva en todo $p\in\tilde{\varphi}^{-1}(\{0\})$. Con ello podemos aplicar el lema 3.27 para tener la siguiente variedad $F^{-1}(G(V))$ que cumple $(F^{-1}(G(V)),\hookrightarrow)$ es una *sub-variedad de* M donde $F^{-1}(G(V))$ tiene la topología heredada de M y tiene dimensión $n-m+t$.

Por otro lado, este proceso arbitrario en los puntos O permite construir un cubrimiento abierto, que por ser O de lindelof, se reduce a un cubrimiento numerable, $\left\{(V_i;y_1^{(i)},\dots,y_m^{(i)}\,\middle|\, i\in\mathbb{N}\right\}$. Por tanto,

$$P=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}F^{-1}(G(V_i))$$

Siguiendo el lema 2.11 tenemos una topología y un atlas diferencial máximal para P. Esta variedad hace que $(P,\hookrightarrow)$ sea una sub-variedad de M. Si (O,G) es una incrustación podemos llegar a comprobar que P tiene la topología heredada de M y por el teorema 3.26(ii) tenemos la unicidad sobre la topología y atlas diferencial máximal que vuelven a $(P,\hookrightarrow)$ una incrustación.

$\square$

Ejemplo 3.29. (La esfera $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$) Digamos estamos en la variedad diferencial $\mathbb{R}^{n+1}$ y que allí definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^{n+1}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ p\quad&\longmapsto\sum_{i=1}^{n}\pi_i(p)^2\end{aligned}$$

Claro que f es una aplicación $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R})$ y que para cualquier $p\in\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_p:\quad \mathbf{T}_p(\mathbb{R}^{n+1})\quad&\longrightarrow\mathbf{T}_{f(p)}(\mathbb{R})\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha^i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\quad&\longmapsto\quad\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\pi_i(p)\right)\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{f(p)}\end{aligned}$$

todo esto por las identificaciones de $Df(p)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R})$ y $\mathrm{d}f_p$. De aquí, es evidente que $\mathrm{d}f_p$ es sobreyectivo para todo $p\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Sabemos que $f^{-1}(\{1\})=\mathbb{S}^n$ y por el lema 3.27 tenemos una única topología y único atlas diferencial máximal para $\mathbb{S}^n$ que hace que sea una variedad diferencial de dimensión n. Además, $(\mathbb{S}^n;\hookrightarrow)$ es una sub-variedad donde $\mathbb{S}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ es una incrustación.

Ejemplo 3.30. (Grupo Ortogonal $O(n)$ en $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$) Definamos $\mathscr{S}(n,\mathbb{R})$ el siguiente espacio vectorial bajo las operaciones heredadas de $\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\mathscr{S}(n):=\left\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\;\middle|\;A=A^T\right\}$$

Comprobar que las matrices simétricas forman un sub-espacio vectorial no es difícil. Sin embargo, necesitamos de la dimensión de este sub-espacio vectorial. Aún no necesitamos esto, así sigamos con definir la siguiente función.

$$\begin{aligned}U:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})&\longrightarrow\mathscr{S}(n)\\ A\quad&\longmapsto A^TA\end{aligned}$$

De aquí, es claro que $U^{-1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ es el grupo ortogonal. (grupo con la multiplicación de matrices) Necesitamos de saber que U es una aplicación de clase $C^\infty(\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R});\mathscr{S}(n))$. Pero claro primero necesitamos revisar que $\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})$ es una variedad diferencial. En general esto se puede resumir en lo siguiente:

$$\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R}) = \det{}^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \in \mathbf{Op}^{op}(\mathbb{R}^{n\times n})$$

Por tanto, $\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})$ es una *sub-variedad diferencial abierta de* $\mathbb{R}^{n\times n}$ que es de dimensión n^2. Sobre si $\mathscr{S}(n)$ es una variedad diferencial, no hay duda puesto que es un espacio vectorial de dimensión finita menor a n^2. Ver que $\mathcal{B} : \mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definido tal que $\mathcal{B}(A,B) = AB$ es una forma bilineal; y por tanto, $\mathcal{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n};\mathbb{R}^{n\times n})$. Por otro lado, $\mathcal{C} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\mathcal{C}(A) = A^T$ para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una aplicación lineal, y por ello, $\mathcal{C} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n\times n};\mathbb{R}^{n\times n})$. Con esto, se concluye que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n} \\ A \quad &\longmapsto (A, A^T) \end{aligned}$$

Se sabe que para cualquier $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $DF(A)H := (H, H^T)$ para cualquier $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Así, por composiciones concluimos que U es una aplicación de clase C^∞. Más aún, tenemos que $DF(A)H := AH^T + HA^T$ para todo $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Con esto basta probar, si $DF(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathscr{S}(n)$ es sobreyectiva cuando $A \in O(n)$. (ver que $DF(A)$ es la misma que recién discutimos pues $\mathscr{S}(n)$ tiene la norma inducida de $\mathbb{R}^{n\times n}$). Notar que si tomamos una matriz simétrica $S \in \mathscr{S}(n)$ entonces definimos

$$D_S \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}) \qquad \begin{cases} (d_S)_{ij} = 0 & \text{cuando } j > i \\ (d_S)_{ij} = s_{ij} & \text{cuando } i > j \\ (d_S)_{ii} = s_{ii}/2 \end{cases}$$

Claramente, $DF(A)\ D_S A = A(D_S A)^T + (D_S A)A^T = D_S^T + D_S = S$. Por ello, es sobreyectiva. Entonces por las identificaciones $\mathrm{d}F_A : \mathbf{T}_A(\mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})) \to \mathbf{T}_{A^TA}(\mathscr{S}(n))$ es sobreyectiva. Usamos entonces el lema 3.27 y vemos que $O(n)$ es tiene una única topología y atlas diferencial máximal que hace que $O(n) \hookrightarrow \mathrm{Gl}(n;\mathbb{R})$ sea una incrustación. Además de que,

$$\dim O(n) = n^2 - \dim(\mathscr{S}(n)).$$

Pero ver que para generar cualquier matriz simétrica necesitamos de llenar la diagonal y todas las entradas por debajo de la diagonal. Esto es suficiente. Con cada entrada por llenar tenemos una matriz canónica que en conjunto siempre son l.i. Por tanto, basta con ver que necesitamos n de estas matrices canónicas para la diagonal y $n(n-1)/2$ de estas para todas las entradas debajo de la diagonal. (El último número es inmediato) Por tanto, $\dim(\mathscr{S}(n)) = n(n+1)/2$. Luego,

$$\dim O(n) = n(n-1)/2$$

Capítulo 4 Campos Vectoriales

Lección 10

4.1. Definición y Equivalencias

Definición 4.1 (Curvas C^∞ sobre M)**.** Sea M^n una variedad diferencial, $\sigma : [a,b] \to M$. Decimos que σ es una curva C^∞ si existe una extensión $\tilde{\sigma} : (c,d) \to M$ donde $\tilde{\sigma}$ una aplicación de clase $C^\infty((c,d);M)$.

Si $t \in [a,b] \subseteq (c,d)$ entonces hablamos de $\mathbf{T}_t(c,d) = \left\langle \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\Big|_t \right\} \right\rangle$; por tanto, definimos el *vector tangente* de $\tilde{\sigma}$ en t por

$$\dot{\sigma}(t) = \mathrm{d}\tilde{\sigma}_t \left(\frac{\partial}{\partial r}\Big|_t \right) \in \mathbf{T}_{\sigma(t)}(M)$$

Definición 4.2 (Campos vectoriales sobre variedades diferenciales)**.** Sea M^n una variedad diferencial, a los siguientes conceptos usualmente se le llaman campos vectoriales

(1) **Campos vectoriales sobre curvas**. Sea $\sigma : [a,b] \to M$ una curva de clase C^∞, $X : [a,b] \to \mathbf{T}(M)$ *se dice un campo vectorial respecto a* σ si X pone en correspondencia cada tiempo t con un vector tangente en $\mathbf{T}_{\sigma(t)}(M)$. Esto es, dentro de nuestras definiciones,

$$\pi \circ X \equiv \sigma$$

donde $\pi : \mathbf{T}(M) \to M$ está definida tal que $\pi(p,v) = p$ para todo $(p,v) \in \mathbf{T}(M)$, recordar la definición 3.4. Si X es una curva de clase C^∞ sobre $\mathbf{T}(M)$ entonces más aún decimos que, *X es un campo vectorial respecto a σ de clase C^∞.*

(2) **Campos vectoriales sobre sub-variedades abiertas**. Sea $U \subseteq M$ es un abierto, $X : U \to \mathbf{T}(M)$ se *dice un campo vectorial sobre* U si X pone en correspondencia cada punto $p \in U$ con un vector tangente en $\mathbf{T}_p(M)$. Esto es

$$\pi \circ X \equiv \mathrm{id}_U$$

donde $\pi : \mathbf{T}(M) \to M$ es como lo definimos en la definición 3.4. Si es que es una aplicación de clase $C^\infty(U;\mathbf{T}(M))$ entonces más aún decimos que, *X es un campo vectorial sobre U de clase C^∞.*

Analizaremos los campos vectoriales, denotaremos al conjunto de campos vectoriales por $\mathfrak{X}(U)$ o $\mathfrak{X}(\sigma)$ dependiendo de si es un campo vectorial sobre una curva o una sub-variedad abierta.

Observación. Por el momento, nos enfocaremos en $\mathfrak{X}(U)$. En general, si $\sigma : (c,d) \to M^n$ es una curva de clase C^∞, siempre que $\dot\sigma(t) \neq 0 \in \mathbf{T}_{\sigma(t)}(M)$ entonces σ *es una inmersión.* Más aún, si σ es inyectiva entonces $((c,d),\sigma)$ es una sub-variedad de M^n. (llamamos $\tilde\sigma$ al difeomorfismo entre (c,d) y $\sigma(c,d)^1$ dado por σ) De los resultados en la section 3.2.3, es posible encontrar una variedad diferencial para $\sigma(c,d)^1$ que vuelva a $\sigma(c,d)^1 \hookrightarrow M$ una inmersión. En este caso, si X es un campo vectorial sobre curvas entonces

$$\begin{tikzcd}
(c,d) \arrow[r, "X"] \arrow[dr, dashed, "\tilde X"'] & \mathbf{T}(M) \\
 & \mathbf{T}(\sigma(c,d)) \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}$$

donde $F(p,v) = (p, \mathrm{d}\sigma_p(v))$ aún no lo hemos discutido pero $F : \mathbf{T}(\sigma(c,d)) \to \mathbf{T}(M)$ es una inmersión y usando el teorema 3.24 concluimos que $\tilde X \in \mathfrak{X}(\sigma(c,d)^1)$. Por ello, para un análisis inicial solo veremos campos vectoriales sobre sub-variedades abiertas.

Observación. Comprobaremos ahora mismo que $\mathfrak{X}(U) \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ y como $\mathscr{O}_M(U)$ es un anillo conmutativo entonces probaremos también que $\mathfrak{X}(U) \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{O}_M(U)}$. Lo primero es definir la suma en $\mathfrak{X}(U)$. Notar que no se puede hacer en el sentido usual, pues, $\mathbf{T}(M) = \mathbf{T}(M) := \bigsqcup_{p\in M} \mathbf{T}_p(M)$ no es un espacio vectorial. Sin embargo, si definimos para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, y todo $p \in U$, $X + Y(p) := (p, v + w)$ donde $X(p) = (p, v)$ y $Y(p) = (p, w)$. Entonces es muy claro que es un campo vectorial sobre U, pero no lo es tanto saber si $X + Y$ es una aplicación de clase $C^\infty(U; \mathbf{T}(M))$. Para esto tomemos $(V;\psi) \in \mathbf{Op}^{op}(V)$, $(W; x_1 \circ \pi, \ldots, x_n \circ \pi, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n) = (W; ((\varphi\circ\pi), (\mathrm{d}\varphi)) \in \mathbf{Op}^{op}(\mathbf{T}(M))$ y veamos la representación local de $X + Y$,

$$\begin{aligned}
((\varphi\circ\pi), \mathrm{d}\varphi) \circ (X+Y) \circ \psi^{-1} : Z \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\
z &\longmapsto G(z) + H(z)
\end{aligned}$$

donde $G(z) := (\varphi\circ\psi^{-1}(z), \mathrm{d}\varphi_{\psi^{-1}(z)}(\hat X \circ \psi^{-1}(z)))$ y $H(z) := (0, \mathrm{d}\varphi_{\psi^{-1}(z)}(\hat Y \circ \psi^{-1}(z)))$ para adecuados z. Ya probamos antes que las derivadas parciales de estas funciones son de clase C^∞. Por tanto, es claro que la representación local es de clase C^∞. Concluyendo que $X + Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Evidentemente, esta suma es conmutativa. Además, podemos definir $\hat 0(p) := (p, 0_{\mathbf{T}_p(U)})$ claramente de la definición se puede ver que $\hat 0 \in \mathfrak{X}(U)$. Con esto es claro que $\hat 0$ es el elemento nulo y las inversas de cualquier $X \in \mathfrak{X}(U)$ son de forma usual, $(X + (-X))(p) = (p, \hat X(p) - \hat X(p)) = \hat 0(p)$ para todo $p \in U$. Por ello, con esta suma $(\mathfrak{X}(U), +)$ es un grupo abeliano.

Por último, definir una multiplicación escalar es importante. Una vez que hagamos esto ver que $\mathfrak{X}(U) \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ será claro, y como consecuencia inmediata $\mathfrak{X}(U) \in \mathbf{Mod}_{\mathscr{O}_M(U)}$. Definimos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X(p) := (p, \lambda v)$ donde $X(p) = (p, v)$ para todo $p \in U$. Las comprobaciones son iguales a las de la suma. Por ello, $\lambda X \in \mathfrak{X}(U)$.

Finalmente, quisiéramos criterios para saber si un campo vectorial X de hecho está en $\mathfrak{X}(U)$. De esto trata esta proposición. Además, tenemos una noción nueva relacionada a los campos vectoriales. Pues bien, si $[W, f] \in \mathscr{O}_{U,p}$ tenemos un germen en el tallo de $\mathscr{O}_M$ en P, digamos que es realmente un parámetro asociado a la variedad y un punto. Luego, cualquier $v \in \mathbf{T}_p(U)$ dicen individualmente como cambian todos los parámetros posibles. Bien, si tenemos un campo vectorial tenemos por cada punto uno de estos indicadores de cambio. Nos interesa fijando un parámetro que funciona en una vecindad ver si su cambio alrededor de los cambios indicados por el campo vectorial sigue preservando la estructura C^∞.

Para formalizar esta idea, dado X un campo vectorial de V para cada $p \in V$ definimos $X_p : M \to \bigcup_{p \in M} \mathbf{T}_p(M)$ tal que $X(p) = (p, X_p)$ para todo $p \in M$. Y para cualquier $f \in \mathscr{O}_M(V)$ damos la función $X(f) : V \to \mathbb{R}$ definida tal que $X(f)\ p := X_p([V, f])$ para todo $p \in V$. Una propiedad de esta última definición es que si $f, g \in \mathscr{O}_M(V)$ entonces $X(f + \beta g)\ p = X_p([V, f + \beta g]) = X_p([V, f]) + \beta X_p([V, g])$ y por tanto $X(f + \beta g) = X(f) + \beta X(g)$. También se tiene que $X(fg)\ p = X_p([V, fg]) = f(p) X_p([V, g]) + g(p) X_p([V, f])$, luego $X(fg) = f\ X(f) + g\ X(f)$.

Proposición 4.1. *Sea X un campo vectorial sobre M^n. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *es* C^∞*,*

(ii) *Si* $(U; x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Op}^{op}(M)$*, y si* $(a_i \mid 0 < i \leq n)$ *una colección de funciones tales que*

$$X(p) := \left(p,\ \sum_{i=1}^{n} a_i(p)\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right) \qquad (\forall\ p \in U)$$

entonces $a_i \in \mathscr{O}_M(U)$*.*

(iii) *Siempre que* $V \in \mathbf{Op}^{op}(M)$ *y* $f \in \mathscr{O}_M(V)$*, entonces* $X(f) \in \mathscr{O}_M(V)$

Demostración. (i)$\Leftrightarrow$(ii) Dado el sistema de coordenadas en M, $(U; x_1, \ldots, x_n)$, entonces $(\pi^{-1}(U); x_1, \ldots, x_n, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n) \in \mathbf{Op}^{op}(\mathbf{T}(M))$. Con esto podemos ver la *representación local de X*, esto es

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_U, \varphi, \mathrm{d}\varphi) \circ X \circ \varphi^{-1}(z) &= (\mathrm{id}_U, \varphi)\ \left(\varphi^{-1}(z), \sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi^{-1}(z))\ \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi^{-1}(z)}\right), \\ &= (z^1, \ldots, z^n, a_1(\varphi^{-1}(z)), \ldots, a_n(\varphi^{-1}(z))).\end{aligned}$$

De aquí, es claro que si X es una aplicación de clase $C^\infty(M; \mathbf{T}(M))$ entonces la representación local es de clase C^∞ y por ello, $a_i \circ \varphi^{-1} \in C^\infty_{loc}(U; \mathbb{R})$. Luego, concluimos que $a_i \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ y por tanto, $a_i \in \mathscr{O}_M(U)$ para todo $0 < i \leq n$. De otra manera, si cualquier a_i cumple que $a_i \in \mathscr{O}_M(U)$ entonces es claro que todas las *representaciones locales de X* son de clase C^∞. (viendo que cada componente es de clase C^∞) Y por ello, $X \in C^\infty(U; \mathbf{T}(M))$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Usaremos el lema del pegado para mostrar que $X(f) \in \mathscr{O}_M(V)$ para cualquier

$V \in \mathbf{Op}^{op}(M)$ a través de mostrar que para cualquier $(U; x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Op}^{op}(V)$, se tiene que $X(f)|_U \in \mathscr{O}_M(U)$. Pero ver que,

$$
\begin{aligned}
X(f)\ p &= X_p([U, f]), \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [U, f].
\end{aligned}
$$

dado que $a_i \in \mathscr{O}_M(U)$ para cada $0 < i \leq n$ y $p \to \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [U, f]$ es de clase C^∞ entonces $X(f) \in \mathscr{O}_M(U)$. Por tanto, se cumple que $X(f) \in \mathscr{O}_M(V)$ por la arbitrariedad del sistema coordenada contenido en V.

(iii)⇒(ii) Tomemos cualquier $(U; x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Op}^{op}(M)$ tenemos que

$$
X(p) := \left(p,\ \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) \qquad (\forall\ p \in U)
$$

Por ello, tenemos que para cualquier $0 < i \leq n$

$$
\begin{aligned}
X(x_i)\ p &= \sum_{k=1}^{n} a_k(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_p [U, x_i], \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k(p) \left.\frac{\partial \pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1}}{\partial x^k}\right|_p, \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k(p) \left.\frac{\partial \pi_i}{\partial x^k}\right|_p = a_i(p)
\end{aligned}
$$

Concluyendo que $a_i \in \mathscr{O}_M(U)$.

□

4.2. El álgebra de Lie de los campos vectoriales

Definición 4.3 (Corchete de Lie)**.** Si X e Y son dos campos vectoriales de clase C^∞ sobre M, definimos un campo vectorial $[X, Y]$ *llamado corchete de Lie de* X *e* Y tal que para todo $p \in M$ se tiene que

$$
[X, Y]_p([V, f]) = X_p([V, Y(f)]) - Y_p([V, X(f)]) \qquad (\forall\ [V, f] \in \mathscr{O}_{M,p})
$$

Observación. Notar que en la definición de Corchete de Lie, tenemos que para $[V, f] \in \mathscr{O}_{M,p}$ entonces $f \in \mathscr{O}_M(V)$; por lo tanto, tenemos $Y : V \to \mathbf{T}(M)$. Así, se tiene que $Y(f) \in \mathscr{O}_M(V)$ como lo vimos en la proposición 4.1. Por ello, $[V, Y(f)], [V, X(f)] \in \mathscr{O}_{M,p}$ y entonces $[X, Y]_p$ está bien definido. Faltaría ver si es un campo vectorial, para esto basta confirmar que $[X, Y]_p \in \mathbf{T}_p(M)$, pero esto se sigue de que para cualquiera $[V, f], [U, g] \in \mathscr{O}_{M,p}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
[X, Y]_p([V, f] + \beta[U, g]) &= X_p([U \cap V, Y(f + \beta g)]) - Y_p([U \cap V, X(f + \beta g)]), \\
&= \{X_p([V, Y(f)]) - Y_p([V, X(f)])\} + \beta\ \{X_p([U, Y(g)]) - Y_p([U, X(g)])\}, \\
&= [X, Y]_p([V, f]) + \beta\ [X, Y]_p([U, g]).
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p([V,f][U,g]) &= X_p([U\cap V, Y(fg)]) - Y_p([U\cap V, X(fg)]),\\
&= X_p([U\cap V, fY(g)+gY(f)]) - Y_p([U\cap V, fX(g)+gX(f)]),\\
&= \{X_p([U\cap V, fY(g)]) - Y_p([U\cap V, fX(g)])\}\\
&\qquad + \{X_p([U\cap V, gY(f)]) - Y_p([U\cap V, gX(f)])\},\\
&= \{f(p)X_p([U,Y(g)]) + Y(g)\ p\ X_p([V,f]) - f(p)Y_p([U,X(g)]) - X(g)\ p\ Y_p([V,f])\}\\
&\quad + \{g(p)X_p([V,Y(f)]) + Y(f)\ p\ X_p([U,g]) - g(p)Y_p([V,X(f)]) - X(f)\ p\ Y_p([U,g])\},\\
&= f(p)\{X_p([U,Y(g)]) - Y_p([U,X(g)])\} + g(p)\{X_p([V,Y(f)]) - Y_p([V,X(f)])\},\\
&= f(p)[X,Y]_p([U,g]) + g(p)[X,Y]_p([V,f]).
\end{aligned}
$$

Con esto podemos decir propiamente que $[X,Y]$ es un campo vectorial de M.

Proposición 4.2. *El corchete de Lie, $[X,Y]$, es un elemento en $\mathfrak{X}(M)$ que cumple las siguientes propiedades:*

(i) *Si $f,g\in\mathscr{O}_M(M)$, entonces $[fX,gY] = fg[X,Y] + (f\ X(g))Y - (g\ Y(f))X$.*

(ii) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0_{\mathfrak{X}(M)}$ *para todos los campos vectoriales X, Y y Z sobre M. (Identidad de Jacobi)*

Demostración. Ver que $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$, ya tenemos casi todo listo. Solo falta ver que es una aplicación $C^\infty(M;\mathbf{T}(M))$, de nuevo, se hace uso del lema del pegado y las representaciones locales. Los detalles quedan como ejercicio.

Verifiquemos las otras propiedades rápidamente, dadas $f,g\in\mathscr{O}_M(M)$ entonces

$$
\begin{aligned}
[fX,gY]_p([V,h]) &= (fX)_p([V,Y(h)]) - (gY)_p([V,X(h)]),\\
&= f(p)X_p([V,g\ Y(h)]) - g(p)Y_p([V,f\ X(h)]),\\
&= fg(p)X_p([V,Y(h)]) + f(p)Y(h)\ p\ X_p([V,g])\\
&\qquad - fg(p)Y_p([V,X(h)]) - g(p)X(h)\ p\ Y_p([V,f]),\\
&= fg(p)[X,Y]_p[V,h] + f(p)Y_p[V,h]\ X(g)\ p - g(p)X_p[V,h]\ Y(f)\ p.
\end{aligned}
$$

Por ello, para cualquier $p\in M$ se tiene que $[fX,gY]_p = fg(p)[X,Y]_p + fX(g)\ (p)Y_p - gY(f)\ (p)X_p$.

Para ver que $[X,Y] = -[Y,X]$ ver que dado cualquier $p\in M$ y cualquier $[V,f]\in\mathscr{O}_{M,p}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
[X,Y]_p([V,f]) &= X_p([V,Y(f)]) - Y_p([V,X(f)]),\\
&= -\{X_p([V,Y(f)]) - Y_p([V,X(f)])\} = -[Y,X]_p([V,f]).
\end{aligned}
$$

Finalmente para la identidad de Jacobi, tenemos que

$$
[X,[Y,Z]]_p([V,f]) = X_p([V,[Y,Z](f)]) - Y_p([V,Z(X(f))]) + Z_p([V,Y(X(f))]).
$$

Pero ver que $[Y,Z](f)\ q = Y_q([V,Z(f)]) - Z_q([V,Y(f)]) = Y(Z(f))\ q - Z(Y(f))\ q$ para todo $q \in V$. Por lo tanto, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]]_p([V,f]) &= X_p([V,Y(Z(f)) - Z(Y(f))]) - Y_p([V,Z(X(f))]) + Z_p([V,Y(X(f))]),\\
[Z,[X,Y]]_p([V,f]) &= Z_p([V,X(Y(f)) - Y(X(f))]) - X_p([V,Y(Z(f))]) + Y_p([V,X(Z(f))]),\\
[Y,[Z,X]]_p([V,f]) &= Y_p([V,Z(X(f)) - X(Z(f))]) - Z_p([V,X(Y(f))]) + X_p([V,Z(Y(f))].
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
\{[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y]\}_p &\equiv -\{[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]\}_p\,,\\
&\equiv 0.
\end{aligned}$$

Comprobando la identidad de Jacobi y que es un álgebra de Lie.

□

Apéndice A. Diferenciabilidad en espacios normados

Lección 11

La intención de este apéndice es recapitular ciertas nociones de diferenciabilidad previos a la discusión de la topología diferencial. Aquí trataremos la diferenciabilidad en espacios normados. Para ser más preciso con el lector, los espacios normados con los que trabajaremos son los siguientes:

- El espacio vectorial de las aplicaciones lineales y acotadas, $\mathscr{L}(E, F)$.
- El producto de espacios normados $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$.
- El espacio vectorial de las aplicaciones multilineales y acotadas, $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_m;\ F)$ y el subespacio vectoriales de aquellas que son simétricas, $\mathscr{L}_S(E_1, \ldots, E_m;\ F)$.

A.1. Definiciones y propiedades básicas de diferenciabilidad

Definición A.1 (Diferenciabilidad en espacios normados)**.** Sea $f : \Omega \subseteq E \to F$ una función donde Ω es abierto. Decimos que *f es diferenciable en $a \in \Omega$* si existe $Df(a) \in \mathscr{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x - a\|_E} = 0$$

Si existe, $Df(a)$ es la única aplicación lineal y acotada que cumple el límite. A $Df(a)$ se le llama diferencial de f en a.

Si f es diferenciable en todo punto de Ω se le llama *derivada de* f a la función $f' : \Omega \to \mathscr{L}(E, F)$ tal que $f'(x) := Df(x)$ para todo $x \in \Omega$. Esta función es admitible dentro de la definición de derivada. Luego, tomará más relevancia.

Observación. Sobre la definición A.1 no es necesario que f esté definida sobre un abierto para hablar de diferenciabilidad de f en $x \in \Omega$. Si es necesario que Ω sea vecindad de x.

Observación. De la definición A.1, si f es diferenciable en a entonces f es continua en a. Por otro lado, el llamado **criterio de la aproximación lineal** dice que existe $Df(a) \in \mathscr{L}(E,F)$ y una función $\epsilon : \Omega \to F$ tal que

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \|x-a\|_E \ \epsilon(x) \qquad \text{para todo } x \in \Omega$$

y que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$. En efecto es equivalente a la diferenciabilidad de f en a.

Observación. Si tenemos $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to E$ y f es diferenciable en $x \in \Omega$ entonces $Df(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}, E)$ de la definición A.1. Pero se identifica a $Df(a)$ con su evaluación en 1 pues si $T := Df(a)\ 1$ entonces para todo $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $T \cdot s = Df(a)\ s$. Por ello, se dice que $Df(a) \in E$. Lo mismo se puede hacer si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to E$.

Los siguientes dos teoremas son de utilidad para distinguir si una función es diferenciable conociendo que se forma de otras funciones diferenciables. Estos son:

Teorema A.1 (Teorema de la Cadena)**.** *Sea $f : \Omega \subseteq E \to F$ con Ω abierto, $g : \Phi \subseteq F \to G$ con Φ abierto y con $f(\Omega) \subseteq \Phi$. Si f es diferenciable en $a \in \Omega$ y g es diferenciable en $f(a) \in \Phi$; luego, $g \circ f : \Omega \to G$ es diferenciable en a. Además,*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Teorema A.2 (Propiedades Algebraicas de la diferenciabilidad)**.** *Sean $f, g : \Omega \to F$ con Ω un abierto de E dos funciones diferenciables en $a \in \Omega$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que:*

(i) *$f + g$ es diferenciable en a y $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.*

(ii) *λf es diferenciable en a y $D(\lambda f)(a) = \lambda \cdot Df(a)$.*

(iii) *Si $F = \mathbb{R}$ entonces fg es diferenciable en a, $D(fg)(a) = g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$. Y si $g(a) \neq 0$ entonces f/g está definida en una vecindad de a, es diferenciable en a y $D(f/g)(a) = g(a)^{-2} \cdot [g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)]$.*

Teorema A.3 (Diferenciación hacia producto de espacios normados)**.** *Sea $f : \Omega \to F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ con Ω un abierto de E y $f = (f^1, f^2, \cdots, f^m)$. Se cumple que f es diferenciable en $a \in \Omega$ ssi para cada $0 < j \leq m$ se cumple que f^j es diferenciable en $a \in \Omega$. Además,*

$$Df(a)\ h = \Big(Df^1(a)\ h,\ Df^2(a)\ h,\ \ldots,\ Df^m(a)\ h\Big)$$

Ejemplos A.4. Veremos a continuación ejemplos varios de funciones diferenciables. Son de utilidad en el desarrollo de la sección principal e ilustra también como entran en acción el teorema A.1, el teorema A.2 y el teorema A.3.

- Cualquier función constante, $f : E \to F$ definida por $f(x) := a$ para cada $a \in E$, es diferenciable en E. Y la función derivada es $f' : E \to \mathscr{L}(E,F)$ definida por $Df(a) := 0_{\mathscr{L}}$ para todo $a \in E$.
- Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ entonces T diferenciables en E y $T' : E \to \mathscr{L}(E,F)$ está definida por $DT(a) := T$ para todo $a \in E$.

- Si $T \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ entonces T es diferenciable en $E_1 \times \cdots \times E_n$ y para cada $a \in E_1 \times \cdots \times E_n$ se tiene que

$$DT(a)\ h := T(h^1, a^2, \ldots, a^n) + \cdots + T(a^1, \ldots, a^{n-1}, h^n)$$

- Sea $\mathbf{Isom}(E, F)$ el conjunto de los homeomorfismos lineales, $\mathbf{Isom}(E, F)$ es un abierto de $\mathscr{L}(E, F)$ y la función $\Psi : \mathbf{Isom}(E, F) \to \mathscr{L}(F, E)$ definida por $\Psi(T) := T^{-1}$ para cada $T \in \mathscr{L}(E, F)$, es una función continua. Luego, se puede probar que Ψ es diferenciable en $\mathbf{Isom}(E, F)$ y que para cualquier homeomorfismo lineal T, $D\Psi(T)\ S := -T^{-1}ST^{-1}$ para todo $S \in \mathscr{L}(E, F)$.
- Sea E un espacio con producto interno. Si E es un espacio vectorial real entonces para cualquier $a \in E$ se tiene que $\|\cdot\|^2 : E \to \mathbb{R}$ es diferenciable en a y $D\|\cdot\|^2(a)\ x := (2a|x)$ para todo $x \in E$. Si en cambio, E es un espacio vectorial complejo entonces $\|\cdot\|^2$ solo es diferenciable en 0 y $D\|\cdot\|^2(0) = 0_{\mathscr{L}}$. En cualquier caso, siempre se cumple que $\|\cdot\|$ no es diferenciable en 0.

Con estas definiciones hay que recapitular varios resultados importantes dentro del cálculo diferencial en espacios normados. Esto es en esencia, el teorema de incrementos finitos y, en particular cuando $F = \mathbb{R}$, el teorema de valor medio.

Teorema A.5 (Incrementos finitos)**.** *Sea $f : \Omega \subseteq E \to F$ con Ω no necesariamente abierto. Si $[a, b]$ es el segmento de recta que une $a, b \in E$ y digamos Ω es una vecindad de este conjunto. Si existe $D \subseteq [a, b]$ contable tal que para todo $x \in [a, b] \setminus D$, f es diferenciable en x, entonces*

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \|b - a\|_E \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df((1 - t) \cdot a + t \cdot b)\|_{\mathscr{L}(E,F)}$$

Una consecuencia relevantes sobre el teorema de incrementos finitos A.5 es:

Corolario A.6. *Sea $\Omega \subseteq E$ un abierto convexo, $f : \Omega \to F$. Si f es tal que $Df(a) = 0_{\mathscr{L}}$ para todo $a \in \Omega$ excepto una cantidad contable de puntos entonces f es constante.*

Teorema A.7 (Teorema de valor medio)**.** *Sea $\Omega \subseteq E$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con derivada continua. Entonces para cualquier segmento $[a, b] \subseteq \Omega$ se cumple que*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df\left((1 - t)a + tb\right)\ (b - a)\ \mathrm{d}t.$$

Demostración. Se define la siguiente función auxiliar $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(t) := f\left((1 - t)a + tb\right). \qquad (\forall\ t \in [0, 1])$$

Esta función es diferenciable en $(0, 1)$ por el teorema A.1, teorema A.2 y porque f es diferenciable en $[a, b]$. Más aún, se tiene que $D\varphi(t) := Df\left((1 - t)a + tb\right)\ (a - b)$ para todo $t \in (0, 1)$. Por argumentos de composición y suma de funciones continuas, tenemos que $t \mapsto D\varphi(t) \in \mathbb{R}$ es una función continua. La igualdad es una aplicación inmediata del teorema fundamental del cálculo aplicado a la función $t \mapsto D\varphi(t) \in \mathbb{R}$; para la que se cumplen todas las hipótesis.

$\square$

Para terminar esta sección, estudiemos la diferenciabilidad de funciones de un producto de espacio normado a otro espacio normado. Para ello, definamos la derivada parcial.

Definición A.2 (Derivadas Parciales)**.** Sea $f : \Omega \to F$ y $\Omega \subseteq E_1 \times \cdots \times E_n$ un abierto. La aplicación parcial de f respecto a la componente j-ésima en el punto $a \in \Omega$ es la función

$$\begin{aligned} \rho_{j,a} : \left\{ x^j \in E_j \middle| \ (a^1, \dots, x^j, \dots, a^n) \in \Omega \right\} &\longrightarrow F \\ x^j &\longmapsto f(a^1, \dots, x^j, \dots, a^n) \end{aligned}$$

Notar que $\operatorname{dom}(\rho_{j,a}) \subseteq E_j$ es una vecindad abierta de a^j. Así, se dice que f *tiene derivada parcial j-ésima en a* si $\rho_{j,a}$ es diferenciable en a^j y este diferencial lo que se llama derivada parcial. De manera más clara,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_a = D\rho_{j,a}(a^j).$$

Teorema A.8 (Diferenciación en producto de espacios normados)**.** *Sea $f : \Omega \to F$ y $\Omega \subseteq E := E_1 \times \cdots \times E_n$ es un abierto. Si f es diferenciable en $a \in \Omega$ entonces*

$$Df(a)\ h = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_a (h^j)$$

A.2. Diferenciabilidad de grado superior

Por conveniencia del siguiente procedimiento dada una función f en el contexto usual de este apéndice, si f es diferenciable llamamos $f^{(1)}$ a la derivada de f y si es dos veces diferenciable $f^{(2)}$ a la derivada de f'.(Naturalmente, $f^{(1)}(a) = D^1 f(a)$ y $f^{(2)}(a) = D^2 f(a)$) Para definir la diferenciabilidad de grado superior, usaremos esquemas recursivos. Para entender porque necesitamos de esto primero definamos por un esquema recursivo el siguiente espacio vectorial

Definición A.3. De manera recursiva se define el siguiente espacio vectorial

$$\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, \mathscr{L}(E_{n+1}, F)) \dots) := \mathscr{L}(E_1,\ \mathscr{L}(E_2, \mathscr{L}(E_3, \dots, \mathscr{L}(E_{n+1}, F)) \dots)\ )$$

El conjunto de todas las aplicaciones multilineales y acotadas $\mathscr{L}(E_1, \dots_{(n+1)}, E_{n+1}; F)$ es un espacio normado con la norma

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathscr{L}(E_1, \dots_{(n+1)}, E_{n+1}; F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longmapsto \sup_{\|x^1\| \le 1, \dots, \|x^{n+1}\| \le 1} \|T(x^1, \dots, x^{n+1})\|. \end{aligned}$$

Observación. Se puede mostrar por inducción que

$$\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, \mathscr{L}(E_n, F)) \dots) \cong \mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F)$$

De hecho, si definimos el siguiente homeomorfismo lineal isométrico

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow \mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, E_n; F)) \\ T &\longmapsto \Gamma(T) \end{aligned}$$

donde para cada $x^1 \in E_1$ se define $\Gamma(T)x^1 : E_1 \to \mathscr{L}(E_2 \dots, E_n; F)$ por $\Gamma(T)x^1(x^2, \dots, x^n) := T(x^1, x^2, \dots, x^n)$ para cada $(x^2, \dots, x^n) \in E_2 \times \cdots \times E_n$. Entonces para el paso recursivo asumiendo la isomorfía isométrica es cierta para cualquier $(n-1)$-upla de espacios vectoriales tenemos que $\mathscr{L}(E_2, \mathscr{L}(E_3, \dots, \mathscr{L}(E_n, F)) \dots) \cong \mathscr{L}(E_2, \dots, E_n; F)$. Así,

$$\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, \mathscr{L}(E_n, F)) \dots) \cong \mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, E_n; F)) \cong \mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Definición A.4 (Funciones k veces diferenciables)**.** Sea $f : \Omega \to F$ y $\Omega \subseteq E$ un abierto. Decimos que f **es** k**-veces diferenciable en** $a \in \Omega$ con $k \geq 2$ cuando f es $(k-1)$-veces diferenciable en cualquier punto de Ω y $f^{(k-1)} : \Omega \to \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, \dots_{(k-1)}, \mathscr{L}(E, F)) \dots)$ es diferenciable en a. Además, se define $D^k f(a) := Df^{(k-1)}(a)$ y si f *es* k*-veces diferenciable en todo* $a \in \Omega$ definimos $f^{(k)} : \Omega \to \mathscr{L}(E, \mathscr{L}(E, \dots_{(k)}, \mathscr{L}(E, F)) \dots)$ por $f^{(k)}(a) := D^k f(a)$ para cada a.

Observación. Digamos que Γ es el homeomorfismo lineal isométrico entre $\mathscr{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ y el espacio $\mathscr{L}(E_1, \mathscr{L}(E_2, \dots, \mathscr{L}(E_n, F)) \dots)$. Es cierto que para que f es k-veces diferenciable en $a \in \Omega$ es necesario y suficiente que $f^{(k-1)} \circ \Gamma^{-1} : \Omega \to \mathscr{L}(E, \dots_{(k-1)}, E; F)$ sea diferenciable en $a \in \Omega$.

Por aquello, se hace un abuso de notación y se dice que $f^{(k)} : \Omega \to \mathscr{L}(E, \dots_{(n)}, E; F)$.

Teorema A.9. *Si* f *es* k*-veces diferenciable en* Ω *y* $f^{(k)}$ *es* ℓ*-veces diferenciable en* $a \in \Omega$ *entonces* f *es* $(k+\ell)$*-veces diferenciable en* a*. Además, se cumple que* $f^{(k+\ell)} = \left(f^{(k)}\right)^{(\ell)}$

Ejemplos A.10. Si recordamos los ejemplos A.4 todos aquellas funciones de hecho son de clase C^∞. Pero porque se necesita de otras herramientas, postergaremos la comprobación de algunos de estos ejemplos. Aquí, aquellos que es posible comprobar con nuestras herramientas:

- Digamos $f : E \to F$ es una función constante. Probaremos por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f es n-veces diferenciable y $f^{(n)} : E \to \mathscr{L}(E, \dots_{(n)}, E; F)$ es la función constante 0. La base de la inducción ya está probada. Para el paso inductivo tomamos cualquier $n \in \mathbb{N}$ para el que f sea n-veces diferenciable y con $f^{(n)} \equiv 0$. Como $f^{(n)} : E \to \mathscr{L}(E, \dots_{(n)}, E; F)$ es constante entonces $Df^{(n)}(a) = 0$ para todo $a \in E$. Así, de la definición A.4, $f^{(n+1)} \equiv 0$. Con esto también hemos probado que $f \in C^\infty(E; F)$.
- Digamos $T \in \mathscr{L}(E, F)$ entonces tenemos que $T' : E \to \mathscr{L}(E, F)$ es una función constante. Con ello, ver que para todo $n > 1$ se tiene que T es 1-veces diferenciable y que T' es $(n-1)$-veces diferenciable, entonces por el teorema A.9 tenemos que T es n-veces diferenciable. De hecho, $T^{(n)} := 0$.Con esto probamos que $T \in C^\infty(E; F)$.
- Digamos $B \in \mathscr{L}(E_1, E_2; F)$ es una aplicación bilineal y acotada entonces tenemos que $B' : E_1 \times E_2 \to \mathscr{L}(E_1 \times E_2, F)$ es una aplicación lineal y acotada. Con ello, ver que para todo $n > 1$ se tiene que B es 1-veces diferenciable y que B' es $(n-1)$-veces diferenciable, entonces por el teorema A.9 tenemos que B es n-veces diferenciable. De hecho, $B^{(n+1)} := 0$. Con esto probamos que $B \in C^\infty(E_1 \times E_2; F)$.

Definición A.5 (Funciones de clase C^k y C^∞)**.** El conjunto $C^k(\Omega; F)$ con $\Omega \subseteq E$ abierto es el de todas las funciones $f : \Omega \to F$ que son k-veces diferenciables en Ω y tales que $f^{(k)} : \Omega \to \mathscr{L}(E, \dots_{(k)}, E; F)$ es continua. Otro conjunto importante es

$$C^\infty(\Omega; F) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega; F)$$

Observación. Para mostrar que $f \in C^\infty(\Omega; F)$ basta probar que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que f es k-veces diferenciable en Ω.

Teorema A.11 (Propiedades algebráicas en C^∞). *Sean $f, g : \Omega \to F$ con Ω un abierto de E dos funciones en $C^\infty(\Omega; F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que*

(i) $f + g \in C^\infty(\Omega; F)$ *además se tiene para todo $a \in \Omega$ que $(f+g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a)$ para todo k.*

(ii) $\lambda f \in C^\infty(\Omega; F)$ *además se tiene para todo $a \in \Omega$ que $(\lambda f)^{(k)}(a) = \lambda f^{(k)}(a)$ para todo k.*

(iii) Siempre que $F = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^m$ entonces $fg \in C^\infty(\Omega; F)$.

(iv) Siempre que $F = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^m$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ entonces $f/g \in C^\infty(\Omega; F)$.

Teorema A.12 (Teorema de la cadena para derivadas de grado superior). *Sea $f : \Omega \to F$ con Ω abierto de E, $g : \Phi \to G$ con Φ abierto de F y con $f(\Omega) \subseteq \Phi$. Si $f \in C^\infty(\Omega; F)$ y $g \in C^\infty(\Phi; G)$; luego, $g \circ f : \Omega \to G$ está en $C^\infty(\Omega; G)$.*

Demostración. Del teorema A.1 Sabemos que para todo $a \in \Omega$ se tiene que $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$. Si definimos

$$\begin{aligned} \Psi : \mathscr{L}(F,G) \times \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{L}(E,G) \\ (S,T) \qquad &\longmapsto T \circ S, \end{aligned}$$

Podemos comprobar que $\Psi \in \mathscr{L}\left(\mathscr{L}(F,G), \mathscr{L}(E,F); \mathscr{L}(E,G)\right)$ es una aplicación bilineal acotada. También podemos definir

$$\begin{aligned} \rho_F : \mathscr{L}(F,G) &\longrightarrow \mathscr{L}(F,G) \times \mathscr{L}(E,F) \\ S &\longmapsto (S,0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \rho_E : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{L}(F,G) \times \mathscr{L}(E,F) \\ T &\longmapsto (0,T) \end{aligned}$$

y es claro que ρ_F, ρ_E son aplicaciones lineales acotadas. Con estas funciones estamos listos para el argumento principal.

Usaremos inducción probar lo requerido. La base ya está resuelta y para el paso recursivo asumimos que la composición de funciones k-veces diferenciables en a es una función k-veces diferenciable. Supongamos que f y g son $(k+1)$-veces diferenciable en a. Luego, $f \circ g$ es diferenciable, si definimos $\varphi := \rho_F \circ (g' \circ f) + \rho_E \circ f'$ entonces

$$(g \circ f)'(x) := \Psi \circ \varphi(x)$$

Se sabe que $f, g', f', \rho_E, \rho_F$ son todas funciones k-veces diferenciable en a. Si usamos la hipótesis de inducción y el teorema A.12 podemos probar que φ es k-veces diferenciable en a. Luego, por hipótesis de inducción otra vez entonces $(g \circ f)'$ es k-veces diferenciable en a y por el teorema A.9 tenemos que $g \circ f$ es $(k+1)$-veces diferenciable en a.

Si la composición se preserva entre todas las funciones en $C^k(\Omega; F)$ y $C^k(\Phi; G)$ que se pueden componer entonces como

$$C^\infty(\Omega; F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega; F) \qquad C^\infty(\Phi; G) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Phi; G)$$

entonces el resultado se sigue.

$\square$

Teorema A.13 (funciones de clase C^k hacia producto de espacios normados)**.** *Sea* $f : \Omega \to F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_m$ *con* Ω *un abierto de* E *y* $f = (f^1, f^2, \cdots, f^m)$*. Se cumple que* f *es* k*-veces diferenciable en* a *ssi para cada* $0 < j \leq m$ *se cumple que* f^j *es* k*-veces dierenciable. Otra consecuencia es que*

$$C^k(\Omega, F) = \left\{ f : \Omega \to F \,\middle|\, (\forall\ 0 < j \leq m) \quad f^j \in C^k(\Omega; F_j) \right\}$$

Teorema A.14 (Funciones de Clase C^k en producto de espacios normados)**.** *Sea* $f : \Omega \to F$ *y* $\Omega \subseteq E := E_1 \times \cdots \times E_n$ *es un abierto. Si* $f \in C^k(\Omega; F)$ *entonces para cada* $a \in \Omega$ *y cualquier* $h \in E$ *se tiene que*

$$f^{(k)}(a)\ h^k = \sum_{\sigma \in S_k} \left. \frac{\partial^p f}{\partial x^{\sigma(1)} \cdots \partial x^{\sigma(k)}} \right|_a \left(h^{\sigma(1)}, \ldots, h^{\sigma(k)} \right)$$

Ejemplos A.15. Unos últimos ejemplos sobre funciones que son de clase C^∞:

- Sea $T \in \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ sabemos que para todo $a \in E_1 \times \cdots \times E_n$ se tiene que

  $$DT(a)\ h = T(h^1, a^2, \ldots, a^n) + \cdots + T(a^1, \ldots, a^{n-1}, h^n)$$

  Ahora definamos para $0 < j \leq n$ la siguiente aplicación multilineal y acotada

  $$\begin{aligned} \Psi_j : E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow \mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E_1 \times \cdots \times E_n) \\ a &\longmapsto \Psi_j(a) \end{aligned}$$

  donde $\Psi_j(a)\ h := (a^1, \ldots, h^j, \ldots, a^n)$ para todo $h \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Luego, se puede comprobar que $DT(a) = \sum_{j \leq n} T \circ \Psi_j(a)$. Con esto, se procede por inducción y tomamos un k para el que cualquier aplicación multilineal y acotada sea k-veces diferenciable en a y por el teorema A.11, el teorema A.12 tenemos que T' es una función k-veces diferenciable en a. Luego, por el teorema A.9 tenemos que T es $(k+1)$-veces diferenciable en a.

  Y por tanto, se prueba que $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq C^\infty(E_1 \times \cdots \times E_n; F)$.

- $\Psi : \mathbf{Isom}(E; F) \to \mathscr{L}(F, E)$ tal que $\Psi(T) := T^{-1}$ para todo $T \in \mathbf{Isom}(E, F)$ es tal que $\Psi'(T)\ S := -T^{-1} S T^{-1}$ para todo $S \in \mathscr{L}(E, F)$. Podemos definir las siguientes funciones

  $$\begin{aligned} \gamma : \mathscr{L}(F, E) \times \mathscr{L}(F, E) &\longrightarrow \mathscr{L}(F, E) \\ (S, T) &\longmapsto \gamma(S) \end{aligned}$$

  donde $\gamma(S, T)\ H := -SHT$ para todo $H \in \mathscr{L}(E, F)$. En efecto, γ es una aplicación bilineal acotada. También se puede definir la función $\beta : \mathscr{L}(F, E) \to \mathscr{L}(F, E) \times \mathscr{L}(F, E)$ por $\beta(S) := (S, S)$ para cada $S \in \mathscr{L}(F, E)$. Claro, esta función también es lineal y acotada.

  Por último, se puede ver que

  $$\Psi'(T) = \gamma \circ \beta \circ \Psi(T)$$

  Con esto, por inducción se puede probar que si Ψ es k-veces diferenciable en a entonces Ψ' es k-veces diferenciable en a. Luego, por el teorema A.9 se tiene que Ψ es $(k+1)$-veces diferenciable. Por inducción, se concluye que $\Psi \in C^\infty\left(\mathbf{Isom}(E, F), \mathscr{L}(F, E)\right)$.

- El cuadrado de las normas provenientes de un producto interno en un espacio vectorial real son funciones C^∞.

Teorema A.16 (Lema del pegado). *Sea $\Omega \subseteq E$ abierto, $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de Ω y $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$, $f_\alpha : U_\alpha \to F$. Si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ se cumple que:*

(i) $f_\alpha \in C^\infty(\Omega_\alpha; F)$,

(ii) si $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$ *entonces* $f_\alpha|_{\Omega_\alpha\cap\Omega_\beta} = f_\beta|_{\Omega_\alpha\cap\Omega_\beta}$.

entonces existe un única función $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ se cumple $f|_{\Omega_\alpha} = f_\alpha$.

A.2.1. Teoremas importantes

Esta es una colección de teorema que usaremos en el desarrollo de la teoría de la topología diferencial. En verdad esta es la parte más importante de este apéndice.

Teorema A.17 (Fórmula de Taylor con resto integral). *Sea $a, h \in E$, $\Omega \subseteq E$ una vecindad abierta de $[a, a+h]$ y $f : \Omega \subseteq E \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^m(\Omega; \mathbb{R})$ entonces*

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a)\ h + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)\ h^{m-1} \\ + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}(f^{(m)}(a+th)\ h^m)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donde para cada $0 < j \leq m$ y cada $h \in \Omega$ se tiene que $f^{(j)}(a)\ h^j = f^{(j)}(a)\ (h, \ldots_j, h)$.

Demostración. Se define la siguiente función auxiliar $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(t) := f\left(a + th\right). \qquad (\forall\ t \in [0, 1])$$

Es claro que $\varphi \in C^m((0, 1); \mathbb{R})$ y también se puede ver que $\varphi^k(t) := f^{(k)}(a + th)h^k$ para todo $0 < k \leq m$. Si definimos

$$\begin{aligned} \psi\ [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) + (1-t)\varphi'(t) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(1-t)^{m-1}\varphi^{(m-1)}(t). \end{aligned}$$

entonces se puede decir que ψ es diferenciable en $(0, 1)$ y que para cualquier $t \in (0, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \varphi'(t) + [(1-t)\varphi''(t) - \varphi'(t)] + \frac{1}{2}\left[(1-t)^2\varphi'''(t) - 2(1-t)\varphi''(t)\right] \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}\left[(1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t) - (m-1)(1-t)^{m-2}\varphi^{(m-1)}(t)\right], \\ &= [\varphi'(t) - \varphi'(t)] + [(1-t)\varphi''(t) - (1-t)\varphi''(t)] \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(m-2)!}\left[(1-t)^{m-2}\varphi^{(m-1)}(t) - (1-t)^{m-2}\varphi^{(m-1)}(t)\right] + \frac{(1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t)}{(m-1)!}, \\ &= \frac{(1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t)}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Y para finalizar como $\psi \in C^1((0,1);\mathbb{R})$ por el teorema A.7 tenemos que

$$\begin{aligned} f(a+h) - \left(f(a) + f'(a)\ h + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)\ h^{m-1}\right) \\ &= \varphi(1) - \left(\varphi(0) - \varphi'(0) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(0)\right), \\ &= \psi(1) - \psi(0), \\ &= \int_0^1 \psi'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\left(f^{(m)}(a+th)\ h^m\right)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Corolario A.18. *Sea $a, h \in E$, $\Omega \subseteq E$ una vecindad abierta de $[a, a+h]$ y $f : \Omega \subseteq E \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^m(\Omega;\mathbb{R})$ entonces*

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + \sum_{0<j\leq n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^j}\right|_a (h^j) + \frac{1}{2}\sum_{0<i,j\leq n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\ \partial x^i}\right|_a (h^j, h^i) \\ + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{0<\sigma(1),\ldots,\sigma(m-1)\leq n} \left.\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{\sigma(1)}\cdots\partial x^{\sigma(m-1)}}\right|_a \left(h^{\sigma(1)},\ldots,h^{\sigma(m-1)}\right) \\ + \sum_{0<\sigma(1),\ldots,\sigma(m)\leq n} \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}\cdot \left.\frac{\partial^m f}{\partial x^{\sigma(1)}\cdots\partial x^{\sigma(m)}}\right|_{(a+th)} \left(h^{\sigma(1)},\ldots,h^{\sigma(m)}\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Teorema A.19 (Teorema de la función inversa)**.** *Sea E y F dos espacios de Banach, $a \in \Omega \subseteq E$ con Ω abierto y $f : \Omega \to F$ una función de clase $C^m(\Omega;F)$. Si $Df(a)$ es un homeomorfismo lineal entonces existe $U \subseteq E$ vecindad de a tal que $f(U)$ es abierto en F y $f|_U$ es una biyección de clase $C^m(U;f(U))$ con inversa de clase $C^m(f(U);U)$.*

Demostración. as

□

Teorema A.20 (Teorema del rango)**.** *Sea E un espacio normado n-finito dimensional y F un espacio normado m-finito dimensional, $a \in \Omega \subseteq E$ con Ω abierto y $f : \Omega \to F$ una función de clase $C^\ell(\Omega;F)$. Si f es tal que $\operatorname{rank}(Df(c)) = k$ para todo $c \in \Omega$ entonces existen:*

(i) *$U \subseteq A$ una vecindad de a que es homeomorfa al cubo $\sqsubseteq_n [1]$ en $\mathbb{R}^n$, dicho homeomorfismo es de clase $C^\ell(U;\sqsubseteq_n [1])$ y su inversa es $C^\ell(\sqsubseteq_n [1];U)$;*

(ii) *V una vecindad de $b = f(a)$ que contiene a $f(U)$ homeomorfa al cubo $\sqsubseteq_m [1]$ en $\mathbb{R}^m$, dicho homeomorfismo es de clase $C^\ell(V;\sqsubseteq_m [1])$ y su inversa es $C^\ell(\sqsubseteq_m [1];V)$.*

Tales vecindades son tales que si sus respectivos homeomorfismos son φ y ψ entonces $f =$

$\psi \circ f_0 \circ \varphi$ *con*

$$\begin{aligned} f_0 : \quad \sqsubseteq_n [1] \quad &\longrightarrow \sqsubseteq_m [1] \\ (x^1, \ldots, x^n) \ &\longmapsto \ (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

Demostración. Asumamos que $a = 0$ y $b = 0$. Llamemos M al espacio de $(n-k)$-dimensional Ker $Df(0)$, esto último por el *teorema de Rango-Nulidad*. En cambio, llamaremos N al suplemento de M en E. Podemos tomar una base para E, $(\mathbf{c}_i \mid 0 < i \leq n)$, tal que $(\mathbf{c}_i \mid 0 < i \leq k)$ sea base para M y $(\mathbf{c}_i \mid k < i \leq n)$ base para N. Si tomamos la base dual $(\varphi_i \mid 0 < i \leq n)$ entonces definimos la función

$$\begin{aligned} G : E &\longrightarrow \ \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \sum_{i=k+1}^{n} \varphi_i(x)\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Si luego denominamos P al subespacio de F, Im $Df(0)$, entonces por el *primer teorema de isomorfismos*

$$(\mathbf{d}_i \mid \mathbf{d}_i := Df(0)\ \mathbf{c}_{k+i} \text{ y } 0 < i \leq k) \qquad \text{forma una base para } P.$$

Extendemos la base de P para formar una de F y tomar la base dual $(\psi_i \mid 0 < i \leq m)$. Con esto definimos la función

$$\begin{aligned} H : F &\longrightarrow \ \mathbb{R}^m \\ y &\longmapsto \sum_{i=1}^{k} \psi_i(y)\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Efectivamente, sobre f no es posible aplicar el teorema A.19, pero si es posible aplicarlo a la siguiente función:

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \quad &\longmapsto H(f(x)) + G(x) \end{aligned}$$

Claro que esta elección está influenciada por la regla de la cadena A.1 que dice que para cualquier $0 < i \leq n$ se tiene que

$$Dg(0)\ \mathbf{c}_i = H\,(Df(0)\ \mathbf{c}_i) + G\ \mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i.$$

Por lo que, $Dg(0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo. Luego, del teorema de la función inversa A.19, existe una vecindad $U_0 \subseteq \Omega$ de 0 tal que $g(U_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una vecindad de 0 y $g|_{U_0}$ tiene inversa de clase $C^\ell(g(U_0); U_0)$.

Por otro lado, dado que Df es de rango constante entonces para todo $x \in U_0$ se tiene que $\dim(\text{Im } Df(x)) = k$. Y lo último implica que $H|_{Df(x)\ (N)}$ es un isomorfismo de $Df(x)\ (N)$ a $\langle(\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq k)\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ para todo $x \in U_0$.

Empecemos por tomar $x \in U_0$ arbitrario y recordar que $Dg(x)$ es un homeomorfismo lineal de E a $\mathbb{R}^n$; y por tanto, los siguientes vectores son l.i. en $\langle(\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq k)\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ (recordar que $H \in \mathscr{L}(E; \langle(\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq k)\rangle)$)

$$\left(H(Df(x)\ \mathbf{c}_i) \,\middle|\, Dg(x)\ \mathbf{c}_i = H(Df(x)\ \mathbf{c}_i) \text{ y } 0 < i \leq k \right)$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\dim\, Df(x)\ (N)\ &\geq \dim\, H\left(Df(x)\ (N)\right),\\ &\geq \dim\, \langle (H(Df(x)\ \mathbf{c}_i) \mid 0 < i \leq k)\rangle,\\ &= k.\end{aligned}$$

Como también es cierto que $\dim\, Df(x)\ (N) \leq \dim\, N = k$ entonces $\dim\, Df(x)\ (N) = k$. Concluyendo que $Df(x)\ (N) = \mathrm{Im}\ Df(x)$. Por lo que, $H|_{\mathrm{Im}\ Df(x)} = H|_{Df(x)\ (N)}$ es un isomorfismo de $Df(x)\ (N)$ hacia $\langle(\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq k)\rangle$. A esta aplicación inversa de la anterior presentada la llamamos L_x, en cambio $\tilde{L}_x \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; Df(x)\ (N))$ y cumple

$$Df(x)\ h = L_x \circ H \circ Df(x)\ h. \qquad (\forall\ h \in N)$$

Veamos los últimos tres procedimiento que terminan por demostrar el teorema del rango:

- Como $g(U_0)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$ y $0 \in g(U_0)$ existe $r > 0$ tal que $\sqsubseteq_n (r)$ está contenido dentro de $g(U_0)$. Sea $U := g^{-1}\left(\sqsubseteq_n (r)\right)$, tenemos que esta es una vecindad de 0 contenida en Ω homeomorfa a $\sqsubseteq (1)$ con el siguiente homeomorfismo

  $$\begin{aligned}\varphi : U &\longrightarrow \sqsubseteq_n (1)\\ x\ &\longmapsto \frac{1}{r}\cdot g(x)\end{aligned}$$

  No es difícil comprobar que φ y U cumplen con el *literal (i)*.
- Nos interesa estudiar más sobre $f \circ \varphi^{-1}$, de hecho queremos que, ignoré la información de las últimas $(n - k)$ coordenadas. Esto es comprobar que

  $$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = f \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) \qquad (\forall\ x \in \sqsubseteq_n (1))$$

  Para esto definamos $\tilde{f} : \sqsubseteq_k (1)\times \sqsubseteq_{n-k} (1) \to F$ tal que para todo (y, z) en $\mathrm{dom}\left(\tilde{f}\right)$ se tiene que $\tilde{f}(y, z) = f \circ \varphi^{-1}(y^1, \ldots, y^k, z^1, \ldots, z^{n-k})$. Y verifiquemos que para cualquier $y \in \sqsubseteq_k (1)$, $z \mapsto \tilde{f}(y, z)$ es constante. Pero es equivalente a ver que ver que $D_2\tilde{f}(y, z) = 0$ para cualquier $(y, z) \in \sqsubseteq_k (1)\times \sqsubseteq_{n-k} (1)$; esto último pues $\sqsubseteq_{n-k} (1)$ es conexo.

  Empecemos por ver que si $\pi_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$ y $\pi_{n-k} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^{n-k})$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n-k}$ entonces

  $$\begin{aligned}\varphi : U &\longrightarrow \sqsubseteq_k (1)\times \sqsubseteq_{n-k} (1)\\ x\ &\longmapsto \left(\frac{1}{r}\pi_k \circ H(f(x)), \frac{1}{r}\pi_{n-k} \circ G(x)\right)\end{aligned}$$

  Con esto, es claro que $f|_U \equiv \tilde{f}\circ\varphi$ y por el teorema A.8 sobre derivadas parciales para cualquier $x \in U$ y cualquier $h \in E$ tenemos que

  $$\begin{aligned}r \cdot Df(x)\ h\ &= D_1\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\tilde{H}(f(x)), \frac{1}{r}\tilde{G}(x)\right)\ \tilde{H}(Df(x)\ h)\\ &\qquad +\ D_2\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\tilde{H}(f(x)), \frac{1}{r}\tilde{G}(x)\right)\ \tilde{G}(h).\\ &\qquad\qquad \text{con } \tilde{H} = \pi_k \circ H \text{ y } \tilde{G} = \pi_{n-k} \circ G\end{aligned}$$

Recordemos que φ es una biyección, y por tanto, basta con ver que para cualquier $x \in U$ es cierto que

$$D_2\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\tilde{H}(f(x)), \frac{1}{r}\tilde{G}(x)\right) \equiv 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^{n-k};\mathbb{R}^n)}$$

Aún todavía, $\tilde{G}\Big|_M \in \mathscr{L}(M;\mathbb{R}^{n-k})$ es un isomorfismo. Por tanto, es suficiente con ver que

$$D_2\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\tilde{H}(f(x)), \frac{1}{r}\tilde{G}(x)\right)\ \tilde{G}(h) = 0. \qquad (\forall\ h \in M)$$

Si definimos $S_x \equiv r \cdot \tilde{L}_x - D_1\tilde{f}\left(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)\right)$ entonces para todo $h \in E$ se tiene que

$$S_x\ \tilde{H}(Df(x)\ h)\ = D_2\tilde{f}\left(\frac{1}{r}\tilde{H}(f(x)), \frac{1}{r}\tilde{G}(x)\right)\ \tilde{G}(h).$$

Y si $h \in N$ entonces $S_x\ \tilde{H}(Df(x)\ h) = 0$. Dado que $\tilde{H} \circ Df(x)\Big|_N$ es un isomorfismo de N a $\mathbb{R}^k$ por lo que $S_x \equiv 0$. Así,

$$D_2\tilde{f}\left(\frac{1}{r}H(f(x)), \frac{1}{r}G(x)\right)\ G(h) = 0 \qquad (\forall\ h \in M)$$

- Tomemos Q el suplemento de P en F. La dimensión de este suplemento es $m-k$ y por tanto existe $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{m-k};Q)$ homeomorfismo lineal respecto a $(\mathbf{d}_i \mid k < i \leq m)$. Definamos la siguiente función

$$\begin{aligned} \psi :\ \sqsubseteq_m (1) &\longrightarrow\ F \\ z\quad &\longmapsto f \circ \varphi^{-1}(z^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0) + T(z^{k+1}, \ldots, z^m) \end{aligned}$$

Claramente, $\psi \in C^\ell(\sqsubseteq_m (1);F)$ y para cualquier $z \in \mathbb{R}^m$ si definimos $z^* = (z^1, \ldots, z^k, 0, \ldots, 0)$:

$$\begin{aligned} H(\psi(z)) = H(f(\varphi^{-1}(z^*))) \\ & H(f(\varphi^{-1}(z^*))) + G(\varphi^{-1}(z^*)) &= g(\varphi^{-1}(z^*)), \\ \Longrightarrow & &= g(r \cdot g^{-1}(z^*)), \\ & &= r \cdot g(g^{-1}(z^*)) = r \cdot z^*, \\ \Longrightarrow\ & r \cdot z^* = H(\psi(z)) + G\left(g^{-1}\left(\frac{1}{r}z^*\right)\right). \end{aligned}$$

También ver que $\frac{1}{r}z^* \in \langle(\mathbf{e}_i \mid 0 < i \leq k)\rangle$ y por tanto, $g^{-1}\left(\frac{1}{r}z^*\right) \in M$. Luego, $G\left(g^{-1}\left(\frac{1}{r}z^*\right)\right) = 0$. Así, $r \cdot z^* = H(\psi(z))$.
Así, si $z', z \in \sqsubseteq_m (1)$ es tal que $\psi(z') = \psi(z)$ entonces tenemos que $H(\psi(z')) = H(\psi(z))$ y por tanto, $(z^*)' = z^*$. Luego, se concluye que $T((z^*)^{k+1}, \ldots, (z^*)^m) = T(z^{k+1}, \ldots, z^m)$ y $z = z^*$.
Por otro lado, para cualquier $z \in \sqsubseteq_m (1)$ se tiene que porque

$$S_x \equiv 0$$

$$
\begin{aligned}
D\psi(z)\ h &= D_1\tilde{f}\left((z^1,\ldots,z^k),0\right)\ (h^1,\ldots,h^k)+T(h^k,\ldots,h^{m-k}),\\
&= r\cdot\tilde{L}_x\ (h^1,\ldots,h^k)+T(h^k,\ldots,h^{m-k}),
\end{aligned}
$$

Y $D\psi(z)$ es un isomorfismo. Con esto nuevamente alrededor de cualquier $z \in \sqsubseteq_m (1)$ por el teorema A.19 existe una vecindad Z_z de 0 en $\sqsubseteq_m (1)$ tal que $\psi(Z_z)$ es abierto en F y $\psi|_{Z_z}$ tiene inversa de clase $C^\ell(\psi(Z_z);\mathbb{R}^m)$. Así, por el *lema del pegado A.16* se tiene que si $V=\psi(\sqsubseteq_m (1))$ entonces $\psi : \sqsubseteq_m (1)\to V$ tiene inversa de clase $C^\ell(V;\sqsubseteq_m (1))$.

Veamos que para todo $x\in U$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\psi\circ f_0\circ\varphi(x) = &\ \psi\left(\frac{1}{r}\left(f_0\left(\tilde{G}(f(x)),\tilde{H}(x)\right)\right)\right),\\
= &\ f\circ\varphi^{-1}\left(\frac{1}{r}\left(f_0\left(\tilde{G}(f(x)),0\right)\right)\right)+T(0,\ldots,0),\\
= &\ f\circ\varphi^{-1}\left(\frac{1}{r}g(x)\right)+0=f(x).
\end{aligned}
$$

□

Breve recuento de teoría de categorías section 1.1

Apéndice B. Ejercicios resueltos categorías y haces

Solución (ejercicio 1.7)**.** Digamos estamos en la categoría $\mathcal{C}$ y tomamos un isomorfismo cualquiera $f : A \to B$. Entonces existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. Si tomamos arbitrarios $h, \ell : C \to A$ tales que $f \circ \ell = f \circ h$. Entonces los axiomas sobre los morfismos **C1** y **C2** nos permiten escribir $\ell = 1_A \circ \ell = g \circ (f \circ \ell) = g \circ (f \circ h) = 1_A \circ h = h$. Esto último muestra que f es un monomorfismo. Si en cambio, tomamos arbitrarios $h, \ell : B \to C$ tales que $\ell \circ f = f \circ h$. Entonces nuevamente escribimos $\ell = \ell \circ 1_B = (\ell \circ f) \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ 1_B = h$. Por tanto, f también es epimorfismo.

Para ver que ser epimorfismo y monomorfismo no es suficiente para ser isomorfismo, recordemos a la categoría **Top** donde los objetos son espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos. Tomemos $(X, \tau), (X, \mu) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top})$ donde τ *es una topología más fina que* μ y la función $f : (X, \tau) \to (X, \mu)$ tal que $f(y) = y$ para todo $y \in X$.

Ver que f no es isomorfismo pues si lo fuera existe un $g : (X, \mu) \to (X, \tau)$ tal que $g \circ f = 1_{(X,\mu)}$ y $g \circ f = 1_{(X,\mu)}$. Esto implica que para todo $y \in X$ se tiene que $g(y) = g(f(y)) = y$. Sin embargo, un morfismo así no existe pues dicha función de (X, μ) a (X, τ) no es continua. Por otro lado, ver que f si es monomorfismo dado que para cualquier $g, h : (Y, \alpha) \to (X, \tau)$ se tiene que

$$f \circ g = f \circ h \quad \Longrightarrow \quad (\forall y \in Y)\ g(y) = f(g(y)) = f(h(y)) = h(y)$$

Y f si es epimorfismo dado que para cualquier $g, h : (X, \mu) \to (Y, \alpha)$ se tiene que

$$g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad (\forall y \in Y)\ g(y) = g(f(y)) = h(f(y)) = h(y)$$

Solución (ejercicio 1.8). Si $G := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, *)$ es tal que todo sus elementos son isomorfismos entonces de la propiedad **C1** tenemos que la composición(que es una operación binaria en G) es asociativa. Por la propiedad **C2** tenemos la existencia de un elemento neutro. Y por último, todo elemento tiene inversa por la definición de isomorfismo. Así, G con la composición es efectivamente un grupo.

Solución (ejercicio 1.10). Recordemos que

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) &\to \mathbf{Sets} \\ B &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \end{aligned}$$

Dados $B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, como $T_{B,C}(f) = f_*$ es una función de $T(B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ a $T(C) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ y los morfismos de **Sets** son funciones entonces podemos decir que $T_{B,C} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(T(B), T(C))$. Para cualquier $f : B \to C$ y $g : C \to D$ se tiene que

$$(\ \forall \ell \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\ ) \qquad \begin{aligned} (g \circ f)_*(\ell) = (g \circ f) \circ \ell &= g \circ (f \circ \ell), \\ &= g_*(f_*(\ell)), \\ &= (g_* \circ f_*)(\ell). \end{aligned}$$

Por tanto, $T_{B,D}(g \circ f) = T_{C,D}(g) \circ T_{B,C}(f)$. También se tiene para $1_B \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B)$ lo siguiente:

- Para todo $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, T(B))$ se tiene

  $$[(1_B)_* \circ f]\,(\ell) = (1_B)_*(f(\ell)) = 1_B \circ f(\ell) = f(\ell). \quad (\ \forall \ell \in D\ )$$

  Esto significa que $T_{B,B}(1_B) \circ f = f$.
- Para todo $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(B), D)$ se tiene

  $$[f \circ (1_B)_*]\,(\ell) = f(1_B \circ \ell) = f(\ell). \quad (\ \forall \ell \in B\ )$$

  Esto significa que $f \circ T_{B,B}(1_B) = f$.

Así, por unicidad de la identidad en la categoría tenemos $T_{B,B}(1_B) = 1_{T(B)}$. Esto junto con la compatibilidad de T con la composición nos dice que T *es un functor covariante.*

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) &\to \mathbf{Sets} \\ B &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \end{aligned}$$

Dados $B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, como $S_{B,C}(f) = f^*$ es una función de $S(C) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ a $S(B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ y por ello $S_{B,C} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(S(C), S(B))$. Además, para cualquier $f : B \to C$ y $g : C \to D$ se tiene que

$$(\forall \ell \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D, A)) \qquad \begin{aligned} (g \circ f)^*(\ell) = \ell \circ (g \circ f) &= (\ell \circ g) \circ f, \\ &= f^*(g^*(\ell)), \\ &= (f^* \circ g^*)(\ell). \end{aligned}$$

Por tanto, $S_{B,D}(g \circ f) = S_{C,B}(f) \circ S_{C,D}(g)$. En un desarrollo similar al de T se puede ver que $S_{B,B}(1_B) = 1_{S(B)}$; por lo tanto, S *es un functor contravariante.*

Solución (ejercicio 1.11)**.** En la categoría del preorden un functor covariante es lo mismo que una función creciente, en el sentido que a cada functor covariante y una única función creciente y a cada función creciente le corresponde un único functor covariante.

Digamos $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es un functor covariante entonces se tiene $T : X \to Y$ una función y para cada $a, b \in X$ existe una función $T_{a,b} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(T(a), T(b))$. Dado que si $a, b \in X$ son tales que $a \leq b$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(a, b) \neq \emptyset$; podemos decir que como $T_{a,b}$ existe entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(T(a), T(b)) \neq \emptyset$. Esto implica que $T(a) \leq T(b)$. Por tanto, $T : X \to Y$ es una función creciente. Que para cada functor covariante $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tomemos la función entre la clase de objetos de cada categoría implica que a cada functor covariante le corresponde uno y solo una función; que como vimos es creciente.

Recíprocamente, tomemos T una función creciente de X a Y. Luego, dado $a, b \in X$ si $a \not\leq b$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(a, b) = \emptyset$ y la única función $T_{a,b} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(\tilde{T}(a), \tilde{T}(b))$ posible es $\emptyset$. En cambio, si $a \leq b$ entonces $T_{a,b} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Y}}(\tilde{T}(a), \tilde{T}(b))$ es una función pero el dominio y codominio solo tiene un elemento por eso solo existe una función posible. Esta es $T_{a,b}((a, b)) := (\tilde{T}(a), \tilde{T}(b))$. Notar que sean $a, b, c \in X$ entonces si ningún conjunto de morfismos es el vacío entonces

$$T_{a,c}((a, b) \circ (b, c)) = (\tilde{T}(a), \tilde{T}(c)) = (\tilde{T}(a), \tilde{T}(b)) \circ (\tilde{T}(b), \tilde{T}(c)) = T_{a,b}(a, b) \circ T_{b,c}(b, c).$$

Además, $T_{a,a}(1_a) = T_{a,a}(a, a) = (\tilde{T}(a), \tilde{T}(a)) = 1_{T(a)}$. Por tanto, T es un functor covariante a partir de la función T.

Es claro que si tomamos una función T creciente entonces obtenemos un functor T de la forma ya explicada. Más aún, podemos extraer otra función creciente de este functor con el procedimiento inicial y esta función resulta ser T. De manera análoga, si tomamos un functor T podemos encontrar una función T creciente y luego construir otro functor a partir de este; estos dos functores son iguales pues para la función T solo hay un functor posible.

Solución (ejercicio 1.17)**.** Al ordenar I tal que $i \leq j$ ssi $M_i \subseteq M_j$ obtenemos un orden parcial. Más aún, de la condición que para cualesquiera i, j existe un $k \in I$ tal que $M_i + M_j \subseteq M_k$ tenemos que I es un conjunto dirigido. Por tanto, tenemos la categoría del preorden I del ejemplo 1.3. Y podemos definir un sistema directo en $\mathbf{Mod}_R$ (funtor) $(M_i, f_{ij}) : I \to \mathbf{Mod}_R$ tal que

$$\begin{array}{llll} (M_i, f_{ij}) : \mathrm{Obj}(I) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{Mod}_R) & & (\forall\, k, \ell \in I) & \text{si } k \leq \ell \\ \qquad\qquad k \quad \mapsto M_k & & & (M_i, f_{ij})\ (k, \ell) := M_k \hookrightarrow M_\ell \end{array}$$

Dado que para todo $i \in I$ se tiene que $M_i \subseteq \sum_I M_k := \sum_{k \in I} M_k$ entonces el candidato a límite directo para el sistema directo (M_i, f_{ij}) será $(M_i \hookrightarrow \sum_I M_k, \sum_I M_k)_{k \in I}$. De hecho, se tiene que para todo $i \leq j$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[dd, hook] \arrow[dr, hook] & \\
& \sum_I M_k \\
M_j \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Por tanto, lo único que resta para probar que es en efecto el límite directo es comprobar la propiedad universal. Para ello, tomemos $A \in \mathbf{Mod}_R$ y una familia de morfimos $g_i : M_i \to A$ tales que para todo $i \leq j$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[dd, hook] \arrow[dr, "g_i"] & \\
& A \\
M_j \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Podemos definir un morfismo natural $g : \sum_I M_k \to A$, tal que $g(m) := g_k(m)$ para todo $m \in M_k$ si $m \in M_k$. Vamos a probar ahora que g es en efecto un morfismo y luego presentaremos las características que tiene este morfimo.

Pues bien, hay que estar seguros de que g sea una función bien definida, esto es: g es una función y $\mathrm{dom}\,(g) = \sum_I M_k$. Para lo primero basta ver que si $m \in M_k$ y $m \in M_\ell$ entonces existe un $j \in I$ tal que $m \in M_k \cap M_\ell \subseteq M_k + M_\ell \subseteq M_j$ y por tanto, se tienen los dos diagrama conmuta respectivos para (k, j), (ℓ, j) con A. Luego,

$$g_k(m) = g_j \circ (\hookrightarrow_{k,j})\ (m) = g_j(m) = g_j \circ (\hookrightarrow_{\ell,j})\ (m) = g_\ell(m).$$

Para ver que $\mathrm{dom}\,(g) = \sum_I M_k$, tomamos un $m \in \sum_I M_k$ y por definición de suma de módulos entonces $m = \sum_{k \in J} \alpha^k m_k$ con $m_k \in M_k$, $\alpha^k \in R$ y $J \subseteq I$ finito. Esto implica que $m \in \sum_J M_k$ y por medio de inducción se puede probar que existe un $j \in I$ tal que $m \in M_j$. Luego, $m \in \mathrm{dom}\,(g)$.

Por último, g cumple lo siguiente: Para cualquier $m, n \in \sum_I M_k$ y $\alpha \in R$ se tiene por inducción que existe un $i, j \in I$ tales que $m \in M_i$ y $\alpha n \in M_j$. entonces $m, \alpha n, m + \alpha n \in M_i + M_j$ y hay un $\ell \in I$ tal que $M_i + M_j \subseteq M_\ell$. Luego, como $n \in M_\ell$ por ser módulo entonces

$$g(m + \alpha n) = g_\ell(m + \alpha n) = g_\ell(m) + \alpha g_\ell(n) = g(m) + \alpha g(n).$$

Que implica, $g \in \hom_{\mathbf{Mod}_R}(\sum_I M_k, A)$.

Este morfismo en particular hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[dr, hook] \arrow[dd, hook] \arrow[drr, bend left, "g_i"] & & \\
& \sum_I M_k \arrow[r, dashed, "g"] & A \\
M_j \arrow[ur, hook] \arrow[urr, bend right, "g_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dicha comprobación es sencilla. Que g es el único morfismo que hace esto se concluye del hecho que si $h : \sum_I M_k \to A$ es un morfismo que hace conmutar el mismo diagrama entonces para todo $i \in I$, $m \in M_i$ se tiene que $h \circ (\hookrightarrow_{i,\Sigma})(m) = g_i(m)$. De esto, $h(m) = g(m)$. Pero como para cualquier $n \in \sum_I M_k$ existe un $j \in I$ tal que $n \in M_j$ entonces $h \equiv g$.

Todas estas comprobaciones verifican que

$$\varinjlim_{i \in I}(M_i, f_{ij}) = \left(\sum_I M_k, M_i \hookrightarrow \sum_I M_k \right)$$

Como se propuso en el ejercicio todo R-módulo es límite directo. Esto es una consecuencia de que si M es un R-módulo entonces

$$M = \sum_{\substack{N \subseteq M \\ N \in \mathbf{Mod}_R}} N.$$

Solución (ejercicio 1.18)**.** Digamos que tenemos dos sistemas dirigidos (C_i, f_{ij}), (D_i, g_{ij}) y $(\eta_i) : (C_i, f_{ij}) \to (D_i, g_{ij})$ una transformación natural. Si asumimos (C, f_i), (D, g_i) son respectivamente límites directos entonces para todo $i \leq j$ se tiene que

$$\begin{tikzcd}
C_i \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[dd, "f_{ij}"'] & D_i \arrow[dd, "g_{ij}"] \arrow[dr, "g_i"] & \\
& & D \\
C_j \arrow[r, "\eta_j"'] & D_j \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $\tau_i := g_i \circ \eta_i$ para todo $i \in I$ entonces

$$\tau_i = g_i \circ \eta_i = (g_j \circ g_{ij}) \circ \eta_i = g_j \circ (g_{ij} \circ \eta_i) = g_j \circ (\eta_j \circ f_{ij}) = \tau_j \circ f_{ij}.$$

Y de la propiedad universal de (C, f_i) sobre (D, τ_i) tenemos que

$$\begin{tikzcd}
C_i \arrow[dd, "f_{ij}"'] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, bend left, "\tau_i"] & & \\
 & C \arrow[r, dashed, "\hat{\eta}"] & D \\
C_j \arrow[ur, "f_j"'] \arrow[urr, bend right, "\tau_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\hat{\eta} : C \to D$ es el único morfismo tal que $\hat{\eta} \circ f_i = \tau_i = g_i \circ \eta_i$ para todo $i \in I$.

Haces section 1.3

Solución (ejercicio 1.18)**.** Del ejercicio 1.38 tenemos que

$$\sim \text{ define una clase de equivalencia en } \bigsqcup_{U \in \mathcal{V}(x)} \mathcal{F}(U)$$

Denotamos $\mathcal{F}_x$ al conjunto cocientado. Y para trabajar con una categoría concreta digamos $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_K$. Así, lo primero por hacer es probar que $\mathcal{F}_x \in \mathbf{Alg}_K$. Luego, propondremos los morfismos adecuados para comprobar que

$$\varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_x.$$

Definamos las siguientes operaciones para todo $[U, s], [V, t] \in \mathcal{F}_x$ y $\beta \in K$:

- $[U, s] + [V, t] = [U \cap V, \operatorname{res}_{U, U \cap V}(s) + \operatorname{res}_{V, U \cap V}(t)]$,
- $[U, s] \cdot [V, t] = [U \cap V, \operatorname{res}_{U, U \cap V}(s) \cdot \operatorname{res}_{V, U \cap V}(t)]$,
- $\beta\ [U, s] = [U, \beta \operatorname{res}_{U,U}(s)]$.

Lo primero es ver que son funciones por ello, tomamos $[\tilde{U}, \tilde{s}] = [U, s]$ y $[\tilde{V}, \tilde{t}] = [V, t]$ para ver que

$$\begin{aligned}
[\tilde{U}, \tilde{s}] + [\tilde{V}, \tilde{t}] &= [U, s] + [V, t], \\
[\tilde{U}, \tilde{s}] \cdot [\tilde{V}, \tilde{t}] &= [U, s] \cdot [V, t], \\
\beta[\tilde{U}, \tilde{s}] &= \beta[U, s].
\end{aligned}$$

Por definición de la relación de equivalencia existen $W_s, W_t \in \mathcal{V}(x)$ tales que $W_s \subseteq U \cap \tilde{U}$, $W_t \subseteq V \cap \tilde{V}$ y

$$\operatorname{res}_{\tilde{U}, W_s}(\tilde{s}) = \operatorname{res}_{U, W_s}(s) \quad \text{y} \quad \operatorname{res}_{\tilde{V}, W_t}(\tilde{t}) = \operatorname{res}_{U, W_t}(t).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}[U,s]+[V,t] &= [U\cap V, \mathrm{res}_{U,U\cap V}(s)+\mathrm{res}_{V,U\cap V}(t)],\\ &= [W_s\cap W_t, \mathrm{res}_{U,W_s\cap W_t}(s)+\mathrm{res}_{V,W_s\cap W_t}(t)],\\ &= [\tilde U\cap\tilde V, \mathrm{res}_{U,\tilde U\cap\tilde V}(\tilde s)+\mathrm{res}_{V,\tilde U\cap\tilde V}(\tilde t)] = [\tilde U,\tilde s]+[\tilde V,\tilde t].\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}[U,s]\cdot[V,t] &= [U\cap V, \mathrm{res}_{U,U\cap V}(s)\cdot\mathrm{res}_{V,U\cap V}(t)],\\ &= [W_s\cap W_t, \mathrm{res}_{U,W_s\cap W_t}(s)\cdot\mathrm{res}_{V,W_s\cap W_t}(t)],\\ &= [\tilde U\cap\tilde V, \mathrm{res}_{U,\tilde U\cap\tilde V}(\tilde s)\cdot\mathrm{res}_{V,\tilde U\cap\tilde V}(\tilde t)] = [\tilde U,\tilde s]\cdot[\tilde V,\tilde t].\end{aligned}$$

Y por último,

$$\beta[U,s] = [U,\beta\ \mathrm{res}_{U,U}(s)] = [W_s,\beta\ \mathrm{res}_{U,W_s}(s)] = [W_s,\beta\ \mathrm{res}_{\tilde U,W_s}(\tilde s)] = \beta[\tilde U,\tilde s].$$

Cada $\mathcal{F}(U)\in\mathbf{Alg}_K$ y por tanto, se pueden comprobar todos los axiomas sobre las operaciones y decir que $\mathcal{F}_x\in\mathbf{Alg}_K$. Para cada $U\in\mathcal{V}(x)$ definimos el siguiente morfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}\rho_U : \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}_x\\ s &\longmapsto [U,s]\end{aligned}$$

Comprobar que es un morfismo no es difícil. Ahora, para ver que $(\mathcal{F}_x,\rho_U)$ es límite directo primero ver que para todo $V\subseteq U$ se tiene que $\rho_U=\rho_V\circ\mathrm{res}_{U,V}$. Y si (C,φ_U) es tal que para todo $V\subseteq U$ se tiene que $\varphi_U=\varphi_V\circ\mathrm{res}_{U,V}$ podemos definir $\varphi:\mathcal{F}_x\to C$ tal que $\varphi([U,s]):=\varphi_U(s)$ para todo $[U,s]\in\mathcal{F}_x$. Ahora debemos mostrar que φ es una función bien definida y que es un morfismo de álgebras. Para esto tomemos $[U,s]=[V,t]$ en $\mathcal{F}_x$ y ver que existe un $W\subseteq U\cap V$ tal que $\mathrm{res}_{U,W}(s)=\mathrm{res}_{V,W}(t)$

$$\begin{aligned}\varphi([U,s]) = \varphi_U(s) &= \varphi_W\circ\mathrm{res}_{U,W}(s),\\ &= \varphi_W\left(\mathrm{res}_{U,W}(s)\right),\\ &= \varphi_W\left(\mathrm{res}_{V,W}(t)\right) = \varphi_V(t) = \varphi([V,t]).\end{aligned}$$

Y para ver que es morfismo ver que para todo $[U,s],[V,t]\in\mathcal{F}_x$ y $\beta\in K$ se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi([U,s]+[V,t]) = \varphi_{U\cap V}(s+t) &= \varphi_{U\cap V}(s)+\varphi_{U\cap V}(t),\\ &= \varphi([U\cap V,s])+\varphi([U\cap V,t]),\\ &= \varphi([U,s])+\varphi([V,t]).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi([U,s]\cdot[V,t]) = \varphi_{U\cap V}(s\cdot t) &= \varphi_{U\cap V}(s)\cdot\varphi_{U\cap V}(t),\\ &= \varphi([U\cap V,s])\cdot\varphi([U\cap V,t]),\\ &= \varphi([U,s])\cdot\varphi([V,t]).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\beta[U,s]) = \varphi_U(\beta s) &= \beta\varphi_U(s),\\ &= \beta\varphi([U,s]).\end{aligned}$$

Por tanto, si, φ es un morfismo de $\mathcal{F}_x$ a C. También se puede comprobar que el siguiente diagrama conmuta para todo $V\subseteq U$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{U,V}"'] \arrow[dr, "\rho_U"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_U"] & & \\ & \mathcal{F}_x \arrow[r, dashed, "\varphi"] & C \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\rho_V"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_V"'] & & \end{tikzcd}$$

donde se ve que el morfismo $\mathcal{F}_x \mapsto C$ es único pues si $\gamma : \mathcal{F}_x \mapsto C$ entonces para cualquier $[U, s] \in \mathcal{F}_x$ se tiene que $s \in \mathcal{F}(U)$ y $\varphi([U, s]) = \varphi_U(s) = \gamma \circ \rho_U(s) = \gamma([U, s])$.

Solución (ejercicio 1.18)**.** Sea $x \in X$ y tres prehaces $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$. Tomamos $\varphi \in \hom_{\mathbf{PreSh}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ y $\gamma \in \hom_{\mathbf{PreSh}(X)}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ entonces tenemos que $\gamma \circ \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$. Esto es, para todo $U \in \mathbf{Op}^{op}(X)$ se tiene que $(\gamma \circ \varphi)_U = \gamma_U \circ \varphi_U$. Del ejercicio 1.18 encontramos un morfismo $(\gamma \circ \varphi)_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{H}_x$ tal que para cualquier $[U, s] \in \mathcal{F}_x$ se tiene que

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi)_x \ [U, s] &= [U, (\gamma \circ \varphi)_U(s)], \\ &= [U, \gamma_U(\varphi_U(s))], \\ &= \gamma_x \ [U, \varphi_U(s)], \\ &= \gamma_x \left(\varphi_x \ [U, s]\right) = \left(\gamma_x \circ \varphi_x\right) \ [U, s]. \end{aligned}$$

Por tanto, $(\gamma \circ \varphi)_x = \gamma_x \circ \varphi_x$.

Recordemos que $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ en $\hom_{\mathbf{PreSh}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ es la transformación natural definida para cada $U \in \mathbf{Op}^{op}(X)$ por $(1_{\mathcal{F}})_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ que es la identidad en $\mathcal{F}(U)$. Por otro lado, $1_{\mathcal{F}_x}$ ya está definida pues $\mathcal{F}_x$ es parte de la categoría $\mathcal{C}$. Con esto en mente, para todo $[U, s] \in \mathcal{F}_x$ se tiene que

$$(1_{\mathcal{F}})_x \ [U, s] = [U, 1_{\mathcal{F}}(s)] = [U, s] = 1_{\mathcal{F}_x} \ [U, s]$$

Y por tanto, $(1_{\mathcal{F}})_x = 1_{\mathcal{F}_x}$.

Con esto y la definición de funtor concluimos la proposición 1.40

Solución (Prehaz rascacielo ejercicio 1.43 y ejercicio 1.46)**.** Solo para recordar lo es es el prehaz rascacielo, sea A un conjunto no vacío, X un espacio topológico y $x \in X$ un punto. Para cada abierto $U \subseteq X$, definimos

$$i_{x,A}(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U, \\ \{*\} & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

donde $\{*\}$ es cualquier conjunto de un solo elemento. Y para cada inclusión, $V \subseteq U$ se tiene $\mathrm{res}_{U,V} : i_{x,A}(U) \to i_{x,A}(V)$ es la identidad en caso de que sea una función de A hacia A y la única que hay en caso de que sea de A hacia $\{*\}$. Notar que no existe ningún caso, en el que la función sea de $\{*\}$ hacia A.

Por otro lado, si se tiene $W \subseteq V \subseteq U$ entonces existen cuatro escenarios posibles:

- $x \notin W$, $x \notin V$ y $x \notin U$, entonces
$$\text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V}(*) = \text{res}_{V,W}(*) = * = \text{res}_{U,W}(*),$$
- $x \notin W$, $x \notin V$ y $x \in U$, entonces
$$\text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V}(a) = \text{res}_{V,W}(*) = * = \text{res}_{U,W}(*), \qquad (\forall a \in A)$$
- $x \notin W$, $x \in V$ y $x \in U$,entonces
$$\text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V}(a) = \text{res}_{V,W}(a) = * = \text{res}_{U,W}(a), \qquad (\forall a \in A)$$
- $x \in W$, $x \in V$ y $x \in U$
$$\text{res}_{V,W} \circ \text{res}_{U,V}(a) = \text{res}_{V,W}(a) = a = \text{res}_{U,W}(a), \qquad (\forall a \in A)$$

En cualquier caso, se cumple la comprobación de que $i_{x,A}$ es un prehaz. De manera más clara, $i_{x,A} : \mathbf{Op}^{op}(X) \to \mathbf{Sets}$. Y como vamos a comprobar ahora es un haz.

Ver que si tomamos un $U \in \mathbf{Op}^{op}(X)$, un cubrimiento abierto $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ cualquiera de U y $(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de secciones tales que $\text{res}_{U_\alpha, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) = \text{res}_{U_\beta, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$. Entonces hay dos casos, $x \in U$ o no. En el primer caso, $i_{x,A}(U) = A$ y como (U_α) es un cubrimiento entonces existe un $\alpha \in \Lambda$ para el que $x \in U_\alpha$ y claro, $s_\alpha \in A = i_{x,A}(U_\alpha)$. Si tomamos la sección $s = s_\alpha$ en $i_{x,A}(U)$ entonces para cualquier $\beta \in \Lambda$ si $x \in U_\beta$ entonces $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $s_\alpha = \text{res}_{U_\alpha, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) = \text{res}_{U_\beta, U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta) = s_\beta$; por lo que, $\text{res}_{U,U_\beta}(s) = s_\beta$. Si por el contraria $x \notin U_\beta$ entonces $s_\beta = *$ y $\text{res}_{U,U_\beta}(s) = *$. Entonces $i_{x,A}$ cumple el *axioma del pegado*. También cumple el *axioma de unicidad*, pues si t es otra sección en $i_{x,A}(U)$ tal que $\text{res}_{U,U_\beta}(t) = s_\beta$ para todo $\beta \in \Lambda$. En particular, $t = \text{res}_{U,U_\alpha}(t) = s_\alpha = s$.

Para terminar esta solución discutamos sobre los tallos del haz rascacielo. Tomemos $y \in X$ y ver que
$$(i_{x,A})_y = \left. \bigsqcup_{U\in\mathcal{V}(y)} i_{x,A}(U) \middle/ \sim \right.$$

Si $y \in \overline{\{x\}}$ entonces para todo $U \in \mathcal{V}(y)$ se tiene que $x \in U$ y para cualquier $U \in \mathcal{V}(y)$, $s \in i_{x,A}(U) = A$ se tiene

$$[U, s] = \{(V, t) \,|\, (\exists W \in \mathcal{V}(y)) \; W \subseteq U \cap V \text{ y } \mathrm{res}_{V,W}(t) = \mathrm{res}_{U,W}(s)\}$$

pero $t = \mathrm{res}_{V,W}(t) = \mathrm{res}_{U,W}(s) = s$ porque $i_{x,A}(W) = i_{x,A}(U) = i_{x,A}(V)$. Luego,

$$[U, s] = \{(V, t) \,|\, s = t\}$$

Con esto podemos definir la siguiente función $\varphi : (i_{x,A})_y \to A$ tal que $\varphi\ [U, s] = s$ y está bien definida. Más aún sea $s \in A$ entonces $s \in i_{x,A}(U)$ para cualquier $U \in \mathcal{V}(y)$ y por tanto, $\varphi\ [U, s] = s$. Esto es φ es sobreyectiva. Y para ver que es inyectiva, en cambio, si $\varphi\ [U, s] = \varphi\ [V, t]$ entonces $s = t$. Y por lo anterior, $[U, s] = [V, t]$. Entonces $(i_{x,A})_y \cong A$ en **Sets** concluyendo que A es el tallo por el ejercicio 1.16.

Por otro lado, si $y \notin \overline{\{x\}}$ entonces existe un $U \in \mathcal{V}(y)$ tal que $x \notin U$. Y entonces para cualquier $(V, s), (W, t)$ en la unión disjunta se tiene que $(V, s) \sim (W, t)$. Por tanto,

$$(i_{x,A})_y = \left\{ \bigsqcup_{U \in V(y)} i_{x,A}(U) \right\} \cong \{*\}$$