<u>Lección n°3</u>: Teorema de Ladyzhenskaya Escuela Politécnica Nacional 2023

1. Introducción

En esta última lección vamos a poder ver en acción a los objetos presentados en las dos lecciones anteriores. En efecto, al momento de considerar una solución de la ecuación del calor $\partial_t u = \Delta u + f$ en donde f es una función que pertenece a cierto espacio de Morrey parabólico, podremos deducir que la solución u pertenece a un espacio de Hölder parabólico, en donde el índice de regularidad hölderiana dependerá, evidentemente, de la información Morrey disponible sobre la fuerza exterior f. Este resultado, que constituye la conclusión más importante de estas lecciones, se lo conoce como el Teorema de Ladyzhenskaya[1].

2. Estimaciones generales sobre el núcleo del calor

Dado $t > 0$, el *núcleo de calor* usual es la función $\mathfrak{g}_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que se define por

$$\mathfrak{g}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

El núcleo del calor es también conocido como la *solución fundamental* de la ecuación del calor, pues verifica

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v}(t,x) - \Delta \vec{v}(t,x) = 0, \\ \\ \vec{v}(0,x) = \delta_0(x), \end{cases}$$

donde, δ_0 es la delta de Dirac.

Definimos la función $\mathfrak{g}_+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\mathfrak{g}_+(t,x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\mathfrak{g}_t(x). \tag{1}$$

Vamos a enunciar y demostrar algunas estimaciones para la función $\mathfrak{g}_+$ que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 1. *Para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, tenemos*

1) $|\mathfrak{g}_+(t,x)| \leq \dfrac{C}{(|t|^{\frac{1}{2}} + |x|)^3}$,

2) $|\partial_t \mathfrak{g}_+(t,x)| \leq \dfrac{C}{(|t|^{\frac{1}{2}} + |x|)^5}$,

3) $|\vec{\nabla} \mathfrak{g}_+(t,x)| \leq \dfrac{C}{(|t|^{\frac{1}{2}} + |x|)^4}$,

donde $C > 0$ es una constante.

Observación 2.1. *Notemos que $|t|^{\frac{1}{2}} + |x|$ es la forma explicita de la distancia parabólica d presentada en la Lección 1 (Introducción a los Espacios Parabólicos).*

Demostración. Antes de proceder con la demostración del Lema 1, primero enunciemos y probemos una desigualdad que nos será de utilidad. Para todo $z > 0$ y para todo $y > 0$, se verifica que

$$e^z > \left(1 + \frac{z}{y}\right)^y. \tag{2}$$

[1]Olga Aleksándrovna Ladýzhenskaya (1922-2004), matemática rusa.

En efecto, si no fuera así, existirían $z>0$ y $y>0$ tales que $0<e^z\leq\left(1+\frac{z}{y}\right)^y$ luego, de la monotonía de la función logaritmo natural y dado que esta es la función inversa de la función exponencial en $(0,+\infty)$, tenemos $z\leq\ln\left(1+\frac{z}{y}\right)^y=y\ln\left(1+\frac{z}{y}\right)$ o lo que es lo mismo $\frac{z}{y}\leq\ln\left(1+\frac{z}{y}\right)$. Utilizando un argumento análogo al anterior, de la monotonía de la función exponencial y la identidad anterior, se sigue que $e^{\frac{z}{y}}\leq 1+\frac{z}{y}$ lo cual es una contradicción, pues $\frac{z}{y}>0$ y de la expansión en series de Taylor alrededor de 0 de la función exponencial tenemos que $e^{\frac{z}{y}}=1+\frac{z}{y}+\frac{\frac{z}{y}}{2!}+\cdots>1+\frac{z}{y}$.

Ahora comenzamos con la demostración del lema:

1) Sean $(t,x)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ cualesquiera, vamos a demostrar que se tiene $|\mathfrak{g}_+(t,x)|\leq\dfrac{C}{(|t|^{\frac{1}{2}}+|x|)^3}$. Por definición de la función $\mathfrak{g}_+$ tenemos $|\mathfrak{g}_+(t,x)|=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Si $x=0$, el resultado se sigue directamente de la definición de $\mathfrak{g}_+$. Ahora, si $x\neq 0$, se sigue que $|x|>0$, luego como $t>0$, entonces $\frac{|x|^2}{4t}>0$ y por tanto $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}<1$; así, podemos escribir que:

$$|\mathfrak{g}_+(t,x)|=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\leq\frac{C}{t^{\frac{3}{2}}},\tag{3}$$

donde $C=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}$. Por otro lado, tomando $z=\frac{|x|^2}{4t}>0$ y $y=\frac{3}{2}>0$ en la expresión (2) tenemos que

$$e^{\frac{|x|^2}{4t}}>\left(1+\frac{2}{3}\frac{|x|^2}{4t}\right)^{\frac{3}{2}}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{|x|^2}{4t}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ahora, puesto que $\frac{3}{2}+\frac{|x|^2}{4t}>\frac{|x|^2}{4t}$, tomando la potencia $\frac{3}{2}$ a ambos lados, se sigue que $\left(\frac{3}{2}+\frac{|x|^2}{4t}\right)^{\frac{3}{2}}>\left(\frac{|x|^2}{4t}\right)^{\frac{3}{2}}$; por lo tanto $e^{\frac{|x|^2}{4t}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{|x|^2}{4t}\right)^{\frac{3}{2}}$ lo que a su vez implica que $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4t}{|x|^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Así, de la definición de $\mathfrak{g}_+$ y de la última expresión concluimos que $|\mathfrak{g}_+(t,x)|<\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(4t)^{\frac{3}{2}}}{|x|^3}<\frac{C}{|x|^3}$ con $C=\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$. Entonces, de lo obtenido en la expresión anterior y la desigualdad (3), se sigue que

$$|\mathfrak{g}_+(t,x)|\leq C\,\text{mín}\left\{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{|x|^3}\right\},\tag{4}$$

donde C es una constante positiva. Finalmente, notemos que si $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{|x|^3}$, entonces tomando la potencia $\frac{1}{3}$ a ambos lados, $|x|\leq t^{\frac{1}{2}}$ y por lo tanto $|x|+t^{\frac{1}{2}}\leq 2t^{\frac{1}{2}}$. Así, como $|x|+t^{\frac{1}{2}}>0$ elevando ambos lados de la desigualdad a la potencia -3, tenemos $t^{-\frac{3}{2}}\leq\frac{1}{8\left(|x|+t^{\frac{1}{2}}\right)^3}$. De manera similar, si $\frac{1}{|x|^3}\leq\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$, entonces $|x|+t^{\frac{1}{2}}\leq 2|x|$, lo que implica $|x|^{-3}\leq\frac{1}{8\left(|x|+t^{\frac{1}{2}}\right)^3}$. Así, por definición de mínimo, se sigue que $\text{mín}\left\{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{|x|^3}\right\}\leq\frac{C}{\left(|x|+t^{\frac{1}{2}}\right)^3}$ lo que junto con la desigualdad (4) nos permite concluir el resultado.

2) Para $(t,x)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, derivando respecto al tiempo la función $\mathfrak{g}_+$, tenemos la expresión

$$\partial_t\mathfrak{g}_+(t,x)=\frac{|x|^2}{4(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}-\frac{3}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

de donde, por la desigualdad triangular, obtenemos que

$$|\partial_t\mathfrak{g}_+(t,x)|\leq\frac{|x|^2}{4(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}+\frac{3}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.\tag{5}$$

Si $x=0$, de la desigualdad anterior, tenemos $|\partial_t\mathfrak{g}_+(t,x)|\leq\frac{3}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}}\leq\frac{C}{\left(|x|+t^{\frac{1}{2}}\right)^5}$ con $C=\frac{3}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}}>0$.

Si $x\neq 0$, $\frac{|x|^2}{4t}>0$, entonces tenemos las desigualdades $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}<\frac{4t}{|x|^2}$ y $e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\leq 1$. Utilizando estas estimaciones en el primer y segundo término del lado derecho de la expresión (5) respectivamente, obtenemos

$$|\partial_t \mathfrak{g}_+(t,x)| < \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{|x|^2}{4\,t^{\frac{7}{2}}}\frac{4t}{|x|^2} + \frac{3}{2\,t^{\frac{5}{2}}}\right) < \frac{C}{t^{\frac{5}{2}}}, \tag{6}$$

con $C = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{3}{2}\right) > 0$. De la expresión (2), realizando un proceso similar al hecho para el literal 1, obtenemos las siguientes desigualdades $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} < \left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\left(\frac{4t}{|x|^2}\right)^{\frac{7}{2}}$ y $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} < \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4t}{|x|^2}\right)^{\frac{5}{2}}$. Utilizando estas desigualdades en la expresión (5), obtenemos

$$|\partial_t \mathfrak{g}_+(t,x)| < \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{|x|^2}{4\,t^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{28}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\frac{t^{\frac{7}{2}}}{|x|^7} + \frac{3}{2\,t^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{20}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{|x|^5}\right) < \frac{C}{|x|^5}, \tag{7}$$

donde $C = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{14^{\frac{7}{2}}}{4} + \frac{3}{2}10^{\frac{5}{2}}\right) > 0$. Por lo tanto, de las expresiones (6) , (7) y realizando un análisis análogo al hecho al final de la demostración del primer literal, concluimos que

$$|\partial_t \mathfrak{g}_+(t,x)| \leq C \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}},\ \frac{1}{|x|^5}\right\} \leq \frac{C}{\left(|x| + t^{\frac{1}{2}}\right)^5},$$

lo cual es la segunda desigualdad del Lema 1.

3) Para todo $(t,x) \in \,]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, tenemos $\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(t,x) = -\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}}(x_1,\, x_2,\, x_3)^T$ entonces

$$|\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(t,x)| = \frac{|x|}{2(4\pi)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \tag{8}$$

Procederemos de forma similar a los literales anteriores. Si $x = 0$, el resultado se sigue inmediatamente de la identidad anterior. Si $x \neq 0$, entonces $\frac{|x|^2}{4t} > 0$. Nuevamente, de la expresión (2), obtenemos las desigualdades: $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4t}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ y $e^{-\frac{|x|^2}{4t}} < \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4t}{|x|^2}\right)^{\frac{5}{2}}$. Utilizando las desigualdades anteriores en la identidad (8), tenemos respectivamente $|\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(t,x)| \leq C\frac{|x|}{t^{\frac{5}{2}}}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{|x|} \leq \frac{C}{t^2}$ y $|\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(t,x)| \leq C\frac{|x|}{t^{\frac{5}{2}}}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{|x|^5} \leq \frac{C}{|x|^4}$ con C una constante. Por lo tanto, de las estimaciones anteriores, concluimos que

$$|\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(t,x)| \leq C \operatorname{mín}\left\{\frac{1}{t^2},\ \frac{1}{|x|^4}\right\} \leq \frac{C}{\left(|x| + t^{\frac{1}{2}}\right)^4},$$

y se demuestra la última desigualdad del Lema 1.

■

Lema 2. *Para todo $(s,y),\ (\sigma,z),\ (\tau,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ existen $0 < \gamma,\lambda < 1$, tales que se verifican las siguientes expresiones:*

$$|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)| \leq C\left(\frac{1}{\left(|s-\tau|^{\frac{1}{2}} + |y-w|\right)^3} + \frac{1}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}} + |y-w|\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\left(|s-\sigma|^{\frac{1}{2}} + |y-z|\right)}{\left(|\gamma s + (1-\gamma)\sigma - \tau|^{\frac{1}{2}} + |y-w|\right)^{\frac{5}{2}}}, \tag{9}$$

y también

$$|\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,z-w)| \leq \frac{C\left(|s-\sigma|^{\frac{1}{2}} + |y-z|\right)}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}} + |\lambda y + (1-\lambda)z - w|\right)^4}. \tag{10}$$

Demostración. Sean $(s,y),\ (\sigma,z),\ (\tau,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Primero demostremos la expresión (9). Comencemos notando que

$$|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)| = |\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)|^{\frac{1}{2}}|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)|^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, utilizando la primera estimación del Lema 1 y posteriormente el teorema del valor medio, se tiene que existe $0<\gamma<1$ tal que:

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)| \leq & C\left(\frac{1}{\left(|s-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}+\frac{1}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\times \\
& |\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)|^{\frac{1}{2}} \\
\leq & C\left(\frac{1}{\left(|s-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}+\frac{1}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\times \\
& |\partial_t\mathfrak{g}_+(\gamma s+(1-\gamma)\sigma-\tau,y-w)|^{\frac{1}{2}}|s-\sigma|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, usando el Lema 1 para estimar la derivada temporal del núcleo de calor, se tiene :

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)| \leq & C\left(\frac{1}{\left(|s-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}+\frac{1}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\times \\
& \frac{1}{\left(|\gamma s+(1-\gamma)\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^{\frac{5}{2}}}\left(|s-\sigma|^{\frac{1}{2}}+|y-z|\right),
\end{aligned}
$$

como queríamos.
Ahora, mostremos la estimación (10). Por el teorema del valor medio, existe $0<\lambda<1$ tal que:

$$
|\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,z-w)| = \left|\vec{\nabla}\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,\lambda y+(1-\lambda)z-w)\right||y-z|,
$$

Luego, usando la última desigualdad del Lema 1 para acotar el gradiente del núcleo de calor, se obtiene

$$
|\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,z-w)| \leq \frac{C\left(|s-\sigma|^{\frac{1}{2}}+|y-z|\right)}{\left(|\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|\lambda y+(1-\lambda)z-w|\right)^4}.
$$

■

3. Teorema Principal

El objetivo principal de esta lección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sean $\vec{v},\vec{\Phi}:[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ funciones vectoriales que verifican la siguiente ecuación:*

$$
\begin{cases}
\partial_t\vec{v}(t,x)=\Delta\vec{v}(t,x)+\vec{\Phi}(t,x), \\
\vec{v}(0,x)=0.
\end{cases} \tag{11}
$$

Consideremos $1<p_0<q_0<+\infty$ con $\frac{5}{2}<q_0<5$, $\frac{1}{q_0}=\frac{2-\alpha}{5}$ y $0<\alpha<1$. Supongamos que la función vectorial $\vec{\Phi}\in\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, entonces la función vectorial $\vec{v}$ definida por:

$$
\vec{v}(t,x)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\vec{\Phi}(s,x)\,ds=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\vec{\Phi}(s,y)dy\,ds, \tag{12}
$$

es solución de la ecuación (11) y pertenece al espacio $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, en el sentido de la Definición 5 presentada en la Lección 1, es decir

$$
\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)=\left\{\vec{v}:\sup_{(t,x)\neq(s,y)}\frac{|\vec{v}(t,x)-\vec{v}(s,y)|}{\left(|t-s|^{1/2}+|x-y|\right)^\alpha}<+\infty\right\}.
$$

Considerando α y $\vec{v}$ definidos como en el teorema anterior, observamos que para mostrar que $\vec{v}$, pertenece al espacio $\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, gracias al Teorema 3.1 de la Lección 1, basta probar que la cantidad

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\ r>0} \frac{1}{r^{\alpha}}\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^p\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

es finita, donde recordemos que $Q_r(t,x)$ y $|Q_r|$ representan la bola parabólica y su volumen respectivamente (ver Definición 5, Lección 1). Además recordamos la notación:

$$M_r(\vec{v})(t,x) = \frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)} \vec{v}(s,y)\,dy\,ds, \tag{14}$$

para todo $r>0$ y todo $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

Por otro lado, de acuerdo con la definición de $\vec{v}$, dada en (12), mostraremos que podemos expresarla como una convolución en tiempo y espacio:

$$\vec{v}(t,x) = (\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_+)(t,x), \tag{15}$$

donde $\vec{\Phi}_+(t,x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\vec{\Phi}(t,x)$, $\mathfrak{g}_+$ está definida como en (1) y $\star$ representa la convolución en tiempo y espacio; es decir:

$$\left(\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_+\right)(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \mathfrak{g}_+(t-s,x-y)\vec{\Phi}_+(s,y)\,dy\,ds.$$

En efecto, veamos que para cada $t\in\mathbb{R}$ y todo $x\in\mathbb{R}^3$, de la identidad (1) y la definición de $\vec{\Phi}_+$, tenemos que

$$\left(\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_+\right)(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t-s)\mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)\vec{\Phi}(s,y)\,dy\,ds,$$

luego, gracias al Teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_+\right)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t-s)\mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)\vec{\Phi}_+(s,y)\,dy\,ds,\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t-s)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(s)\int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\vec{\Phi}(s,y)\,dy\,ds,\end{aligned}$$

de donde, podemos ver que la integral anterior es distinta de cero cuando $s\in\,]0,t[$ pues caso contrario la cantidad $t-s\leq 0$, con esta observación podemos escribir la identidad anterior de la siguiente manera:

$$\left(\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_+\right)(t,x) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{g}_{t-s}(x-y)\vec{\Phi}(s,y)\,dy\,ds,$$

lo que junto con la identidad (12) nos da lo requerido.

A continuación presentamos una partición del espacio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, que nos será de utilidad en la demostración del teorema principal.

Lema 3. *Dados $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ y $r>0$, definimos para todo $j\in\mathbb{Z}$:*

$$\mathcal{C}_j := Q_{2^j r}(t,x)\setminus Q_{2^{j-1}r}(t,x), \qquad \vec{\Phi}_j := \mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi}_+ = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi},$$

$$\vec{v}_j := \mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_j,$$

donde, recordemos que $Q_{2^j r}(t,x)$ es la bola parabólica de centro (t,x) y radio $2^j r$. Entonces, considerando la función $\vec{v}$ como en la expresión (12), esta verifica la identidad

$$\vec{v} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \vec{v}_j. \tag{16}$$

Demostración. Sea $(s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, por la definición de convolución en tiempo y espacio podemos notar que:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\vec{v}_j(s,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_+\star\vec{\Phi}_j(s,y)&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_+\star\left(\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi}_+\right)(s,y),\\ &=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\mathfrak{g}_+(s-\sigma,y-z)\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}(\sigma,z)\vec{\Phi}_+(\sigma,z)\,dz\,d\sigma\right),\end{aligned}$$

de donde, por el Teorema de Fubini, se sigue:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\vec{v}_j(s,y)&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_+(s-\sigma,y-z)\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}(\sigma,z)\vec{\Phi}_+(\sigma,z)\right)dz\,d\sigma,\\ &=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\mathfrak{g}_+(s-\sigma,y-z)\vec{\Phi}_+(\sigma,z)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}(\sigma,z)\right)dz\,d\sigma.\end{aligned}\tag{17}$$

Claramente podemos notar que la familia de conjuntos $(\mathcal{C}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ es disjunta 2 a 2, por lo tanto por las propiedades de la función indicatriz, tenemos que:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}=\mathbb{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}_j}.$$

Además, de la definición del conjunto $\mathcal{C}_j$ observemos que:

$$\begin{aligned}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{C}_j&=\left(\bigcup_{j\leq 1}Q_{2^jr}(t,x)\setminus Q_{2^{j-1}r}(t,x)\right)\cup\left(\bigcup_{j\geq 2}Q_{2^jr}(t,x)\setminus Q_{2^{j-1}r}(t,x)\right),\\ &=Q_{2r}(t,x)\cup Q_{2r}(t,x)^c=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

entonces, $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}=1$, lo que junto con las identidades (17) y (15) implica

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\vec{v}_j(s,y)=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\mathfrak{g}_+(s-\sigma,y-z)\vec{\Phi}_+(\sigma,z)\,dz\,d\sigma,=\left(\mathfrak{g}_+\star\vec{\Phi}_+\right)(s,y)=\vec{v}(s,y).$$

■

4. Demostración del Teorema 3.1.

Por lo mencionado anteriormente, basta mostrar que la cantidad (13) es finita. Para ello, sean $r>0$ y $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ fijos pero arbitrarios, vamos a probar que la cantidad

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds,$$

está acotada uniformemente de r y (t,x). Para facilitar la exposición de la demostración, vamos a dividir la misma en etapas.

Etapa 1. Vamos a mostrar que se cumple la estimación

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds\leq\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds.\tag{18}$$

En efecto, de la ecuación (13) y por como definimos $M_r(\vec{v})(t,x)$ tenemos

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds=\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\left|\vec{v}(s,y)-\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\vec{v}(\sigma,z)\,dz\,d\sigma\right|^{p_0}dy\,ds,\tag{19}$$

luego como sabemos que:

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\vec{v}(s,y)\,d\sigma\,dz=\vec{v}(s,y),$$

podemos reescribir la identidad (19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds &= \frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\left|\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)\,dz\,d\sigma\right|^{p_0}dy\,ds,\\ &\leq \frac{1}{|Q_r|^{p_0+1}}\int_{Q_r(t,x)}\left(\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|\,dz\,d\sigma\right)^{p_0}dy\,ds.\end{aligned}$$

Ahora, como $\frac{1}{p_0}+1-\frac{1}{p_0}=1$, utilizando la desigualdad de Hölder en la integral entre paréntesis de la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds \leq \frac{1}{|Q_r|^{p_0+1}}\int_{Q_r(t,x)}&\left(\left(\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\right)^{1/p_0}\times\right.\\ &\left.|Q_r|^{1-1/p_0}\right)^{p_0}dy\,ds,\end{aligned}$$

de donde, reescribiendo la desigualdad anterior se sigue que:

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds \leq \frac{|Q_r|^{p_0-1}}{|Q_r|^{p_0+1}}\int_{Q_r(t,x)}\left(\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\right)dy\,ds,$$

es decir,

$$\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r(\vec{v})(t,x)|^{p_0}\,dy\,ds \leq \frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds,$$

como queríamos.

Etapa 2. Para continuar acotando la expresión (18), en esta etapa vamos a usar la partición del espacio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ presentada en el Lema 3 para aproximar $\vec{v}$ de forma más precisa. Así, considerando $\vec{v}_j, C_j$ y $\vec{\Phi}_j$ como se definieron en ese mismo lema, vamos a mostrar que se verifican las dos siguientes desigualdades:

- Para todo $j\leq 1$, se cumple
$$\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq C\; 2^{5j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}, \tag{20}$$
donde $\alpha=2-\frac{5}{q_0}$.
- Para cualesquier $(s,y),(\sigma,z)\in Q_r(t,x)$, y para todo $j\geq 2$, se verifica
$$|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|\leq C2^{j(\alpha-1)}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}, \tag{21}$$
donde $\alpha=2-\frac{5}{q_0}$.

Caso 1. Efectivamente, comencemos analizando que sucede cuando $j\leq 1$.
Para todo $(s,y)\in Q_r(t,x)$, se cumple $\mathcal{C}_j\subset Q_{2^j r}(t,x)\subset Q_{2r}(t,x)\subset Q_{4r}(s,y)$, y además se tiene

$$\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}(\tau,w)=\mathbb{1}_{Q_{4r}(s,y)}(s-\tau,y-w),$$

para todo $(\tau,w)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}|\vec{v}_j(s,y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}(\tau,w)\mathfrak{g}_+(\tau,w)\vec{\Phi}_j(s-\tau,y-w)\,dw\,d\tau\right|,\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}(\tau,w)\frac{1}{\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}+|w|\right)^3}|\vec{\Phi}_j(s-\tau,y-w)|\,dw\,d\tau,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la primera desigualdad del Lema 1 para estimar el núcleo del calor.

Definiendo la función $\psi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ como $\psi(\tau,w)=\left(|\tau|^{\frac{1}{2}}+|w|\right)^{-3}$, de la última desigualdad tenemos

$$|\vec{v}_j(s,y)|\leq\left(|\vec{\Phi}_j|\star(\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}\psi)\right)(s,y);$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de Young para la convolución, obtenemos:

$$\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \left\| |\vec{\Phi}_j| \star (\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}\psi) \right\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \|\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}\psi\|_{L^1_{t,x}} \|\vec{\Phi}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq Cr^2 \|\vec{\Phi}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}}. \tag{22}$$

De hecho, de las definiciones de $Q_{4r}(0,0)$ y ψ, tenemos que

$$\|\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}\psi\|_{L^1_{t,x}} = \int_{Q_{4r}(0,0)} \frac{1}{\left(|\tau|^{\frac{1}{2}} + |w|\right)^3} dw\, d\tau = \int_{-(4r)^2}^{(4r)^2} \int_{B_{4r}} \frac{1}{\left(|\tau|^{\frac{1}{2}} + |w|\right)^2 \left(|\tau|^{\frac{1}{2}} + |w|\right)} dw\, d\tau.$$

Luego por medio de las desigualdades:

$$|w|^2 \leq \left(|\tau|^{\frac{1}{2}} + |w|\right)^2 \quad \text{y} \quad |\tau|^{\frac{1}{2}} \leq |\tau|^{\frac{1}{2}} + |w|, \quad \text{para todo } (\tau, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

y aplicando un cambio a coordenadas polares, se sigue que

$$\|\mathbb{1}_{Q_{4r}(0,0)}\psi\|_{L^1_{t,x}} \leq \int_{-(4r)^2}^{(4r)^2} \int_{B_{4r}} \frac{1}{|w|^2 |\tau|^{\frac{1}{2}}} dw\, d\tau \leq C \int_{-(4r)^2}^{(4r)^2} \frac{1}{|\tau|^{\frac{1}{2}}} d\tau \int_0^{4r} dR \leq Cr^2.$$

Por otro lado, dado que $\mathcal{C}_j \subset Q_{2^j r}(t,x)$, tenemos que $\|\vec{\Phi}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}(t,x)} \vec{\Phi}\|_{L^{p_0}_{t,x}}$. Luego, según la definición de la norma de Morrey parabólica (ver Definición 1, Lección 2), se sigue que

$$\|\vec{\Phi}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq \|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}(t,x)} \vec{\Phi}\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq (2^j r)^{5(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0})} \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}}. \tag{23}$$

Entonces de (22) y (23) se obtiene para todo $j \leq 1$:

$$\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq C\ r^2 2^{5j(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0})}\ r^{\frac{5}{p_0} - \frac{5}{q_0}} \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}} \leq C\ 2^{5j(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0})} r^{\frac{5}{p_0}} r^{2 - \frac{5}{q_0}} \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}}.$$

Recordemos que consideramos $\frac{1}{q_0} = \frac{2-\alpha}{5}$; es decir, $\alpha = 2 - \frac{5}{q_0}$ y además, el volumen de la bola parabólica $Q_r(t,x)$ es $|Q_r| = Cr^5$ (ver Lema 3, Lección 1). Entonces, reemplazando estos valores en la última expresión, tenemos que:

$$\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}} \leq C\ 2^{5j(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0})}\ |Q_r|^{\frac{1}{p_0}}\ r^{\alpha}\ \|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0, q_0}_{t,x}}.$$

Caso 2. Ahora estudiemos el caso $j \geq 2$, entonces para cualquier $(s,y), (\sigma, z) \in Q_r(t,x)$ tenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}
|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)| =& |\mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_j(s,y) - \mathfrak{g}_+ \star \vec{\Phi}_j(\sigma,z)| \\
\leq& \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\mathfrak{g}_+(s-\tau, y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau, z-w)| |\vec{\Phi}_j(\tau,w)|\, dw\, d\tau \\
\leq& \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} (|\mathfrak{g}_+(s-\tau, y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau, y-w)| + \\
& |\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau, y-w) - \mathfrak{g}_+(\sigma-\tau, z-w)|) |\vec{\Phi}_j(\tau,w)|\, dw\, d\tau
\end{aligned} \tag{24}$$

Notemos que los primeros término del lado derecho de la expresión anterior ya los estimamos previamente en el Lema 2. Para continuar con la acotación de (24), observamos que la integral va a ser no nula únicamente en el soporte de $\vec{\Phi}_j$; entonces, vamos a mejorar las cotas del Lema 2 usando esta nueva información. Para ello vamos a probar las siguientes desigualdades:

- Para todo $(s,y), (\sigma,z) \in Q_r(t,x)$,
$$|s-\sigma|^{\frac{1}{2}} + |y-z| \leq 2r. \tag{25}$$
- Para cada $(\tau, w) \in \text{sop}(\vec{\Phi}_j)$ y cada $(s,y) \in Q_r(t,x)$
$$|s-\tau|^{\frac{1}{2}} + |y-w| \geq \frac{2^j}{4} r. \tag{26}$$

La desigualdad (25) se sigue directamente de la definición de bola parabólica $Q_r(t,x)$. Por otro lado, para la expresión (26), sean $(\tau,w)\in \mathrm{sop}(\vec{\Phi}_j)$ y $(s,y)\in Q_r(t,x)$, como $\vec{\Phi}_j=\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi}_+$ sabemos que $(\tau,w)\in \mathrm{sop}(\vec{\Phi}_j)\subset \mathcal{C}_j=Q_{2^jr}(t,x)\setminus Q_{2^{j-1}r}(t,x)$; entonces por la desigualdad triangular se tiene

$$2^{j-1}r\leq |\tau-t|^{\frac{1}{2}}+|w-x|\leq |\tau-s|^{\frac{1}{2}}+|w-y|+|s-t|^{\frac{1}{2}}+|y-x|,$$

de donde como $(s,y)\in Q_r(t,x)$,

$$2^{j-1}r\leq |\tau-s|^{\frac{1}{2}}+|w-y|+r. \tag{27}$$

Además, por medio de la siguiente estimación :

$$-r\geq -\frac{2^jr}{4},\qquad \text{para } j\geq 2,$$

reescribimos la expresión (27) de la siguiente manera

$$2^jr\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\leq 2^jr\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^j}\right)\leq |\tau-s|^{\frac{1}{2}}+|w-y|;$$

es decir $|s-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\geq \frac{2^j}{4}r$ para $j\geq 2$ como queríamos.

Retomando la acotación de la expresión (9), notamos que $(\sigma,y)\in Q_r(t,x)$ pues $(\sigma,z),(s,y)\in Q_r(t,x)$; entonces, utilizando las desigualdades (25), (26) se sigue que:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)| &\leq C\left(\frac{1}{\left(\frac{2^jr}{2^2}\right)^3}+\frac{1}{\left(\frac{2^jr}{2^2}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2r}{\left(|\gamma s+(1-\gamma)\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^{\frac{5}{2}}}\right)\\ &\leq C\frac{2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^2}{2^jr}\right)^{\frac{3}{2}}2r}{\left(|\gamma s+(1-\gamma)\sigma-\tau|^{\frac{1}{2}}+|y-w|\right)^{\frac{5}{2}}},\end{aligned}$$

donde $0<\gamma<1$. Notemos que $\gamma s+(1-\gamma)\sigma-t=\gamma(s-t)+(1-\gamma)(\sigma-t)$ y dado que el intervalo abierto en $\mathbb{R}$ es convexo, tenemos que $\gamma s+(1-\gamma)\sigma-t\in(s-t,\sigma-t)$. Además, $(s-t,\sigma-t)\subseteq(-r^2,r^2)$, pues (σ,z), $(s,y)\in Q_r(t,x)$, entonces $\gamma s+(1-\gamma)\sigma-t\in(-r^2,r^2)$; es decir, $|\gamma s+(1-\gamma)\sigma-t|^{\frac{1}{2}}<r$, con que concluimos que $(\gamma s+(1-\gamma)\sigma,y)\in Q_r(t,x)$. Así, utilizando nuevamente la desigualdad (26) en la última expresión obtenemos

$$|\mathfrak{g}_+(s-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)|\leq C\,2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^2}{2^jr}\right)^{\frac{3}{2}}2r\left(\frac{2^2}{2^jr}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{C}{2^{4j}r^3}. \tag{28}$$

Análogamente, para la expresión (10), como $0<\lambda<1$, de la convexidad de la bola abierta en $\mathbb{R}^3$, se sigue que $\lambda y-(1-\lambda)z\in B_r(x)$, con lo cual tenemos que $(\sigma,\lambda y-(1-\lambda)z)\in Q_r(t,x)$. Así, aplicando las desigualdades (25) y (26) en la expresión (10) se sigue que:

$$|\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,y-w)-\mathfrak{g}_+(\sigma-\tau,z-w)|\leq C\left(\frac{2^2}{2^jr}\right)^4 2r=\frac{C}{2^{4j}r^3}, \tag{29}$$

Usando las desigualdades (28) y (29) en la expresión (24), obtenemos

$$|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|\leq \frac{C}{2^{4j}r^3}\int_{\mathrm{sop}(\vec{\Phi}_j)}|\vec{\Phi}_j(\tau,w)|\,dw\,d\tau\leq \frac{C}{2^{4j}r^3}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}|\vec{\Phi}_j(\tau,w)|\,dw\,d\tau.$$

Ahora, teniendo en cuenta que definimos $\vec{\Phi}_j=\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi}_+$ y $\mathcal{C}_j=Q_{2^jr}(t,x)\setminus Q_{2^{j-1}r}(t,x)\subseteq Q_{2^jr}(t,x)$, tenemos que

$$|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|\leq \frac{C}{2^{4j}r^3}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}|\mathbb{1}_{\mathcal{C}_j}\vec{\Phi}_+(\tau,w)|\,dw\,d\tau\leq \frac{C}{2^{4j}r^3}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3}|\mathbb{1}_{Q_{2^jr}}\vec{\Phi}_+(\tau,w)|\,dw\,d\tau,$$

de donde, como $\mathbb{1}_{Q_{2^j r}} = \mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}$, aplicando la desigualdad de Hölder podemos escribir

$$\begin{aligned}|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)| \leq & \frac{C}{2^{4j}r^3}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}(\tau,w)|^{\frac{p_0}{p_0-1}}\, dw\, d\tau\right)^{\left(1-\frac{1}{p_0}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3} |\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\vec{\Phi}_+(\tau,w)|^{p_0}\, dw\, d\tau\right)^{\frac{1}{p_0}}\\ \leq & \frac{C}{2^{4j}r^3}\|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\|_{L^1_{t,x}}^{\left(1-\frac{1}{p_0}\right)}\|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\vec{\Phi}_+\|_{L^{p_0}_{t,x}},\end{aligned}$$

después, calculando la norma $\|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\|_{L^1_{t,x}}$ y teniendo presente que por definición $\vec{\Phi}_+ = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}\vec{\Phi}$, tenemos que

$$|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)| \leq \frac{C}{2^{4j}r^3}\,|Q_{2^j r}|^{\left(1-\frac{1}{p_0}\right)}\,\|\mathbb{1}_{Q_{2^j r}}\vec{\Phi}\|_{L^{p_0}_{t,x}}.$$

Por último, considerando la definición equivalente a la norma en el espacio de Morrey vista en el Lema 3 de la Lección 2, también recordando la definición de $|Q_{2^j r}|$ y que $\alpha = 2 - \frac{5}{q_0}$, se sigue que:

$$\begin{aligned}|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)| \leq & \frac{C}{2^{4j}r^3}\,|Q_{2^j r}|^{\left(1-\frac{1}{p_0}\right)}\,|Q_{2^j r}|^{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}\,\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\\ \leq & \frac{C}{2^{4j}r^3}\,\left(2^j r\right)^{5\left(1-\frac{1}{q_0}\right)}\,\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\\ \leq & C2^{j\left(1-\frac{5}{q_0}\right)}r^{2-\frac{5}{q_0}}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C2^{j(\alpha-1)}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}.\end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente, utilizando la etapa anterior y la identidad (16) probaremos que:

$$\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\, dz\, d\sigma\, dy\, ds\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq Cr^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}},$$

con $\alpha = 2 - \frac{5}{q_0}$.
Comencemos observando que de la expresión (16), tenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\, dz\, d\sigma\, dy\, ds\\ &\quad= \frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\vec{v}_j(s,y) - \sum_{j\in\mathbb{Z}}\vec{v}_j(\sigma,z)\right|^{p_0} dz\, d\sigma\, dy\, ds\\ &\quad= \frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} \left|\sum_{j\leq 1}\left(\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)\right) + \sum_{j\geq 2}\left(\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)\right)\right|^{p_0} dz\, d\sigma\, dy\, ds,\end{aligned}$$

luego utilizando la desigualdad triangular, para el valor absoluto, se sigue que:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} |\vec{v}(s,y) - \vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\, dz\, d\sigma\, dy\, ds\\ &\quad\leq \frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)} \sum_{j\leq 1}|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0} + \sum_{j\geq 2}|\vec{v}_j(s,y) - \vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\, dz\, d\sigma\, dy\, ds.\end{aligned}$$

Entonces, como $1 < p_0 < +\infty$, elevando la última desigualdad a la potencia $\frac{1}{p_0}$ y usando consecutivamente la desigualdad triangular, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\qquad\le\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}\sum_{j\le 1}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}+\\
&\qquad\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}\sum_{j\ge 2}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\qquad\le\sum_{j\le 1}\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}+\\
&\qquad\sum_{j\ge 2}\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}.
\end{aligned}\tag{30}
$$

Para seguir acotando la expresión anterior, vamos a estimar los sumandos de ambas series; entonces, tenemos dos casos:

- Sea $j\le 1$, de la desigualdad triangular, encontramos que:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\quad\le\frac{1}{|Q_r|^{\frac{2}{p_0}}}\left(\left(\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}+\left(\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\right),
\end{aligned}
$$

  luego, por propiedades de la integral,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\qquad\le\frac{1}{|Q_r|^{\frac{2}{p_0}}}\left(\left(\int_{Q_r(t,x)}\|\vec{v}_j\|^{p_0}_{L^{p_0}_{t,x}}\,dz\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p_0}}+\left(\int_{Q_r(t,x)}\|\vec{v}_j\|^{p_0}_{L^{p_0}_{t,x}}\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\right)\\
&\qquad\le\frac{1}{|Q_r|^{\frac{2}{p_0}}}\left(\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}}\,|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}+\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}}\,|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}\right)\le\frac{2}{|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}}\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}}.
\end{aligned}
$$

  Por tanto, utilizando la expresión (20), la cual nos da una estimación de $\|\vec{v}_j\|_{L^{p_0}_{t,x}}$, de la última expresión se sigue que para todo $j\le 1$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}&\le\frac{C}{|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}}\;2^{5j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}|Q_r|^{\frac{1}{p_0}}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\\
&\le C\;2^{5j(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0})}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}.
\end{aligned}\tag{31}
$$

- Por otro lado, de la expresión (21) que nos permite estimar $|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|$ para (s,y), $(\sigma,z)\in Q_r(t,x)$, junto con la monotonía de la integral tenemos que para todo $j\ge 2$ se cumple:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}_j(s,y)-\vec{v}_j(\sigma,z)|^{p_0}\;dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\\
&\quad\le C2^{j(\alpha-1)}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}\;dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}\le C2^{j(\alpha-1)}r^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}.
\end{aligned}\tag{32}
$$

Finalmente, recordando que $\alpha - 1 < 0$ y $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} > 0$, pues $1 < p_0 < q_0 < +\infty$, obtenemos que las series $\sum_{j\leq 1} 2^{5j\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)}$ y $\sum_{j\geq 2} 2^{j(\alpha-1)}$ son convergentes pues corresponden a series geométricas de razón menor que 1. Por lo tanto, empleando las estimaciones (31) y (32) en la expresión (30) concluimos que:

$$\left(\frac{1}{|Q_r|^2}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-\vec{v}(\sigma,z)|^{p_0}\,dz\,d\sigma\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p_0}}$$
$$\leq Cr^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}}\left(\sum_{j\leq 1} 2^{5j\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q_0}\right)} + \sum_{j\geq 2} 2^{j(\alpha-1)}\right) \leq Cr^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}},$$

lo que junto con la desigualdad (18), nos proporciona la estimación

$$\left(\frac{1}{|Q_r|}\int_{Q_r(t,x)}\int_{Q_r(t,x)}|\vec{v}(s,y)-M_r\vec{v}(t,x)|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq Cr^{\alpha}\|\vec{\Phi}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}},$$

la cual es la condición asociada al Teorema 3.1. que vimos en la Lección 1 (ver también la expresión (13)). Por consecuente, hemos obtenido que $\vec{v}$ pertenece a $\dot{\mathcal{C}}^{\alpha}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ como queríamos demostrar. ■

Este resultado nos indica entonces que si la fuerza exterior $\vec{\Phi}$ pertenece a un espacio de Morrey, entonces la solución "mild" de la ecuación del calor no-homogénea (11) es Hölder regular con respecto a las dos variables (de tiempo y espacio). Este resultado de *ganancia* de regularidad es fundamental en el estudio moderno de varias ecuaciones de la mecánica de fluidos como por ejemplo las ecuaciones de Navier-Stokes que constituyen uno de los problemas del milenio.