Lección n°5: Rápida introdución a los espacios de Sobolev

EPN, Agosto 2019

Índice

1. Introducción

En la lección anterior introducimos una herramienta de base: las distribuciones temperadas. En esta lección usaremos esta herramienta para estudiar (rápidamente) los espacios de Sobolev que son de gran utilidad en el análisis armónico y en el estudio de las ecuaciones en derivadas en parciales.

La idea de base de los espacios de Sobolev es estudiar la *regularidad* de una función o de manera más general de una distribución. Así, las propiedades de regularidad de una distribucíon se miden de manera cuantitativa mediante las propiedades de integrabilidad de sus derivadas débiles en el marco de los espacios de Lebesgue.

Es importante señalar que un estudio riguroso y detallado de los espacios de Sobolev está fuera de los objetivos de este curso y sería material suficiente para otro curso completo. Por esta razón, introduciremos estos espacios rápidamente y haremos más énfasis en algunas de sus propiedades más útiles.

2. Espacios de Sobolev de regularidad entera

Recordemos rápidamente que dada una distribución temperada $u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-indice $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, donde $|a| = a_1 + \cdots + a_n \geq 0$ es su tamaño, definimos la derivada (en el sentido de las distribuciones) $\partial^a u$ como

$$\langle \partial^a u, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = (-1)^{|a|} \langle u, \partial^a \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Tenemos así una primera definición.

Definición 1 (Espacios de Sobolev de orden entero positivo) *Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos el espacio de Sobolev no homogéneo $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{W^{k,p}} < +\infty\}, \tag{2}$$

donde

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|a|\leq k} \|\partial^a u\|_{L^p}. \tag{3}$$

Hagamos los siguientes comentarios sobre esta primera definición.

⇒ En las formulas (2) y (3) vemos que el espacio de Sobolev de orden $k \in \mathbb{N}$: $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, consiste en el espacio de las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para todo multi-indice $0 < |a| \leq k$ se tiene $\partial^a u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, medimos el tamaño de la función u y de sus derivadas $\partial^a u$ en el marco del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$.

⇒ El parámetro $k \in \mathbb{N}$ mide la regularidad de la distribución u y en particular se tiene $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Además, usando la fórmula (3) podemos observar directamente que dados dos números naturales $0 \leq k_1 \leq k_2$ entonces se tienen las inclusiones:

$$W^{k_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k_1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n).$$

En otras palabras, los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ son *decrecientes* conforme el parámetro de regularidad $k \in \mathbb{N}$ aumenta.

⇒ Para $1 \leq p \leq +\infty$ los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Banach con la norma dada en la expresión (3).

⇒ Para $1 \leq p < +\infty$ los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ son espacios separables.

⇒ Para $1 < p < +\infty$ los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ son espacios reflexivos.

⇒ En el caso particular $p = 2$, notaremos $W^{k,2}(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$. Los espacios $H^k(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Hilbert (lo que justifica la letra H en su notación) con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \int_{\mathbb{R}^3} u(x)\, v(x) dx + \sum_{0<|a|\leq k} \int_{\mathbb{R}^3} (\partial^a u(x))(\partial^a v(x)) dx,$$

que induce una norma *equivalente* a la norma $\| \cdot \|_{H^k}$ dada en (3) (con $p = 2$).

En la siguiente proposición veremos cómo podemos caracterizar los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ mediante la transformación de Fourier. Esta caracterización es muy útil pues nos permite definir de manera natural los espacios de Sobolev de orden fraccionario $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (con $s \in \mathbb{R}$) como lo veremos más adelante.

Empezaremos por fijar algunas notaciones:

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$ escribiremos la relación $a \approx b$ si y solo si existen dos constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$, que no dependen ni de a ni de b, tales que se tiene $c_1\, a \leq b \leq c_2\, a$.
- De igual manera escribiremos $a \lesssim b$ si y solo si existe une constante $c_3 > 0$ (que no de ni de a ni de b) tal que se tiene $a \leq c_3\, b$.

Se tiene entonces la siguiente caracterización de los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$:

Proposición 1 *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Sea $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Sobolev dado en la Definición 1. Para todo $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\|u\|_{W^{k,p}} \approx \left\| \left((1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{u} \right)^{\vee} \right\|_{L^p}. \tag{4}$$

Prueba. Sea $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ de acuerdo a la Definición 1. Entonces para todo multi-indice $|\alpha| \leq k$ se tiene

$$\partial^\alpha u = ((i\xi)^\alpha \widehat{u})^{\vee} = \left(\frac{(i\xi)^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{k/2}} (1 + |\xi|^2)^{k/2} \widehat{u} \right)^{\vee}.$$

Por otro lado, como se tiene $|\alpha| \leq k$ entonces observamos que la funciíon $m(\xi) = \dfrac{(i\xi)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ es acotada y usando el teorema de multiplicadores de Hörmander–Mihlin (ver el Teorema 5,2,7 de la página 367 del libro [2]) obtenemos la estimación $\left\| \left(m(\xi)\widehat{f} \right)^\vee \right\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}$ para $1 < p < +\infty$. Decimos entonces que la función $m(\xi)$ es un multiplicador en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

De esta manera, volviendo a la identidad de arriba podemos escribir

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \left\| \left(m(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^p} \leq c \left\| \left((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^p}.$$

Mostraremos ahora la estimación en el otro sentido. Observemos primero que se tiene la identidad

$$(1+|\xi|^2)^k = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!(k-|\alpha|)!}\xi^{2\alpha} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^{2\alpha},$$

de donde obtenemos

$$(1+|\xi|^2)^{k/2}(1+|\xi|^2)^{k/2} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha\, \xi^\alpha,$$

y por lo tanto podemos escribir

$$(1+|\xi|^2)^{k/2} = \sum_{|\xi|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha m_\alpha(\xi).$$

Así, dado que para todo $|\alpha| \leq k$ la función $m_\alpha(\xi) = \dfrac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ es un multiplicador en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ (con $1 < p < +\infty$) entonces tenemos

$$\left\| \left((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^p} = \left\| \left(\sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \xi^\alpha m_\alpha(\xi)\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^p} \leq \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \left\| (m_\alpha(\xi)\xi^\alpha\widehat{u})^\vee \right\|_{L^p} \sum_{|\alpha|\leq k} c_\alpha \left\| (\xi^\alpha\widehat{u})^\vee \right\|_{L^p} \leq c\|u\|_{W^{k,p}}.$$

■

Es interesante hacer los siguientes comentarios:

- ⇒ En la cantidad $\left\| \left((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^p}$, la expresión $\widehat{u}$ denota la tranformación de Fourier de u en el sentido de las distribuciones. Observemos además que la función $(1+|\xi|^2)^{k/2}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y es una función a crecimiento polinomial (de orden k) por lo que el producto $(1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u}$ está bien definido en el sentido de las distribuciones. Finalmente, la expresión $\left((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee$ denota la tranformación de Fourier inversa siempre en el sentido de las distribuciones.

- ⇒ Recordemos que el objetivo de los espacios de Sobolev es medir la regularidad de las distribuciones. En la estimación (4) podemos observar que la regularidad de la distribución $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ puede ser estudiada a través de las propiedades de decrecimiento de su transformación de Fourier en el sentido que la expresión $((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u})^\vee$ debe pertenecer al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.

  Para ilustrar este hecho, podemos fijar el parámetro $p = 2$ y entonces, por la expresión (4) y la identidad de Plancherel tenemos

  $$\|u\|_{H^k} \approx \left\| \left((1+|\xi|^2)^{k/2}\widehat{u} \right)^\vee \right\|_{L^2} = \left\| (1+|\xi|^2)^{k/2}\,\widehat{u} \right\|_{L^2}.$$

  En el ultimo término en el lado derecho podemos observar claramente que para asegurar que la función $(1+|\cdot|^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{u}$ pertenezca al espacio $L^2(\mathbb{R}^3)$, la función $\widehat{u}$ debe decrecer al infinito más rápido que el inverso del polinomio $(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}$.

$\Rightarrow$ Es importante notar que en la definición clásica de los espacios de Sobolev dada en la Definición 1 incluimos los casos limites del parámetro de definición de los espacios de Lebesgue: $p = 1$ y $p = +\infty$. Sin embargo, la caracterización de los espacios de Sobolev dada en esta proposición *no es válida* para estos casos limites y por lo tanto se considera los valores $1 < p < +\infty$.

3. Espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria

El término a la derecha de la estimación (4) abre la puerta a la definición de los espacios de Sobolev *fraccionarios* que ahora son introducimos de forma natural en la siguiente definición.

Definición 2 (Espacios de Sobolev fraccionarios) *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como:*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{W^{s,p}} < +\infty\}, \tag{5}$$

donde

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \left\| \Big((1+|\xi|^2)^{s/2}\, \widehat{u} \Big)^{\vee} \right\|_{L^p}. \tag{6}$$

$\Rightarrow$ Vemos entones que el espacio de Sobolev fraccionario $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ constituye el espacio de las distribuciones temperadas $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que $\Big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\Big)^{\vee} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow$ Al igual que los espacios de Sobolev de orden entero $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (con $k \in \mathbb{N}$), los espacios de Sobolev fraccionarios miden la regularidad de las distribuciones pero de manera *más fina*: ahora medimos esa regularidad por medio del parámetro $s \in \mathbb{R}$ que es un numero real no necesariamente entero.

$\Rightarrow$ Los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Banach con la norma dada en la expresión (6), además, son espacios separables y reflexivos.

$\Rightarrow$ Al igual que en el caso de regularidad entera, para el caso particular de parámetro $p = 2$ notaremos $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, donde el espacio H^s es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\Big)\Big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{v}\Big)\, d\xi.$$

Para un estudio más detallados de los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$, se puede consultar la Lección N°2 del curso [3].

Veamos ahora algunas propiedades de los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Es importante señalar el hecho que gracias a la Proposición 1 todas las propiedades que estudiaremos de ahora en adelante se verifican en particular para los espacios $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$.

Empezaremos estudiando la relación entre la clase de Schwartz y los espacios de Sobolev.

Proposición 2 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$. La clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio denso en el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Empecemos por verificar la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, observemos que para todo $s \in \mathbb{R}$ la función $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y es una función a lo más a crecimiento polinomial. Entonces se tiene $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de donde, tomando la transformación de Fourier inversa obtenemos $\big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi}\big)^{\vee} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Recordando además la inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ se sigue que $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos ahora que dada $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que u_n converge a u en la topología fuerte del espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene $\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\right)^{\vee} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_n \to \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\right)^{\vee}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Así, basta definir $u_n = \left(\dfrac{\widehat{\varphi_n}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\right)^{\vee}$ para obtener el resultado deseado. ■

Esta propiedad resulta ser muy útil al momento de determinar el espacio dual topológico de los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, como lo veremos en la prueba del siguiente resultado.

Proposición 3 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$. Entonces, se tiene la identificación $\left(W^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)' = W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$, donde $1 = 1/p + 1/p'$.*

Prueba. Consideremos la siguiente forma bi-lineal:

$$\begin{aligned} B: \quad & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \\ & (\varphi, \phi) \mapsto B(\varphi,\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Luego, se verifica la siguiente estimación: $|B(\varphi,\phi)| \leq \|\varphi\|_{W^{s,p}}\|\phi\|_{W^{-s,p'}}$. En efecto, usando la identidad de Parseval y las desigualdades de Hölder podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi}(\xi)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\widehat{\phi}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}(x)\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\widehat{\phi}\right)^{\vee}(x)dx \\ &\leq \|\varphi\|_{W^{s,p}}\|\phi\|_{W^{-s,p'}}. \end{aligned}$$

Puesto que la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es densa en los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$, entonces la forma bi-lineal B se extiende a una única forma bi-lineal $\tilde{B} : W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \times W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$ que además, para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $v \in W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$, verifica $|\tilde{B}(u,v)| \leq \|u\|_{W^{s,p}}\|v\|_{W^{-s,p'}}$. Así, la forma bi-lineal $\tilde{B}$ pone en dualidad a los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $W^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$. ■

Veremos ahora una caracterización de los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ que resulta ser muy útil para verificar algunas de las principales propiedades de estos espacios. Esta caracterización se basa en la definición del operador J_s que introducimos a continuación.

Definición 3 (Operador J_s) *Sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el operador J_s como $J_s = (I-\Delta)^{s/2}$, cuya acción está dada por:*

$$J_s(\varphi) = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}, \quad \textit{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

- ⇒ De esta definición observamos directamente que para $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ se tienen las identidades

  $$J_{s_1+s_1}(\varphi) = J_{s_1}(J_{s_2}(\varphi)) = J_{s_2}(J_{s_1}(\varphi)),$$

  además se tiene $J_0(\varphi) = \varphi$.

- ⇒ Para los valores $s < 0$, el operador J_s es también conocido como *Potencial de Bessel*. En este caso, es común mirar este operador como el producto de convolución

  $$J_s(\varphi) = G_s * \varphi,$$

donde el núcleo $G_s(x) = \left((1+|\xi|^s)^{s/2}\right)^{\vee}(x)$ es una función regular en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y además se tiene $G_s(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La gran ventaja de mirar el operador J_s (con $s < 0$) como el producto de convolución con el núcleo G_s repose esencialmente en el hecho que este núcleo verifica las siguientes estimaciones *finas* según los siguientes casos del parámetro s con relación al parámetro $-n$ (donde n es siempre la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$). Para una prueba de esta estimaciones se puede ver la Proposición 6,1,5 (página 6) del libro [2].

A) Para $-n < s < 0$ se tiene:

$$G_s(x) \approx \begin{cases} |x|^{-s-n}, & |x| \leq 2, \\ e^{-|x|/2}, & |x| > 2. \end{cases} \qquad (-s-n<0). \tag{7}$$

B) Para $s = -n$ se tiene:

$$G_s(x) \approx \begin{cases} \log(2/|x|) + 1 + |x|^2, & |x| \leq 2, \\ e^{-|x|/2}, & |x| > 2. \end{cases} \tag{8}$$

C) Para $s < -n$ se tiene:

$$G_s(x) \approx \begin{cases} 1 + |x|^{-s-n}, & |x| \leq 2, \\ e^{-|x|/2}, & |x| > 2. \end{cases} \qquad (-s-n>0) \tag{9}$$

Una vez que hemos introducido el operador J_s, volviendo a la Definición 2 observamos directamente que se tiene la siguiente caracterización de la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$:

$$\boxed{\|u\|_{W^{s,p}} = \|J_s(u)\|_{L^p}. \qquad (10)}$$

Con esta caraterización de los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ a la mano, podemos verificar de manera sencilla las siguientes propiedades.

Proposición 4 *Sea* $1 < p < +\infty$. *Entonces se tiene* $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$. *Además, Si* $s_1 < s_2$ *entonces se tiene* $W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Prueba. La identidad $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ se sigue directamente de (10) y del hecho que $J_0(u) = u$. Verifiquemos ahora la inclusión $W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$. Para empezar supongamos que los parámetros $s_1 < s_2$ verifican además $s_2 - n < s_1$. Escribimos

$$\|u\|_{W^{s_1,p}} = \|J_{s_1}(u)\|_{L^p} = \|J_{s_1-s_2}(J_{s_2}(u))\|_{L^p}.$$

Luego, puesto que $s_1 - s_2 < 0$, entonces tenemos

$$\|J_{s_1}(u)\|_{L^p} = \|J_{s_1-s_2}(J_{s_2}(u))\|_{L^p} = \|J_{s_1}(u)\|_{L^p} = \|G_{s_1-s_2} * (J_{s_2}(u))\|_{L^p},$$

y usando las desigualdades de Young podemos escribir

$$\|G_{s_1-s_2} * (J_{s_2}(u))\|_{L^p} \leq c\|G_{s_1-s_2}\|_{L^1}\|J_{s_2}(u)\|_{L^p} = c\|G_{s_1-s_2}\|_{L^1}\|u\|_{W^{s_2,p}}.$$

Finalmente, usando las estimaciones (7) (donde se tiene $-n < s_1 - s_2 < 0$) y usando un cambio a coordenadas polares se puede ver sin dificultad que se tiene $\|G_{s_1-s_2}\|_{L^1} < +\infty$.

Observamos entonces que si $s_2 - n < s_1$ entonces se tiene la inclusión $W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pare terminar con esta prueba, observemos además que esta inclusión es también válida para todo $s_1 < s_2$. En efecto, basta observar que si los parámetros $s_1 < s_2$ son tales que $s_2 - n \geq s_1$ luego podemos fijar un parámetro $\sigma \in]s_1, s_2[$ tal que $s_2 - n < \sigma$ y obtenemos la inclusión $W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{\sigma,p}(\mathbb{R}^n)$. Procediendo de esta manera, en un numero finito de inclusiones intermedias llegamos finalmente al espacio deseado $W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$. ■

Hagamos ahora las siguientes observaciones que se siguen de este resultado.

⇒ Recordando que el parámetro s es el que mide el grado de regularidad en los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, la inclusión $W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $s_1 < s_2$ nos dice que estos espacios están ordenados de manera decreciente con respecto a s: a menos *regularidad* el espacio es más *grande*. De manera más precisa, se tienen las siguientes inclusiones para $s_1 < s_2 < 0 < s_3 < s_4$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset W^{s_4,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_3,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{s_1,p}(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^n),$$

lo cual nos brinda un panorama más completo en cuanto a la relaciones de inclusión de los espacios con lo que hemos venido trabajando.

⇒ Como caso particular tenemos la inclusión $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $s \geq 0$. Esto nos dice que las distribuciones que pertenecen al espacio $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (con $s \geq 0$) necesariamente son funciones L^p- integrables y por lo tanto son funciones que pertenecen al espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

⇒ Este no es el caso de los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $s < 0$, los cuales pueden contener objetos más generales que las funciones pertenecientes a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Un ejemplo clásico es el hecho que la masa de Dirac en el origen δ_0 (que es una medida boreliana pero no es una función del espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) pertenece al espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $s < -n/p'$. En efecto, recordemos que se tiene la identidad $\widehat{\delta_0} = 1$, de donde obtenemos

$$\|\delta_0\|_{W^{s,p}} = \left\| \left((1+|\xi|^2)^{s/2} \right)^{\vee} \right\|_{L^p} = \|G_s\|_{L^p}. \tag{11}$$

Luego, usando las estimaciones (7), (8) y (9), y además, usando un cambio a coordenadas polares se ve que $\|G_s\|_{L^p} < +\infty$ si y solo si $s < -n/p'$.

Cuando $s \geq 0$, la norma $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ también puede caracterizarse de la siguiente forma: recordemos rápidamente que para $\sigma \in \mathbb{R}$ el operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{\sigma/2}$ puede definirse de manera simple usando la transformación de Fourier como sigue:

$$\widehat{(-\Delta)^{\sigma/2}\varphi}(\xi) = c|\xi|^{\sigma}\widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{para} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Usando el operador laplaciano fraccionario tenemos la siguiente caracterización de los espacios $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $s \geq 0$.

Proposición 5 *Sean $s \geq 0$ y $1 < p < +\infty$. Entonces, para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la estimación:*

$$\|u\|_{W^{k,p}} \approx \|u\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}.$$

Prueba. Empecemos verificando la estimación $\|u\|_{W^{s,p}} \lesssim \|u\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$. Escribimos

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \left\| \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \right)^{\vee} \right\|_{L^p} = \left\| \left(\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^s)} (1+|\xi|^s)\widehat{u} \right)^{\vee} \right\|_{L^p},$$

donde podemos observar que la función $\dfrac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^s)}$ es acotada y por lo tanto es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces tenemos

$$\left\| \left(\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^s)} (1+|\xi|^s)\widehat{u} \right)^{\vee} \right\|_{L^p} \leq c \left(\|(1+\xi|^s)\widehat{u})^{\vee}\right\|_{L^p} \leq c\|u\|_{L^p} + \left\|(|\xi|^s\widehat{u})^{\vee}\right\|_{L^p} \leq c\|u\|_{L^p} + c\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}.$$

Verifiquemos ahora la estimación $\|u\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p} \lesssim \|u\|_{W^{s,p}}$. En primer lugar, puesto que se tiene la inclusión $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces se tiene directamente $\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{s,p}}$, por lo que basta verificar que se tiene además $\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p} \leq c\|u\|_{W^{s,p}}$. En efecto, escribimos

$$\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p} = \|(|\xi|^s\widehat{u})\|_{L^p} = \left\| \left(\frac{|\xi|^s}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \right) \right\|_{L^p},$$

donde podemos notar que la función $\dfrac{|\xi|^s}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}$ también es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (pues es una función acotada) y entonces tenemos

$$\left\| \left(\frac{|\xi|^s}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \right) \right\|_{L^p} \leq c \left\| \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u} \right) \right\|_{L^p},$$

de donde se obtiene la estimación deseada. ■

Veamos ahora otras propiedades de los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $s>0$ que son de utilidad.

4. Inyecciones de Sobolev

Estas propiedades estudian esencialmente algunas relaciones de inclusión de los espacios de Sobolev en los espacios de Lebesgue. Recordemos que por la Proposición 4 se tiene siempre la inclusión $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $s \geq 0$, pero el estudio que queremos hacer es diferente: dados $s>0$ y $1<p<+\infty$ se trata de hallar un tercer parámetro $1 \leq q \leq +\infty$ tal que se verifique la inclusión

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n),$$

lo cual, para todo $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, se expresa se manera *equivalente* mediante el control a nivel de las normas:

$$\|u\|_{L^q} \lesssim \|u\|_{W^{s,p}}.$$

Este tipo de inclusiones se conoce como *inyecciones de Sobolev.* Ahora, es natural preguntarse cómo encontrar el parámetro q (dados los parámetros s y p) para que se tenga esta estimación. Para responder a esta pregunta haremos los siguientes razonamientos que por el momento no son nada rigurosos pero nos darán una idea más clara del camino a seguir para hallar dicho parámetro q. Observemos en primer lugar que como se tiene $s>0$ entonces usando la Proposición 5 podemos escribir

$$\|u\|_{L^q} \lesssim \|u\|_{W^{s,p}} \approx \|u\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}.$$

Vemos entonces que se quiere controlar la cantidad $\|u\|_{L^q}$ con la suma de las cantidades $\|u\|_{L^p}$ y $\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$. Nos preguntamos ahora cuál de estas dos cantidades nos da buena información para hallar el parámetro q. Si nos deshacemos por un momento de la segundad cantidad $\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$ entonces obtenemos (formalmente) la estimación $\|u\|_{L^q} \lesssim \|u\|_{L^p}$. Pero esta estimación no nos proporciona ninguna información interesante pues sabemos que los espacios de Lebesgue definidos sobre todo $\mathbb{R}^n$ no son comparables por medio de la relación de inclusión. En cambio, si nos deshacemos por un momento de la primera cantidad $\|u\|_{L^p}$ entonces obtenemos (siempre formalmente) la estimación $\|u\|_{L^q} \lesssim \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$, la cual es más interesante pues aquí interviene además el parámetro s.

La estimación $\|u\|_{L^q} \lesssim \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$ nos resulta muy familiar si recordamos las *desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev* introducidas en la Lección N° 5 del curso [1]. De manera más precisa, por el Teorema 2 y la

Observación 1 (página 5) de esta lección sabemos que esta estimación anterior tiene sentido cuando el parámetro q verifica $1 < q < +\infty$ y verifica además la reclación $1/p - 1/q = s/n$. Comentemos rápidamente que esta relación viene del hecho que la norma $\|\cdot\|_{L^q}$ tiene un grado de homogeneidad $-n/q$, mientras que la semi-norma $\|(-\Delta)^{s/2}(\cdot)\|_{L^p}$ tiene un grado de homogeneidad $s - n/p$ y por lo tanto, para poder escribir la estimación $\|u\|_{L^q} \lesssim \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}$ es absolutamente necesario que los grados de homogeneidad de ambas cantidades sean *iguales* lo que nos da la relación $1/p - 1/q = s/n$.

Vemos entonces que una primera opción razonable para los posibles valores del parámetro q está dada por las condiciones $1 < q < +\infty$ y $1/p - 1/q = s/n$. Observemos ahora que estas dos condiciones son mutuamente coherentes si se verifica además $0 < s < n/p$. Así, para estos valores del parámetro s esperamos poder mostrar la inyección de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ cuando $1 < q < +\infty$ y $1/p - 1/q = s/n$. Por otro lado, es natural preguntarse qué podemos decir sobre las inyecciones de Sobolev para los valores $s \geq n/p$. Veremos que para estos valores del parámetro s también podemos demostrar algunas inyecciones de Sobolev interesantes.

Una vez que el panorama está más claro, pasamos ahora a la justificaciones rigurosas de las inyecciones de Sobolev que estudiaremos aquí. Para ello distinguiremos tres posibles casos: $0 < s < n/p$, $s = n/p$ y $s > n/p$.

4.1. El caso $0 < s < n/p$.

Para estos valores del parámetro s se tiene la siguiente inclusión.

Teorema 1 *Sean $1 < p < +\infty$ y $0 < s < n/p$. Si $1 < q < +\infty$ verifica la relación $1/p - 1/q = s/n$ entonces se tiene $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Sea $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene $\big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\big)^{\vee} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definamos la función $f = \big((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\big)^{\vee}$, de donde obtenemos la identidad

$$u(x) = \left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\widehat{f}\right)^{\vee}(x) = (G_{-s} * f)(x), \tag{12}$$

y entonces podemos escribir la estimación puntual

$$|u(x)| \leq (|G_{-s}| * |f|)(x).$$

Debemos ahora estudiar la expresión $|G_{-s}(x)|$. Para ello, como se tiene $0 < s < n/p$ entonces obtenemos $-n < -s < 0$ y por lo tanto podemos usar (7) para escribir $|G_{-s}(x)| \leq c|x|^{s-n}$ si $|x| \leq 2$ y $|G_{-s}(x)| \leq ce^{-|x|/2}$ si $|x| > 2$. Pero, por la buenas propiedades de decrecimiento de la función $e^{-|x|/2}$ se tiene $e^{-|x|/2} \leq c|x|^{s-n}$ para $|x| > 2$ y entones, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos la estimación $|G_{-s}(x)| \leq c|x|^{s-n}$. De esta manera se tiene:

$$|u(x)| \leq \big(|\cdot|^{s-n}| * |f|\big)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-s}}dy.$$

El operador $I_s(f)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-s}}dy$, es conocido como *Potencial de Riesz*, ver la Definición 1 (página 2) de la Leccion N°5 del curso [1]. Tenemos entones la estimación:

$$|u(x)| \leq |I_s(f)(x)|.$$

En esta estimación, aplicamos primero la norma $\|\cdot\|_{L^p}$, y además, puesto que se tiene $1/p - 1/q = s/n$ por las desigualdades de *Hardy-Littlewod-Sobolev*, ver el Teorema 2 (página 1) de esta misma lección, podemos escribir

$$\|u\|_{L^q} \leq \|I_s(f)\|_{L^q} \leq c\|f\|_{L^p} = c\|u\|_{W^{s,p}}.$$

■

4.2. El caso $s = n/p$

Para este valor específico del parámetro s se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sean $1 < p < +\infty$ y $s = n/p$. Entonces se tiene $W^{n/p,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $p < q < +\infty$.*

Prueba. Nuestro punto de partida es la identidad (12). Es esta identidad aplicamos las desigualdades de Young (con $1 + 1/q = 1/r + 1/p$) y tenemos
$$\|u\|_{L^q} \leq c\|G_{-s}\|_{L^r}\|f\|_{L^p},$$
donde debemos verificar que se tiene $\|G_{-s}\|_{L^r} < +\infty$. En efecto, observemos primero que como se tiene $s = n/p$ entonces obtenemos $-n < -s < 0$ y podemos usar (7) para escribir
$$\|G_{-s}\|^r = \int_{\mathbb{R}^n} |G_{-s}(x)|^r dx = \int_{|x|\leq 2} |G_{-s}(x)|^r dx + \int_{|x|>2} |G_s(x)|^r dx \approx \int_{|x|\leq 2} |x|^{r(s-n)} dx + \int_{|x|>2} (e^{-|x|/2})^r dx.$$
La última integral a la derecha es siempre convergente por las buenas propiedades de decrecimiento de la función $e^{-|x|/2}$ por lo que basta estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{|x|\leq 2} |x|^{r(s-n)} dx$. Usando un cambio de coordenadas a coordenadas polares (donde $\rho = |x|$) tenemos
$$\int_{|x|\leq 2} |x|^{r(s-n)} dx = \int_0^2 \rho^{n-1}\rho^{r(s-n)} d\rho,$$
donde podemos observar que esta integral converge si y solo si se tiene $n + r(s - n) > 0$. Notemos ahora que esta relación es equivalente a la relación $r(n - s) < n$. Observemos que esta relación es equivalente a la relación $1 - s/n < 1/r$, y además, como se tiene la identidad $s = n/p$, esta última relación es a si vez equivalente a escribir $1 < 1/p + 1/r$, lo cual se verifica por la relación de las desigualdades de Young: $1 + 1/q = 1/r + 1/p$. ■

4.3. El caso $s > n/p$.

En este último caso tenemos la siguiente inyección de Sobolev.

Teorema 3 *Sean $1 < p < +\infty$ y $s > n/p$. Entonces se tiene $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. La prueba de esta inclusión es una aplicación directa de la desigualdades de Young. En efecto, notando siempre $f = ((1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{u})^\vee \in L^p(\mathbb{R},)$ escribimos
$$\|u\|_{L^\infty} = \left\|(\widehat{u})^\vee\right\|_{L^\infty} = \left\|\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}\right)^\vee\right\|_{L^\infty} = \|G_{-s} * f\|_{L^\infty}.$$
Luego, aplicando las desigualdades de Young con $1 + 1/\infty = 1 = 1/p' + 1/p$, tenemos
$$\|u\|_{L^\infty} \leq c\|G_{-s}\|_{L^{p'}}\|f\|_{L^p}.$$
Además, puesto que $s > n/p$ entonces por el ejemplo (11) tenemos además $\|G_{-s}\|_{L^{p'}} < +\infty$. ■

Referencias

[1] D. Chamorro. *Espacios de Lorentz*. Curso de la escuela de verano AMARUN, EPN (2018).

[2] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis*. Springer 250, Second Edition (2008).

[3] O. Jarrín. *Ecuaciones de Navier-Stokes estacionarias*. Curso de la escuela de verano AMARUN, EPN (2018).