Lección n°4: Demostración del criterio de Serrin.
Parte 3: Ganancia de regularidad local para la velocidad.

Escuela Politécnica Nacional 2023

1. Introducción

En esta lección vamos a estudiar como a partir de la información que hemos obtenido para la vorticidad, podemos obtener una ganancia de regularidad con respecto a la variable de la velocidad $\vec{u}$. Primero, recordemos que en la lección anterior probamos que bajo las hipótesis del criterio de Serrin, podemos demostrar que concluir la siguiente información para la vorticidad.

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, L^2(B(x,\rho)) \cap L^2(]t - \frac{\rho^2}{4}, b[, \dot{H}^1(B_\rho).$$

Veamos así como a partir de esta nueva información podemos estudiar la regularidad de la velocidad $\vec{u}$

2. Ganancia de regularidad local para la velocidad $\vec{u}$.

Fin de la demostración del Teorema 1. En primer lugar, dado que $div(\vec{u}) = 0$, tenemos la identidad siguiente

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = -\Delta\vec{u} + \vec{\nabla} div(\vec{u}) = -\Delta\vec{u},$$

y como hemos probado que la vorticidad $\vec{\omega}$ pertenece al espacio $L^\infty(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, L^2(B_\rho) \cap L^2(]0, t[, \dot{H}^1(B_\rho)$, podemos concluir fácilmente que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}$ pertenece al espacio $L^\infty(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, \dot{H}^{-1}(B_\rho) \cap L^2(]0, t[, L^2(B_\rho)$ lo cual implica por la igualdad precedente que

$$\Delta\vec{u} \in L^\infty(]t - \frac{\rho^2}{4}, t[, \dot{H}^{-1}(B_\rho) \cap L^2(]0, t[, L^2(B_\rho). \tag{1}$$

Así, hemos obtenido información local sobre el Laplaciano de $\vec{u}$, es decir para cierta función ϕ tenemos $\phi\Delta\vec{u}(t, \cdot) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ y $\phi\Delta\vec{u}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, sin embargo, el objetivo es obtener la regularidad unicamente para la velocidad $\vec{u}$ sin el laplaciano.

Para ello, consideramos $\Phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ una función regular tal que tenemos $supp(\Phi) \subset B_\rho$ y tal que $\Phi = 1$ en $B_{\frac{\rho}{2}}$ con $0 < \rho < r$.

Razonando componente por componente, remarcamos que tenemos para todo $1 \leq i \leq 3$ las identidades siguientes

$$\Delta(\Phi u_i) = \Phi\Delta u_i - (\Delta\Phi)u_i + 2div(\vec{\nabla}\Phi u_i),$$

y dado que los términos son definidos sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$, podemos aplicar el operador $(-\Delta)^{-1}$ para obtener

$$\Phi u_i = -\frac{\Phi\Delta u_i}{(-\Delta)} + \frac{(\Delta\Phi)u_i}{(-\Delta)} + 2\frac{div(\vec{\nabla}\Phi u_i)}{(-\Delta)}. \tag{2}$$

Así, gracias a la efectos de la función Φ, en los siguientes puntos vamos a probar que es posible mostrar que cada uno de los términos precedentes pertenece al espacio $L^\infty(]0, t[, L^2(B(x,\rho)) \cap L^2(]0, t[, \dot{H}^1(B_\rho)$.

- Para el primer término de (2), usando las informaciones dada en (1) y por el soporte de la función Φ, podemos concluir que $\Phi\Delta u_i \in L^\infty(]0, t[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ y que $\Phi\Delta u_i \in L^2(]0, t[, L^2(\mathbb{R}^3))$. Luego, aplicando el operador $(-\Delta)^{-1}$ se sigue que

$$\left\|\frac{\Phi\Delta u_i}{(-\Delta)}\right\|_{L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \simeq \|\Phi\Delta u_i\|_{L^\infty(]0,t[,\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))} < +\infty \quad \text{y}$$

$$\left\|\frac{\Phi\Delta u_i}{(-\Delta)}\right\|_{L^2(]0,t[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))} \simeq \|\Phi\Delta u_i\|_{L^2(]0,t[,L^2(\mathbb{R}^3))} < +\infty,$$

entonces tenemos que $\frac{\Phi\Delta u_i}{(-\Delta)} \in L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,t[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

- Para el segundo termino de (2), usando la hipótesis $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, y las propiedades de la función Φ podemos deducir fácilmente que $(\Delta\Phi)u_i \in L^\infty(]0,t[,L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. Entonces, aplicando el operador $(-\Delta)^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(\Delta\Phi)u_i}{(-\Delta)}\right\|_{L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} &\leq \|(\Delta\Phi)u_i\|_{L^\infty(]0,t[,\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))} < +\infty \quad \text{y}\\ \left\|\frac{(\Delta\Phi)u_i}{(-\Delta)}\right\|_{L^2(]0,t[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))} &\leq \|(\Delta\Phi)u_i\|_{L^2(]0,t[,L^2(\mathbb{R}^3))} < +\infty,\end{aligned}$$

- Para el ultimo termino de (2), tenemos que

$$\left\|\frac{div(\vec{\nabla}\Phi u_i)(t,\cdot)}{(-\Delta)}\right\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)} \leq \left\|\frac{\vec{\nabla}\Phi u_i(t,\cdot)}{(-\Delta)}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

de manera que podemos ver que $\dfrac{div(\vec{\nabla}\Phi u_i)}{(-\Delta)} \in L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, dado que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r)$. Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{div(\vec{\nabla}\Phi u_i)u_i(t,\cdot)}{(-\Delta)}\right\|_{\dot{H}^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \left\|div(\vec{\nabla}\Phi u_i)u_i(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\ &\leq \|(\partial_{x_i}\Phi)(\partial_{x_i}u_i)(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial^2_{x_i}\Phi)u_i(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (3)\\ &\leq C\|u_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1((B_\rho))} + \|\partial^2_{x_i}\Phi\|_{L^\infty(B(x,\rho))}\|u_i(t,\cdot)\|_{L^2(B(x,\rho))}.\end{aligned}$$

de lo que se puede concluir fácilmente que, $\frac{div(\vec{\nabla}\Phi u_i)}{(-\Delta)} \in L^2(]0,t[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Por todos los cálculos realizados se sigue que

$$\Phi u_i \in L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,t[,\dot{H}^2(\mathbb{R}^3)),$$

lo que nos permite concluir por las propiedades de la función Φ que

$$\vec{u} \in L^\infty(]0,t[,\dot{H}^1(B(x_0,\rho'))) \cap L^2(]0,t[,\dot{H}^2((B(x_0,\rho'))),$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

El criterio de regularidad que acabamos de probar, en realidad nos permite introducir la siguiente noción de puntos singulares:

Definición 1 (Puntos regulares) *Diremos que un punto* $(t_0,x_0) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ *es un* punto regular *para la velocidad* $\vec{u}$ *si existe una vecindad* $]t-r^2,t[\times B(x_0,r)$ $0<r<+\infty$ *tal que tenemos la siguiente información*

$$\vec{u} \in L^\infty(]t-r^2,t[,L^\infty B(x_0,r)).$$

Similarmente, diremos que un punto es singular, si no es un punto regular.

Observemos que en el caso que la fuerza exterior sea aún más regular que $L^2_t L^2_x$, podemos inyectar esta información a la velocidad, en efecto tenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.1 *Si la fuerza* $\vec{f}$ *verifica que*

$$\vec{f} \in L^2(]t-r^2,t[,H^k(B(x,r))),$$

con $k \geq 1$, *y si* $\vec{u} \in L^\infty(]t-r^2,t[,L^\infty(B(x,r)))$, *entonces tenemos que*

$$\vec{u} \in L^\infty(]\alpha,t[,H^{k+1}(B_\rho)) \cap L^2(]\alpha,t[,H^{k+2}(B_\rho)),$$

para todo $0 < t-\rho^2 \leq \alpha < t$ *y* $0 < \rho < r$.

3. Regularidad respecto a la variable temporal: el contraejemplo de Serrin

En la teoría que acabo de demostrar, bajo las hipótesis de acotación de la velocidad $\vec{u}$ hemos logrado demostrar que la solución es **regular unicamente en la variable espacial**, en efecto respecto a la regularidad respecto a la variable temporal, los espacios que miden esta información L^∞ y L^2 son los mismos

Así, en esta sección veremos como este problema en realidad está ligado a la información que tenemos sobre la presión. En efecto recordemos que bajo las hipótesis del criterio de Serrin tenemos las siguientes hipótesis:

- $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ con $\Omega =]a, b[\times B(x_0, r)$ y $0 < a < b < +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $0 < r < +\infty$,

- la presión verifica $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

- la fuerza exterior $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$,

- la pareja $(\vec{u}, p)$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier Soktes sobre Ω,

- y tenemos la condición adicional $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)$.

Se tiene que bajo estas hipótesis podemos construir una solución $(\vec{u}, p)$ que verifica dichas condiciones, más sin embargo la regularidad respecto a la variable temporal esta ligada a la información que tenemos sobre la presión, la cual en principio es simplemente una distribución.

En efecto, sean $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica ($\Delta\psi = 0$) y $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Consideremos la función $\vec{u}$ considerando

$$\vec{u}(t, x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x), \quad \text{sobre }]1, 2[\times B(0, 1).$$

Por construcción tenemos que:

- la función $\vec{u}$ es acotada sobre $\Omega =]1, 2[\times B(0, 1)$ y ella pertenece al espacio $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$,

- la divergencia de $\vec{u}$ es cero dado que $div(\vec{u}(t, x)) = \alpha(t)div(\vec{\nabla}\psi(x)) = \alpha(t)\Delta\psi(x) = 0$,

- el rotacional de $\vec{u}$ es cero igualmente, pues $\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t, x) = \alpha(t)\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\psi(x)) = 0$,

- se tiene que $\vec{u}$ es armónica, ya que $\Delta\vec{u}(t, x) = \alpha(t)\Delta(\vec{\nabla}\psi(x)) = \alpha(t)\vec{\nabla}(\Delta\psi(x)) = 0$.

Usando las propiedades mencionadas anteriormente, se tiene ademas que

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}|^2 = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}|^2.$$

Entonces, dado que $\vec{u}$ es solución de las ecuaciones de Navier-Stokes sobre Ω sin fuerza exterior ($\vec{f} = 0$), podemos ver que el sistema de ecuaciones

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \qquad div(\vec{u}) = 0,$$

es equivalente a

$$\partial_t\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}|^2 - \vec{\nabla}p, \qquad div(\vec{u}) = 0.$$

Luego, utilizando la definición $\vec{u}(t,x)=\alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_t\Big(\alpha(t)\ \vec{\nabla}\psi(x)\Big) &= -\frac{1}{2}\vec{\nabla}|\alpha(t)\ \vec{\nabla}\psi(x)|^2-\vec{\nabla}p(t,x)\\
\frac{d\alpha(t)}{dt}\vec{\nabla}\psi(x) &= -\frac{\alpha(t)^2}{2}\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\psi(x)|^2-\vec{\nabla}p(t,x),
\end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la ecuación

$$\vec{\nabla}p(t,x)=-\frac{d\alpha(t)}{dt}\vec{\nabla}\psi(x)-\frac{\alpha(t)^2}{2}\vec{\nabla}|\vec{\nabla}\psi(x)|^2=\vec{\nabla}\left(-\frac{d\alpha(t)}{dt}\psi(x)-\frac{\alpha(t)^2}{2}|\vec{\nabla}\psi(x)|^2\right),$$

de lo cual se sigue, la relation

$$p(t,x)=-\frac{d\alpha(t)}{dt}\psi(x)-\frac{\alpha(t)^2}{2}|\vec{\nabla}\psi(x)|^2.$$

Se observa claramente que la regularidad de la variable de tiempo de la función $\vec{u}(t,x)$, por contrucción a la información de la función α y su derivada $\frac{d}{dt}\alpha$ esta directamente relacionada a la presión p. Entonces, en el caso que la presión sea un objetado completamente genérico, no podemos obtener ifnrmacion sobre la funcion $\frac{d}{dt}\alpha$ dado que el termino$-\frac{\alpha(t)^2}{2}|\vec{\nabla}\psi(x)|^2$ pertenece a un espacio más regular. Dicho de otra manera, en el caso que la presión sea una distribución, la función $\frac{d}{dt}\alpha$ es igualmente una distribución.