Lección n°2: Demostración del criterio de Serrin. Escuela Politécnica
Parte 1: La ecuación de la vorticidad. Nacional 2023

1. Introducción

Recordemos que en la lección anterior hemos introducido el criterio de regularidad local de Serrin para las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual recordemos en el siguiente teorema:

Teorema 1.1 *Sea $(\vec{u}, p)$ una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes con una fuerza exterior $\vec{f}$ en Q_r, tal que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r(t,x)) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_r(t,x))$, $p \in \mathcal{D}'(Q_r(t,x))$ y $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(Q_r(t,x))$. Si tenemos que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q_r)$, entonces para todo $0 < \rho < r$ tenemos*

$$\vec{u} \in L^\infty\big(]t-\rho^2, t[, \dot{H}^1(B(x_0,\rho))\big) \cap L^2\big(]t-\rho^2, t[, \dot{H}^2(B(x_0,\rho))\big).$$

Hablemos primero de la estrategia a seguir para demostrar este teorema. La idea consiste en utilizar ciertas estimaciones de la ecuación del calor, con el objetivo de obtener una ganancia de regularidad de la solución. Sin embargo, notemos que dado que no tenemos, a priori, ningún control sobre la presión asociada p la cual en principio es solo una distribución, vamos a buscar una manera de deshacernos de este termino. Para ello, la idea comun es estudiar la vorticitad de la velocidad para lo cual necesitas recordar ciertas herramientas basicas

2. El rotacional de un campo vectorial

Sea $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Recordemos que el rotacional de $\vec{f}$ está dado por

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}$$

Enunciemos ciertas propiedades importantes sobre el rotacional:

- Para $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tenemos que
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{\nabla}(div(\vec{f})) - \Delta \vec{f}.$$
y ademas
$$div(\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0.$$
- Si $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función a valores reales, entonces $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\phi = 0$

En efecto esta ultima propiedad, es la principal motivación para estudiar la vorticidad dado que nos permite deshacernos del termino de la presión en las ecuaciones de Navier-Stokes.

3. Definición y propiedades de la vorticidad $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$.

Recordemos que estamos interesados en deducir la regularidad de las ecuaciones de Navier-Stokes a partir de la hipotesis que la velocidad sea acotada. Sin embargo, recordemos que no poseemos ninguna información adicional sobre la presión, la cual en principio es simplemente una distribución. Sin embargo si tomamos el rotacional a la ecuación relacionada con $\vec{u}$, tenemos que

$$\vec{\nabla} \wedge (\partial_t \vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge (\Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}) = \vec{\nabla} \wedge (\Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f})$$

dado que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p = 0$. Así, podemos deshacernos del termino de la presión. Lo cual nos lleva a estudiar las propiedades del rotacional de la velocidad.

Definición 1 (Vorticidad) *Si $\vec{u}$ es la velocidad del fluido en las ecuaciones de Navier-Stokes definimos la variable $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ como la* vorticidad *del fluido.*

Por otro lado, observemos que dado que $div(\vec{u}) = 0$, tenemos tiene la siguiente relación

$$-\Delta \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}. \tag{1}$$

Así, usando las propiedades del operador Laplaciano, vamos a poder deducir información sobre $\vec{u}$. Veamos primero sin embargo que la información actual que posemos sobre $\vec{\omega}$ no es suficiente para obtener una ganancia de información sobre $\vec{u}$. En efecto, si $(\vec{u}, p)$ es una solución debil de las ecuaciones de Navier-Stokes, tenemos las siguientes informaciones sobre $\vec{\omega}$:

Proposición 3.1 *Si $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_1) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_1)$, entonces para todo $0 < r < 1$, tenemos que*

$$\vec{\omega} \in L^\infty_t \dot{H}^{-1}_x([t-r,t] \times B_r) \cap L^2_t L^2_x([t-,t] \times B_r). \tag{2}$$

Este resultado demuestra la idea intuitiva que al aplicar el rotacional, estamos perdiendo una derivada. Además, al trabajar en el sentido local, perdemos a su vez, información en el dominio, con respecto a la variable espacial. Esta perdida , sin embargo no tiene una importancia relevante en esta teoría.

Prueba. Está claro que la información en tiempo en L^∞_t y L^2_x es la misma para $\vec{u}$ y $\vec{\omega}$, así pues es suficiente trabajar el caso de la variable de espacio. Sea $\phi_r \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$, $r > 0$, tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } B(x_0, 1-r), \\ \\ 0 & \text{en } \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \geq r\}. \end{cases}$$

Se sigue que $supp(\phi_r) \subset B(x_0, r)$.

Así dado que buscamos mostrar que $\vec{\omega} \in \dot{H}^{-1}(B(x_0, 1-r))$, utilizando la definición de los espacios de Sobolev locales, debemos mostrar que $\phi_r \vec{\omega} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Dado que

$$\phi \vec{\omega} = \phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \begin{bmatrix} \phi \partial_{x_2} u_3 - \phi \partial_{x_3} u_2 \\ \\ \phi \partial_{x_3} u_1 - \phi \partial_{x_1} u_3 \\ \\ \phi \partial_{x_1} u_2 - \phi \partial_{x_2} u_1 \end{bmatrix},$$

es suficiente estudiar para todo $1 \leq i, j \leq 3$ que $\phi \partial_{x_i} u_j \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Así, utilizando la igualdad

$$\phi \partial_{x_i} u_j = \partial_{x_i}(\phi u_j) - (\partial_{x_i} \phi) u_j,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|\phi \partial_{x_i} u_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\partial_{x_i}(\phi u_j)(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi) u_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|\phi u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C\|(\partial_{x_i}\phi) u_j(t,\cdot)\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las propiedades de los espacios de Sobolev, en particular la inclusión $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Luego, utilizando el soporte de la función tes ϕ tenemos por las desigualdades de Hölder $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ que

$$\begin{aligned} \|\phi \partial_{x_i} u_j(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)} &\leq C\|\phi\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} \\ &\quad + C\|\partial_{x_i}\phi\|_{L^3(B(x_0,r))} \|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} \\ &\leq C_\phi \|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} < +\infty, \end{aligned} \tag{3}$$

lo que nos permite concluir que $\vec{\omega}(t,\cdot) \in \dot{H}^{-1}_x(B(x_0, 1-r))$, y tomando la norma L^∞ en tiempo, se tiene que

$$\vec{\omega} \in L^\infty(]-1, 1[, \dot{H}^{-1}(B(x_0, 1-r))).$$

Estudiemos ahora el hecho que $\vec{\omega}$ pertenece al espacio $L^2(B(x_0, r-\varepsilon))$. Esto conlleva a estudiar si tenemos que $\phi\partial_{x_i}u_j \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Usando la identidad $\phi\partial_{x_i}u_j = \partial_{x_i}(\phi u_j) - (\partial_{x_i}\phi)u_j$ podemos escribir

$$\|\phi\partial_{x_i}u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\partial_{x_i}(\phi u_j)(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi)u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Si consideramos ahora una función positiva $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $supp(\eta) \subset B(x_0, r+\varepsilon)$ y $\eta = 1$ sobre $B(x_0, r)$, entonces tenemos que $\phi\eta u_i = \phi u_i$ y podemos escribir

$$\|\phi\partial_{x_i}u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|\partial_{x_i}(\phi\eta u_j)(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi)u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Usando las propiedades del soporte de la función ϕ y η, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi\partial_{x_i}u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\phi\partial_{x_i}(\eta u_j)(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|(\partial_{x_i}\phi)\eta u_j(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\quad + \|\partial_{x_i}\phi\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2((B(x_0,r)))} \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\|\partial_{x_i}(\eta u_j)(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\quad + \|\partial_{x_i}\phi\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\|\eta\|_{L^\infty(B(x_0,r+\varepsilon))}\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} \\
&\quad + \|\partial_{x_i}\phi\|_{L^\infty(B(x_0,r))}\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2((B(x_0,r)))} \\
&\leq C_\phi\|u_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(x_0,r))} + C_{\phi,\eta}\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} + C_\phi\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))} \\
&\leq C\|u_i(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1(B(x_0,r))} + C\|u_j(t,\cdot)\|_{L^2(B(x_0,r))}.
\end{aligned}$$

■

4. Ecuación para la vorticidad $\vec{\omega}$.

Como vimos anteriormente, buscamos obtener información para la vorticidad $\vec{\omega}$, para posteriormente utilisando la ecuacion (1), obtener una ganancia de información para $\vec{u}$. Para ellos vamos a estudiar la dinámica de $\vec{\omega}$, es decir, en efecto si aplicamos el rotacional a las ecuaciones de Navier-Stokes, se sigue que

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge (\partial_t \vec{u}) &= \vec{\nabla} \wedge \left(\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}\right) \\
\partial_t\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right) &= \Delta\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right) - \vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) - \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\wedge\vec{f},
\end{aligned}$$

Recordemos que $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}p = 0$ y si notamos $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}$, entonces tenemos la siguiente ecuación para la vorticidad

$$\partial_t\vec{\omega} = \Delta\vec{\omega} - \vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) + \vec{\nabla}\wedge\vec{f}, \tag{4}$$

Nuestro objetivo ahora consiste en reescribir el término $\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right)$, para lo cual tenemos el siguiente lema.

Lema 1 *Si $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2\dot{H}_x^1$ con $div(\vec{u}) = 0$ tal que $div(\vec{\omega}) = 0$, entonces tenemos la identidad*

$$\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = div(\vec{u}\otimes\vec{\omega} - \vec{\omega}\otimes\vec{u}).$$

donde $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u}$.

Prueba. En primer lugar, podemos reescribir el termino no-lineal de la siguiente manera

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = (\vec{\nabla}\wedge\vec{u})\wedge\vec{u} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} = \vec{\omega}\wedge\vec{u} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2},$$

así, aplicando el rotacional, obtenemos que

$$\vec{\nabla}\wedge\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{u} + \vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u}) + \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\frac{|\vec{u}|^2}{2} = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{u}),$$

dado que el rotacional del gradiente es siempre cero. Luego, utilizando el hecho que la vorticidad y la velocidad son de divergencia nula, se tiene que

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) &= \vec{\nabla} \wedge \begin{bmatrix} w_2u_3 - w_3u_2 \\ w_3u_1 - w_1u_3 \\ w_1u_2 - w_2u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_2}[w_1u_2 - w_2u_1] - \partial_{x_3}[w_3u_1 - w_1u_3] \\ \partial_{x_3}[w_2u_3 - w_3u_2] - \partial_{x_1}[w_1u_2 - w_2u_1] \\ \partial_{x_1}[w_3u_1 - w_1u_3] - \partial_{x_2}[w_2u_3 - w_3u_2] \end{bmatrix} \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = div(\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}),
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ∎

Así, por el lema precedente, obtenemos la siguiente ecuación para la vorticidad (4).

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} - div(\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}.$$

La ventaja de esta ecuación reside en el hecho que podemos verla como una ecuación del calor lineal con respecto a la vorticidad. En efecto si definimos

$$\vec{g} = -div(\vec{u} \otimes \vec{\omega} - \vec{\omega} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \tag{5}$$

tenemos simplemente que

$$\partial_t \vec{\omega} = \Delta \vec{\omega} + \vec{g}. \tag{6}$$

Con está ecuación a la mano, nuestro objetivo es aplicar la regularidad de la ecuación del calor, con el objetivo de mejorar la información para la vorticidad. En efecto, recordemos el siguiente resultado para la ecuación del calor

Proposición 4.1 *Sea $v : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que verifica la ecuación del calor siguiente*

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) = \Delta v(t, x) + f(t, x), \\ v(0, x) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

donde $f : [0, T[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una fuerza exterior tal que $f \in L^2([0, T[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ con $0 < T < +\infty$. Entonces tenemos que

$$\|v\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x} \quad \text{y} \quad \|v\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\|f\|_{L^2_t \dot{H}^{-1}_x}.$$

Así, en la siguiente lección veremos como podemos aplicar la proposición precedente, con el fin de obtener una ganancia de información sobre la vorticidad de $\vec{u}$.