**<u>Lección n°1</u>: Introducción**

En biología, el estudio del movimiento y la distribución de moléculas, células u organismos en un entorno sin características específicas revela patrones interesantes. A nivel individual, el movimiento puede deberse a procesos mecanicoquímicos como contracciones musculares o corrientes ameboides[1]. En cambio, a nivel poblacional, otros factores cobran mayor importancia, como las variaciones del entorno, la densidad de población y el grado de hacinamiento, y el movimiento del fluido o aire en el que los organismos viven.

Para describir estos fenómenos en el nivel colectivo, es común asumir que la población se comporta como un *continuo*, representando así organismos discretos mediante distribuciones continuas de densidad. Este enfoque permite el uso de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales parciales (PDEs), similares a los modelos clásicos de difusión molecular, convección o atracción.

En los años 50 surgieron avances, entre ellos el trabajo de A. M. Turing quien desarrolló teorías sobre la formación de patrones morfogenéticos mediante ecuaciones de reacción–difusión. En ese mismo período J. G. Skellam (1951) aplicó la ecuación de difusión al modelado de dispersión aleatoria. Estos desarrollos se consolidaron con estudios de Gurtin y MacCamy (1977) quienes profundizaron en la modelización continua del movimiento poblacional, y de autores como Okubo y Levin que incorporaron aspectos más realistas como difusión anisotrópica y dispersión estratificada. En conjunto, estos avances constituyen una base fundamental para modelos contemporáneos en biología molecular, celular y poblacional, incluyendo dinámica de tejidos, propagación de epidemias y ecología del paisaje.

Dentro de algunos modelos biológicos formulados con ecuaciones en derivadas parciales, especialmente cuando una región ocupada por células, organismos o tejido crece, invade o se retrae, no basta con describir la difusión del objeto en cuestión. Resulta también esencial considerar la dinámica de la frontera libre que delimita dicha región en evolución espacial.

Esta clase de fenómenos se modela mediante problemas de Stefan, clásicos en física de solidificación hoy extendidos a la biología matemática y a otras ciencias de difusión con frontera libre ( véase [1], [4], y [7] ). En este curso, estudiaremos uno de los ejemplos más simples que modelan un un problema de frontera libre de la ecuación del calor: el problema de Stefan unifasico unidimensional. El cual esta definido por un dominio dependiente del tiempo

$$D_T = \{(x,t) \mid 0 < x < s(t), \quad 0 < t \leq T\},$$

y cuya frontera es denotada como

$$B_T = \{(0,t) \mid \ 0 < t \leq T\} \cup \{(x,t) \mid x = s(t),\ 0 < t \leq T\} \cup \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq b\}, \quad b = s(0).$$

Sea $u = u(x,t)$ la variable interna, por ejemplo densidad, concentración o temperatura efectiva. A continuación, consideramos la siguiente ecuación de difusión:

$$\begin{aligned} \partial_t u = \partial_{xx} u, \quad 0 < x < s(t), \qquad & 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = f(t) \geq 0, \qquad & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = \varphi(x) \geq 0, \qquad & 0 \leq x \leq b = s(0), \\ u(s(t),t) = 0, \quad & 0 < t \leq T, \end{aligned} \tag{1}$$

cuya relación entre $u$ y $s$ está dado por la siguiente expressión

$$\dot{s}(t) = -\partial_x u(s(t),t), \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(condición de Stefan)} \tag{2}$$

Previo a empezar a estudiar dicho problema, presentaremos brevemente algunas nociones y resultados básicos de las EDPs parabólicas.

[1]Movimiento por arrastre más común en las células eucariotas (e.g. amebas), que consiste en la formación de una protuberancia en el citoplasma que facilita el desplazamiento.

# 1. Introducción a la ecuación del calor

La ecuación del calor, también conocida como ecuación de difusión, describe cómo evoluciona la temperatura en un medio con el tiempo. Esta ecuación fue deducida inicialmente por Joseph Fourier [6] en el contexto de la conducción térmica en sólidos, y representa uno de los modelos fundamentales de la física matemática. Su utilidad trasciende el calor: modela fenómenos de transporte de masa, difusión de sustancias, o incluso movimiento browniano.

Con el objetivo de derivar un modelo matemático para la conducción de calor en cuerpos sólidos, consideremos un cuerpo homogéneo e isótropo, con densidad de masa constante $\rho$, que recibe energía a través de una fuente externa distribuida. Denotamos por $r(x,t)$ la tasa temporal (por unidad de masa) con la que esta fuente suministra calor.

Aplicamos el principio de conservación de la energía a un volumen de control arbitrario $V$ dentro del cuerpo. Este principio establece que la tasa de variación temporal de la energía térmica dentro de $V$ es igual al flujo neto de calor que atraviesa su frontera $\partial V$, sumado a la energía suministrada por las fuentes internas. Si $e(x,t)$ representa la energía térmica por unidad de masa, entonces la energía total contenida en $V$ es:

$$\int_V e\rho\, dx,$$

y su derivada temporal es [2]:

$$\frac{d}{dt}\int_V e\rho\, dx = \int_V \rho\, \partial_t e\, dx.$$

Por otro lado, denotamos por $\vec{q}$ al vector de flujo de calor, el cual indica la dirección y magnitud del flujo térmico a través de una unidad de área. Usando el teorema de la divergencia, el flujo neto que atraviesa $\partial V$ es:

$$-\int_{\partial V} \vec{q}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = -\int_V \nabla\cdot\vec{q}\, dx.$$

La energía suministrada por las fuentes internas es:

$$\int_V r\rho\, dx.$$

Por tanto, la conservación de la energía conduce a:

$$\int_V \rho\, \partial_t e\, dx = -\int_V \nabla\cdot\vec{q}\, dx + \int_V r\rho\, dx,$$

lo cual, debido a la arbitrariedad de $V$, implica la ecuación puntual:

$$\rho\, \partial_t e = -\nabla\cdot\vec{q} + \rho r.$$

Para cerrar el modelo, necesitamos relaciones constitutivas que expresen $e$ y $\vec{q}$ en términos de la temperatura absoluta $u(x,t)$:

- Ley de Fourier: el flujo de calor es proporcional al gradiente negativo de la temperatura:

  $$\vec{q} = -\kappa\nabla u,$$

  donde $\kappa > 0$ es la conductividad térmica.

- Relación lineal entre energía térmica y temperatura:

  $$e = c_v u,$$

  siendo $c_v$ el calor específico a volumen constante.

[2] Asumiendo que es posible que la derivada pueda ingresar dentro de la integral.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de conservación:

$$\rho c_v \, \partial_t u = \kappa \Delta u + \rho r.$$

Dividiendo ambos lados por $\rho c_v$, se obtiene la ecuación de difusión:

$$\partial_t u = D\Delta u + f,$$

donde $D = \frac{\kappa}{\rho c_v}$ es la difusividad térmica, y $f = \frac{r}{c_v}$ representa la fuente externa normalizada.

Para que este modelo tenga sentido físico y matemático, debe ser complementado con condiciones iniciales y de frontera adecuadas que permitan determinar una solución única que dependa continuamente de los datos. Se dice entonces que el problema es bien definido ( *well posed* en inglés).

Consideremos una barra cilíndrica con sección transversal constante y superficie lateral perfectamente aislada. La longitud de la barra es $L$ y suponemos que la temperatura sólo varía en la dirección longitudinal $x \in [0, L]$. Bajo estas condiciones, el modelo se reduce a la ecuación del calor en una dimensión. Para estudiar su evolución temporal, es necesario especificar:

- La condición inicial:

  $$u(x, 0) = g(x),$$

  donde $g(x)$ representa la distribución inicial de temperatura en la barra.

- Condiciones de frontera en los extremos $x = 0$ y $x = L$, que pueden adoptar diferentes formas:

  - **Condiciones de Dirichlet** (temperatura prescrita):

    $$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t).$$

  - **Condiciones de Neumann** (flujo de calor prescrito):

    $$-\partial_x u(0, t) = h_1(t), \quad \partial_x u(L, t) = h_2(t),$$

    lo que equivale a imponer un flujo de calor hacia el interior en los extremos, según la ley de Fourier.

  - **Condiciones de Robin** (intercambio con el ambiente):

    $$\partial_x u + \alpha u = h,$$

    que modela el caso en el que el flujo de calor depende linealmente de la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del entorno. Este tipo de condición se deduce a partir de la ley de enfriamiento de Newton.

El problema completo consiste entonces en determinar la función $u(x, t)$ tal que:

$$\begin{cases} \partial_t u - D\partial_{xx} u = f(x, t), & 0 < x < L, \; 0 < t < T, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \text{condiciones de frontera}, & 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Las diferentes combinaciones de condiciones en los extremos definen distintos tipos de problemas: inicial-Dirichlet, inicial-Neumann, mixtos, etc. Si las funciones $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son nulas, se dice que las condiciones de frontera son homogéneas.

Este planteamiento proporciona un marco general que permite analizar la evolución térmica en sistemas cerrados o abiertos, y servirá como punto de partida para estudiar problemas más complejos como los que involucran cambios de fase y fronteras móviles.

## 2. Resultados preliminares

Consideremos ahora una serie de resultados fundamentales que utilizaremos a lo largo del análisis del problema de Stefan. Para una demostración de estos teoremas véase, por ejemplo, [2], [5].

Empecemos con un resultado clasico que no permitira demostrar convergencia uniforme de una sucesión de funciones que son uniformemente acotadas y equicontinuas.

**Teorema 1 (Arzelà–Ascoli)** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un intervalo compacto $[a,b]$ tal que:*

1. *$\{f_n\}$ está uniformemente acotada.*
2. *$\{f_n\}$ es equicontínua.*

*Entonces existe una subsecuencia $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en $[a,b]$.*

Consideremos ahora, el siguiente resultado útil, pues permite intercambiar el limite con la integral sin necesidad de abordar hipotesis propios de la convergencia uniforme.

**Teorema 2 (Teorema de convergencia dominada)** *Si $f_n(x,t) \to f(x,t)$ puntualmente en $\mathbb{R}^2_+$ y existe $g \geq 0$, integrable en $\mathbb{R}^2_+$, con $|f_n| \leq g$ para todo $n$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbb{R}^2_+} f_n(x,t)\,dx\,dt = \iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x,t)\,dx\,dt.$$

Como consecuencia del Teorema 2 son los dos resultados siguientes:

**Teorema 3** *Supongamos que $F = F(x,t)$ está definida en $[a,b]\times[\alpha,\beta]$, y que para cada $t \in [\alpha,\beta]$, la función $F(x,t)$ es integrable respecto a $x$, y para cada $x \in [a,b]$, la función $F(x,t)$ es continua en $t$ sobre $[\alpha,\beta]$. Supongamos además que, para todo $t \in [\alpha,\beta]$, se cumple*

$$|F(x,t)| \leq h(x)$$

*para alguna función integrable no negativa $h(x)$. Entonces, la función*

$$H(t) = \int_a^b F(x,t)\,dx$$

*es continua en $[\alpha,\beta]$.*

**Teorema 4 (Regla de Leibniz)** *Supongamos que $F = F(x,t)$ está definida en $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ tal que, para cada $t \in [\alpha,\beta]$, $F(x,t)$ es integrable como función de $x$, y que para cada $x$ existe la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)$, la cual es continua. Supongamos además que existe una función no negativa e integrable $g(x)$ en $[a,b]$ tal que, para todo $t \in [\alpha,\beta]$,*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\right| \;\leq\; g(x).$$

*Entonces la función*

$$G(t) \;=\; \int_a^b F(x,t)\,dx$$

*es diferenciable en $[\alpha,\beta]$ y satisface*

$$G'(t) \;=\; \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dx,$$

*para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Además se tiene que para*

$$G(t) = \int_a^{\varphi(t)} F(x,t)dx$$

*se obtiene*

$$G'(t) = F(\varphi(t),t)\varphi'(t) + \int_a^{\varphi(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx.$$

*Gracias a este resultado obtenemos fórmulas explícitas para derivadas de soluciones expresadas como integrales parametrizadas.*

Como otra herramienta importante para este curso, se tiene el teorema de Fubini que nos permitira intercambiar el orden de integración.

**Teorema 5 (Fubini)** *Sea $f = f(x,y)$ una función integrable en el rectángulo $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. Si una de las siguientes integrales existe, entonces las otras dos también existen y se cumple:*

$$\int_D \int f\,dx\,dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Finalmente, recordemos la siguientes herramientas que nos permitiran demostrar propiedades tales como la no-negatividad y unicidad de la solución de la ecuación del difusión.

**Teorema 6 (Principio del máximo)** *Sea $u$ solución de la ecuación del calor $\partial_t u = \partial_{xx} u$ en un dominio acotado $D_T$, y supongamos que $u$ es continua en $D_T \cup B_T$. Entonces,*

$$\max_{D_T \cup B_T} u = \max_{B_T} u.$$

**Teorema 7 (Comparación)** *Si $u$ y $v$ son soluciones de $\partial_t u = \partial_{xx} u$ en $D_T$, piezas continuas en $D_T \cup B_T$ con a lo sumo un número finito de discontinuidades acotadas, y $u \leq v$ en $B_T$ salvo en las discontinuidades, entonces $u \leq v$ en todo $D_T$.*

**Teorema 8 (Unicidad)** *Bajo las mismas hipótesis anteriores, si $u = v$ en $B_T$ salvo en un conjunto finito de discontinuidades, entonces $u \equiv v$ en $D_T$.*

**Teorema 9 (Principio del máximo fuerte)** *Si $u$ satisface la ecuación del calor en $D_T$ y es continua en $D_T \cup B_T$, entonces, para cada $t$ con $0 < t \leq T$, se cumple una de las siguientes:*

$$\inf_{B_t} u < u(x,t) < \sup_{B_t} u, \quad (x,t) \in D_T, \tag{3}$$

*o bien,*

$$u \equiv \text{constante en } D_t \cup B_t. \tag{4}$$

*Aquí se asume, por conveniencia, que $\{\tau\} \cap D_T$ posee una única componente conexa.*

## 3. Problema de valor inicial: existencia y unicidad

Consideramos el problema de valor inicial asociado a la ecuación del calor en una dimensión:

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5}$$

donde $f(x)$ es una función dada. El objetivo es estudiar la existencia de solución, su unicidad y su comportamiento cuando $t \to 0^+$.

La solución formal se obtiene aplicando la transformada de Fourier en la variable espacial, lo cual convierte la ecuación en una ODE en el tiempo para cada frecuencia. Resolviendo y aplicando la transformada inversa se obtiene una representacion de la solución.

Sea

$$\hat{u}(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,t)\, \exp\{-i\alpha\xi\}\, d\xi \tag{6}$$

luego,

$$-\alpha^2 \hat{u}(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{xx} u(x,t)\, \exp\{-i\alpha x\}\, dx \tag{7}$$

y podemos convertir (5) en el problema de valor inicial

$$\hat{u}_t = -\alpha^2 \hat{u}, \quad 0 < t, \quad \hat{u}(\alpha,0) = \hat{f}(\alpha). \tag{8}$$

Integrando (8), obtenemos

$$\hat{u}(\alpha,t) = \hat{f}(\alpha)\, \exp\{-\alpha^2 t\} \tag{9}$$

Aplicando la transformada inversa, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\, i\alpha x - \alpha^2 t\}\, \hat{f}(\alpha)\, d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\, i\alpha x - \alpha^2 t\} \Big( \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \exp\{-i\alpha\xi\}\, d\xi \Big)\, d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \Big\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\, i\alpha(x-\xi) - \alpha^2 t\}\, d\alpha \Big\}\, d\xi \end{aligned} \tag{10}$$

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\alpha(x-\xi) - \alpha^2 t\}\, d\alpha = K(x-\xi,t) \tag{11}$$

donde la solución fundamental del calor (también conocido como el núcleo del calor) esta definida como

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\{-\tfrac{x^2}{4t}\}, \quad t > 0. \tag{12}$$

Notemos ademas que $K(x,t)$ satisface $K_t = K_{xx}$. Por lo tanto, llegamos a una representación formal de la solución del problema (5), definida en términos de la solución fundamental

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi, \quad t > 0. \tag{13}$$

La solución fundamental satisface las siguientes propiedades (para una demostración, véase, por ejemplo, [3]):

**Teorema 10** *Propiedades de la solución fundamental del calor*

*a.* $K(x,t) > 0$ *para* $t > 0$.

*b. Para* $t > 0$ *fijo,* $K$ *y sus derivadas tienden a cero exponencialmente rápido cuando* $|x| \to \infty$.

*c. Para cualquier* $\delta > 0$ *fijo,* $\lim_{t\downarrow 0} K(x,t) = 0$ *uniformemente para todo* $|x| \geq \delta$.

*d.* *Para cualquier* $\delta > 0$ *fijo,* $\lim_{t\downarrow 0} \int_{|x|\geq\delta} K(x,t)\,dx = 0$.

*e.* *Para todo* $t > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\,dx = 1$.

*f.* $\lim_{x\uparrow 0} \left[ -\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)\,d\tau \right] = -\frac{1}{2}$.

*g.* $\lim_{x\downarrow 0} \left[ -\int_0^t \frac{\partial K}{\partial x}(x, t-\tau)\,d\tau \right] = \frac{1}{2}$.

*h.* *Para* $t > 0$, $K$ *es una función analítica de* $x$ *y* $t$.

Luego, usando las propiedades del teorema 10, a continuacion demostramos el siguiente teorema de existencia y unicidad.

**Teorema 11 (Existencia y unicidad para el problema de calor)** *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua a trozos. Fijemos constantes positivas* $C_1, C_2$ *y un exponente* $\alpha$ *con* $0 \leq \alpha < 1$.

1. (Existencia). *Si*

$$|f(x)| \leq C_1 \exp\{C_2\,|x|^{1+\alpha}\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

*entonces la función*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, t)\, f(\xi)\,d\xi, \quad t > 0,$$

*con*

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\, t}} \exp\Bigl(-\tfrac{x^2}{4\,t}\Bigr), \tag{14}$$

*satisface el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{15}$$

*Si en cambio*

$$|f(x)| \leq C_1 \exp\{C_2\, x^2\} \quad \textit{cuando } |x| \to \infty,$$

*entonces la misma fórmula de* $u(x,t)$ *define una solución de* (15) *válida al menos en*

$$0 < t < \frac{1}{4\,C_2}.$$

2. (Unicidad). *La solución* $u$ *de* (15) *es única dentro de la clase de soluciones* $v$ *del problema de valor inicial que admiten un número finito de discontinuidades acotadas en* $t = 0$ *y satisfacen la condición de crecimiento*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0: \qquad |v(x,t)| \leq C_1 \exp\{C_2 x^2\},$$

*donde* $C_1, C_2 > 0$ *son constantes.*

**Demostración.**

1. **Existencia**

Usando la desigualdad $2ab \leq \varepsilon^{-1}a^2 + \varepsilon b^2$, con $\varepsilon > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$, se obtienen funciones positivas $F_1, F_2$ tales que

$$F_1(x,t)\, \exp\biggl\{-\frac{(1+\varepsilon)\,\xi^2}{4t}\biggr\} \ \leq\ K(x-\xi,t) \ \leq\ F_2(x,t)\, \exp\biggl\{-\frac{(1-\varepsilon)\,\xi^2}{4t}\biggr\}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{16}$$

Definimos

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,t)\, f(\xi)\,d\xi. \tag{17}$$

i) Si para $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(x) = C_1 \exp\left\{C_2 |x|^{2+\alpha}\right\}, \qquad C_1, C_2 > 0,\ \alpha > 0,$$

entonces (17) diverge. En efecto, para $|\xi|$ suficientemente grande,

$$C_2\, |\xi|^\alpha > (4t)^{-1}(1+\varepsilon),\ t > 0,$$

y la cota izquierda de (16) hace que el integrando crezca exponencialmente.

ii) Usando la cota derecha de (16), vemos que si $f$ es continua a trozos y es asintóticamente equivalente, cuando $|x| \to \infty$, a $C_1 \exp\{C_2 x^2\}$, entonces (17) converge siempre que

$$C_2 - \frac{1-\varepsilon}{4t} < 0, \qquad \text{es decir,} \qquad 0 < \varepsilon < 1,\ \ 0 < t < \frac{1-\varepsilon}{4C_2}.$$

Además (ejercicio): para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$ y todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, T]$,

$$\partial_t^m \partial_x^n K(x,t) = R_{m,n}\big(x, \sqrt{t}\big)\, K(x,t),$$

donde $R_{m,n}$ es una función racional en $(x, \sqrt{t})$. En consecuencia,

$$u \in C^\infty(D_T) \quad \text{y} \quad \partial_t u = \partial_{xx} u \text{ en } D_T,$$

donde

$$D_T := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T]\}, \qquad T < (4C_2)^{-1}.$$

iii) Usando la cota derecha de (16), si $f$ es continua a trozos y satisface

$$|f(x)| \le C_1 \exp\left\{C_2 |x|^{1+\alpha}\right\}, \qquad 0 \le \alpha < 1,$$

entonces (17) converge; en particular, $u$ es infinitamente diferenciable y satisface la ecuación del calor homogénea en $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,t) \mid t > 0\}$.

La continuidad de $u$ en $t = 0$ se obtiene a partie de la propiedad **e.** del Teorema 10.

2. **Unicidad**

Supongamos que $u_1, u_2$ resuelven (15) y cumplen

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0: \qquad |u_j(x,t)| \le C_1 \exp\{C_2 x^2\} \quad (j = 1, 2).$$

Sea $v := u_1 - u_2$. Entonces

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T, \\ v(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ |v(x,t)| \le 2C_1 \exp\{C_2 x^2\}, & x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T. \end{cases} \tag{18}$$

Fijemos $C_3 > C_2$ y sea $\alpha = i/\sqrt{4C_3}$. A partir del núcleo del calor $K$ definimos

$$W(x,t) = \sqrt{4\pi}\, K(\alpha x,\ 1 + \alpha^2 t) = (1 - 4C_3 t)^{-1/2} \exp\left\{\frac{C_3 x^2}{1 - 4C_3 t}\right\}, \tag{19}$$

que satisface

$$W_t = W_{xx}, \qquad W(x,0) = \exp\{C_3 x^2\}, \qquad x \in \mathbb{R},\ 0 < t < (4C_3)^{-1}.$$

Sea $(x_1, t_1)$ con $0 < t_1 < (4C_3)^{-1}$ y tomemos el rectángulo

$$R = \{(x,t) : |x| \le A,\ 0 \le t \le (4C_3)^{-1}\}, \qquad A > |x_1|.$$

Definimos la función de comparación

$$z(x,t) = C_1 \exp\{(C_2 - C_3)A^2\}\, W(x,t). \tag{20}$$

En $t = 0$ se tiene $|v(x,0)| = 0 \leq z(x,0)$. En $x = \pm A$ y $0 < t < (4C_3)^{-1}$,

$$|v(\pm A,t)| \leq 2C_1 \exp\{C_2 A^2\} \leq C_1(1-4C_3 t)^{-1/2} \exp\{C_2 A^2\} \exp\{C_3 A^2 (1-4C_3 t)^{-1} - C_3 A^2\} = z(\pm A, t).$$

Por lo tanto $|v| \leq z$ en la frontera de $R$.

Por el Teorema 7,

$$-|z(x_1,t_1)| \leq v(x_1,t_1) \leq z(x_1,t_1) \quad \Rightarrow \quad |v(x_1,t_1)| \leq C_1 \exp\{(C_2 - C_3)A^2\}\, W(x_1,t_1).$$

Como $C_3 > C_2$, si $A \to \infty$ el factor $\exp\{(C_2 - C_3)A^2\} \to 0$ y obtenemos $v(x_1,t_1) = 0$. Dado que $(x_1,t_1)$ es arbitrario con $0 < t_1 < (4C_3)^{-1}$, concluimos

$$v \equiv 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \big(0, (4C_3)^{-1}\big).$$

Supongamos, por absurdo, que no vale en todo $(0,T)$; es decir, existen $(x^*,t^*)$ con $0 < t^* < T$ y $v(x^*,t^*) \neq 0$. Definimos el primer tiempo de no–anulación

$$T_1 := \operatorname{ínf}\big\{\, t > 0 : \ \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } v(x,t) \neq 0 \,\big\}.$$

Entonces $0 < T_1 \leq T$ y, por continuidad en $t$, se tiene $v(\cdot, T_1) = 0$. Aplicamos de nuevo la construcción de comparación con $W$ tomando como dato inicial *nulo* en $t = T_1$ y concluimos que

$$v \equiv 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times \big(T_1,\, T_1 + (4C_3)^{-1}\big).$$

Esto contradice la definición de $T_1$. Por lo tanto,

$$v \equiv 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0,T),$$

y en consecuencia $u_1 \equiv u_2$ en $\mathbb{R} \times (0,T)$.

■

Ahora veamos el siguiente ejemplo de la solucion al problema del valor inicial donde la unicidad no se garantiza,

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_{xx} u, & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x,0) = 0, & \qquad\quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

El ejemplo consiste en la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} \exp\{-t^{-2}\}, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Se tiene que la serie converge y puede derivarse término a término. Por lo tanto, $\partial_t u = \partial_{xx} u$ y $u(x,0) \equiv 0$ ya que $f$ y todas sus derivadas se anulan en $t = 0$. Observamos que, en vista del teorema 11, esta $u$ tiene una tasa de crecimiento que excede $C_1 \exp\{C_2 x^2\}$, por lo que no pertenece a la clase de funciones con unicidad garantizada.

## Referencias


[1] Robyn P. Araujo y Dianne L. S. McElwain. «A History of the Study of Solid Tumour Growth: The Contribution of Mathematical Modelling». En: *Bulletin of Mathematical Biology* 66.5 (2004), págs. 1039-1091. DOI: 10.1016/j.bulm.2003.11.002.

[2] John Rozier Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Vol. 23. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 0-521-30243-9.

[3] Diego Chamorro. *Mini-Curso: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Universidad Politécnica Salesiana (sede Cuenca). Lecciones y ejercicios. Nov. de 2015.

[4] John Crank. *Free and Moving Boundary Problems*. Oxford Science Publications. Oxford: Clarendon Press, 1984.

[5] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 0-471-31716-0, 978-0471317166.

[6] Jean Fourier. *Analytical Theory of Heat*. Vol. 45. Great Books of the Western World. Chicago, London, Toronto: Encyclopedia Britannica, Inc., 1952.

[7] Avner Friedman. «Free Boundary Problems Associated with Multiscale Tumor Models». En: *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* 4.3 (2009), págs. 134-155. DOI: 10.1051/mmnp/20094306.