

Índice general

1	Un poco de historia y un poco de física	1
1.1	Bernoulli, Euler, Navier, Poisson, Stokes & Cia.	2
1.2	Rápida deducción física de las ecuaciones de Navier-Stokes . . .	4
2	Herramientas básicas	13
2.1	Generalidades	13
2.1.1	Espacios de funciones a valores reales	13
2.1.2	Funciones a valores vectoriales	15
2.2	Algunas definiciones e identidades vectoriales	16
2.2.1	Definiciones elementales	16
2.2.2	Algunas identidades útiles	19
2.3	Espacios de Lebesgue	20
2.3.1	Generalidades	20
2.3.2	Espacios de Lebesgue tiempo-espacio	22
2.3.3	Producto de convolución	25
2.3.4	Transformada de Fourier	26
2.4	Espacios de Sobolev	28
2.4.1	Espacios de Sobolev no homogéneos	28
2.4.2	Espacios de Sobolev homogéneos	33
2.4.3	Desigualdad de Sobolev y de interpolación	36
2.4.4	Leyes de producto	38
2.5	Algunos resultados útiles	42
2.5.1	Transformada de Riesz	43
2.5.2	Tres resultados simples pero útiles	44
2.5.3	Banach-Aloaglu y Rellich-Kondrashov	45
2.6	Ejercicios	47
3	Soluciones clásicas	53
3.1	Ecuación de calor y ecuación de Laplace	54
3.1.1	Ecuación del calor	55
3.1.2	Ecuación de Laplace y de Poisson	60
3.2	Descomposición de Helmholtz	68
3.3	La ecuación de Stokes	70
3.3.1	El problema de Stokes	70
3.3.2	El Tensor de Oseen	73
3.4	Soluciones clásicas de las ecuaciones de Navier-Stokes	77
3.4.1	Introducción	77
3.4.2	Formulación diferencial y formulación integral	93
3.4.3	Propiedades de decrecimiento espacial	96
3.5	Ejercicios	116

4	Soluciones mild	123
4.1	Generalidades	124
4.1.1	Principio de contracción	124
4.1.2	Soluciones débiles	126
4.2	Formulación integral y soluciones <i>mild</i>	130
4.2.1	Motivación	130
4.2.2	Velocidad, presión y proyector de Leray	133
4.2.3	Formulación integral	138
4.3	Un teorema de existencia de soluciones <i>mild</i>	140
4.3.1	Lemas técnicos	142
4.3.1	Formulación diferenciable y formulación integral	155
4.3.2	Tiempos de existencia y criterios de explosión	163
4.4	Espacios funcionales y homogeneidad	171
4.5	Ejercicios	175
5	Soluciones mild de tipo Fourier-Herz	183
5.1	Introducción	183
5.1.1	Ecuaciones de Navier-Stokes en variable de Fourier	184
5.1.2	El formalismo <i>mild</i> en variable de Fourier	185
5.2	Espacios de Fourier-Herz	186
5.2.1	Definición de los espacios de Fourier-Herz	186
5.2.2	Propiedades de los espacios de Fourier-Herz	187
5.3	Soluciones <i>mild</i> en los espacios de Fourier-Herz	189
5.3.1	Soluciones <i>mild</i> en el espacio $L_t^2 \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{0,1}$	189
5.3.2	Soluciones <i>mild</i> en el espacio $L_t^\infty \mathcal{F}_{\mathcal{H}}^{2,\infty}$	195
5.4	Ejercicios	199
6	Soluciones débiles de Leray	201
6.1	Motivación	202
6.1.1	Una desigualdad de energía	202
6.1.2	Punto fijo en $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$: un problema mal planteado	205
6.2	Teorema principal: construcción de soluciones débiles de Leray	207
6.2.1	Regularización de las ecuaciones de Navier-Stokes	209
6.2.2	Estudio (local en tiempo) de la ecuación regularizada	210
6.2.3	Desigualdad de energía para la ecuación regularizada	218
6.2.4	Soluciones globales en tiempo	220
6.2.5	Paso al límite y retorno a las ecuaciones de Navier-Stokes	223
6.2.6	Estudio de la presión	229
6.2.7	Desigualdad de energía para las soluciones débiles.	231
6.3	Propiedades adicionales	234
6.3.1	Desigualdad fuerte de energía	234
6.3.2	Unicidad fuerte-débil	242
6.4	El caso de la dimensión $n = 2$	253
6.5	Ejercicios	267
7	El α-modelo de H. Beirão da Veiga	273
7.1	Introducción	273
7.1.1	Una variante del teorema de punto fijo	274
7.1.2	El modelo de hiperviscosidad	275

7.2	Teorema principal	276
7.2.1	Estudio del problema regularizado	279
7.2.2	Desigualdad de energía y soluciones regularizadas globales	288
7.2.3	Paso al límite y soluciones débiles	290
7.3	Ejercicios	294
8	Explosión para una ecuación simplificada	301
8.1	Introducción	301
8.1.1	Un modelo de estudio	302
8.1.2	Construcción de soluciones	303
8.2	Explosión en un tiempo finito para el modelo simplificado	308
8.2.1	Persistencia de la positividad	309
8.2.2	Una minoración puntual	310
8.2.3	Minoración de la norma H^1	313
8.3	Ejercicios	316
9	Soluciones estacionarias	321
9.1	Soluciones H^1 para el problema estacionario	321
9.1.1	Cálculos preliminares	321
9.1.2	Teorema de existencia H^1	322
9.2	Soluciones $\dot{H}^1$ para el problema estacionario	323
9.2.1	Algunos teoremas de punto fijo	323
9.2.2	Existencia de soluciones estacionarias	326
9.2.3	Propiedades	333
9.3	Problema de tipo Liouville	334
9.4	Ejercicios	341
10	Regularidad local	345
10.1	Introducción	345
10.1.1	Resultados de regularidad asociados a la ecuación del calor	346
10.1.2	Localización	348
10.2	Criterio de regularidad local de Serrin	352
10.2.1	Definición y propiedades de la vorticidad $\vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$	353
10.2.2	Ecuación para la vorticidad $\vec{w}$	357
10.2.3	Localización y ganancia de regularidad para la vorticidad.	360
10.2.4	Ganancia de regularidad para la velocidad $\vec{u}$	364
10.3	El contraejemplo de Serrin	373
10.4	Ejercicios	376
	Bibliografía	385
	Índice alfabético	391