

Índice general

Prefacio	III
1. Preliminares	1
1.1. Conjuntos	1
1.2. Relaciones	7
1.3. Familias de conjuntos	10
1.4. Cardinalidad	11
1.5. Sucesiones	13
1.6. El Axioma de Elección y el Lema de Zorn	14
1.7. Grupos, anillos y cuerpos	15
1.8. Espacios vectoriales	18
1.9. Operadores lineales	28
1.10. Ejercicios propuestos	33
2. Una introducción al Análisis Complejo	39
2.1. El cuerpo de los números complejos	39
2.2. Funciones complejas	42
2.2.1. Funciones módulo y de conjugación	42
2.2.2. Bolas, conjuntos abiertos y funciones acotadas	45
2.2.3. Sucesiones	47
2.3. Fórmula de Euler	49
2.3.1. Forma polar de un número complejo	50
2.3.2. Teorema Fundamental del Álgebra	52
2.3.3. Raíces de la unidad	54
2.4. Límites y continuidad de funciones complejas	55
2.5. Derivabilidad	56
2.5.1. Condiciones de Cauchy-Riemann	57
2.5.2. Reglas de derivación	60
2.5.3. Primitivas o antiderivadas	62
2.5.4. Curvas y dominios complejos	63
2.6. Series de potencias	65
2.6.1. Función exponencial y funciones hiperbólicas	69
2.6.2. Funciones trigonométricas	70
2.6.3. Función logarítmica	72
2.7. Integral en el plano complejo	74
2.7.1. Definición en el sentido de Riemann	75
2.7.2. Longitud de arco	77
2.7.3. Teorema Fundamental del Cálculo	78
2.7.4. Función indicatriz	80
2.8. El Teorema de Cauchy-Goursat	81
2.9. Fórmula integral de Cauchy	83
2.9.1. Series de Taylor	85

2.9.2. Otras consecuencias de la fórmula integral de Cauchy	87
2.10. Series de Laurent	89
2.11. Polos y singularidades	93
2.12. El Teorema de los Residuos	95
2.13. Cálculo de integrales mediante residuos	100
2.13.1. Integrales de funciones trigonométricas	100
2.13.2. Integrales impropias sobre dominios no-acotados	101
2.14. Ejercicios propuestos	109
3. Transformada de Laplace	119
3.1. Introducción	119
3.1.1. Definición y existencia	119
3.1.2. Transformada inversa de Laplace	125
3.1.3. Fórmulas de Mellin y Post	126
3.2. Teoremas de traslación o corrimiento	129
3.3. Transformada inversa de Laplace y residuos. Fórmula de Heaviside	130
3.4. Derivación y convolución	133
3.5. Funciones periódicas	135
3.6. Delta de Dirac	137
3.7. Aplicaciones de la transformada de Laplace	139
3.7.1. Problemas de valor inicial	139
3.7.2. Ecuación de Volterra	141
3.7.3. Segunda ley de Kirchoff	142
3.7.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	144
3.7.5. Aplicaciones a la Economía	145
3.7.6. Ecuaciones en diferencias	146
3.8. Ejercicios propuestos	147
4. Sistemas dinámicos continuos	155
4.1. Introducción	155
4.2. Clasificación de los sistemas dinámicos continuos	158
4.2.1. Linealidad	160
4.2.2. Autonomía	160
4.3. Existencia, unicidad y estabilidad de soluciones	161
4.3.1. Funciones de Lipschitz	161
4.3.2. Resultados	165
4.4. Campos de direcciones	167
4.5. Puntos atractivos y repulsivos	171
4.6. Uso del método de Runge-Kutta	173
4.6.1. RK4 para sistemas de primer orden	174
4.6.2. Sistemas dinámicos de segundo orden	175
4.6.3. RK4 para sistemas de segundo orden	177
4.7. RK4 para sistemas de orden superior	179
4.8. Sistemas autónomos lineales	182
4.8.1. Sistemas homogéneos	182
4.8.2. Sistemas no-homogéneos	187
4.9. Estabilidad de puntos críticos	189
4.9.1. Caso lineal	189
4.9.2. Caso no-lineal	196

4.10. Ejercicios propuestos	201
5. Análisis de Fourier	207
5.1. Introducción	207
5.2. Espacios normados	208
5.2.1. Definiciones iniciales	208
5.2.2. El espacio de funciones continuas y el teorema de Weierstrass	210
5.2.3. Continuidad de operadores	215
5.2.4. Normas de Lebesgue	217
5.2.5. Conjuntos abiertos y cerrados	219
5.3. Espacios Euclidianos	222
5.3.1. Preliminares	222
5.3.2. El espacio $L^2(I)$	224
5.3.3. Ortogonalidad	227
5.3.4. El proceso de Gram-Schmidt	228
5.3.5. Bases de Schauder y Hilbertianas	230
5.4. Espacios de Banach y Hilbert	234
5.4.1. Criterio de Cauchy. Completitud	234
5.4.2. Operadores lineales continuas. Representación de Riesz-Fréchet	238
5.4.3. Densidad	245
5.4.4. Operador adjunto	247
5.5. Bases Hilbertianas	249
5.5.1. Existencia de bases Hilbertianas	249
5.5.2. Series de Fourier-Legendre	251
5.5.3. Series clásicas de Fourier	256
5.5.4. El sistema trigonométrico en $L^2([-d, d])$	258
5.5.5. Series de Fourier — Hermite	262
5.5.6. Series de Fourier-Laguerre	264
5.6. Transformada de Fourier	266
5.6.1. Espacios de Lebesgue	266
5.6.2. Definición de la transformada de Fourier y de su inversa	268
5.6.3. Los operadores \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1}	269
5.6.4. Propiedades importantes	271
5.6.5. Relación de \mathcal{F} con otras transformadas	277
5.7. Estudio de señales	281
5.7.1. Filtrado	281
5.7.2. Localización tiempo-frecuencia	281
5.7.3. El teorema de muestreo de Shannon	284
5.7.4. Filtros de paso bajo	286
5.7.5. Filtrado de ancho de banda	287
5.8. Wavelets	288
5.8.1. Introducción	288
5.8.2. Las wavelets de Haar	291
5.8.3. Las wavelet de Shannon	296
5.9. Ejercicios propuestos	297

6. Una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales	309
6.1. Preliminares	309
6.1.1. Linealidad. Soluciones fuertes	310
6.1.2. Condiciones iniciales y de frontera	311
6.2. Algunos ejemplos de EDP	311
6.2.1. Ecuación de transporte	311
6.2.2. Ecuación de Schrödinger	312
6.2.3. Ecuaciones no-lineales	313
6.2.4. Las ecuaciones de Maxwell	313
6.3. Ecuaciones clásicas	314
6.3.1. La ecuación de difusión	314
6.3.2. La ecuación de onda	316
6.4. Resolución de EDP	317
6.4.1. Método de separación de variables	317
6.4.2. Aplicación de las transformadas de Fourier y Laplace	330
6.4.3. Ondas planares y viajeras	332
6.4.4. La ecuación de Laplace y funciones armónicas	334
6.5. Distribuciones	335
6.5.1. Introducción	335
6.5.2. Derivadas débiles	340
6.5.3. Transformada de Fourier de distribuciones	342
6.5.4. Espacios de Sobolev	343
6.5.5. Resolución de EDP mediante distribuciones temperadas	343
6.6. Ejercicios propuestos	345
A. Soluciones y pautas de los ejercicios propuestos	351
B. Modelamiento matemático	371
B.1. Conceptos básicos	371
B.1.1. Formulación de un modelo matemático de un sistema	372
B.1.2. Formas de estudiar un sistema	373
B.2. Tipos de modelos matemáticos	373
B.2.1. Modelos estáticos y dinámicos	373
B.2.2. Modelos determinísticos y estocásticos	376
B.2.3. Modelos continuos y discretos	377
Bibliografía	379
Índice alfabético	382