

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1 Introducción al análisis funcional</b>	<b>1</b>
1.1 Aplicaciones lineales continuas . . . . .	2
1.1.1 Definiciones y primeras propiedades . . . . .	2
1.1.2 Continuidad de las aplicaciones lineales . . . . .	7
1.1.3 Aplicaciones multilineales . . . . .	18
1.2 Teoremas de Hahn-Banach . . . . .	22
1.2.1 Forma analítica . . . . .	22
1.2.2 Aplicación a las aplicaciones lineales continuas . . . . .	25
1.2.3 Forma geométrica . . . . .	29
1.2.4 Aplicación a la separación de conjuntos y a la densidad . . . . .	32
1.3 Teoremas clásicos del análisis funcional . . . . .	37
1.3.1 Teorema de la aplicación abierta . . . . .	40
1.3.2 Teorema del grafo cerrado . . . . .	43
1.3.3 Teorema de Banach-Steinhaus . . . . .	44
1.4 Topologías fuertes y débiles . . . . .	50
1.4.1 Motivación y construcción de topologías débiles . . . . .	50
1.4.2 Dualidad y topologías asociadas . . . . .	57
1.4.3 Dualidad y reflexibilidad en los espacios de Banach . . . . .	73
1.4.4 Envolturas convexas y puntos extremales . . . . .	92
1.5 Realización de los espacios duales y espacios de sucesiones . . . . .	101
1.5.1 Realización de los espacios duales . . . . .	101
1.5.2 Definiciones y propiedades de los espacios de sucesiones . . . . .	103
1.5.3 Resultados generales y algunos ejemplos . . . . .	105
1.6 Ejercicios . . . . .	122
<b>2 Complementos de teoría de la medida</b>	<b>129</b>
2.1 Medidas con signo y medidas complejas . . . . .	130
2.1.1 Definiciones y primeras propiedades . . . . .	131
2.1.2 Teoremas de descomposición de medidas . . . . .	139
2.1.3 Variación total de medidas . . . . .	143
2.1.4 Integración con una medida con signo o compleja . . . . .	150
2.2 Continuidad absoluta . . . . .	153
2.2.1 Teorema de Radon-Nikodym . . . . .	157
2.2.2 Esperanza Condicional . . . . .	166
2.2.3 Singularidad y Teorema de descomposición de Lebesgue . . . . .	169
2.3 Aplicaciones diferenciables . . . . .	172
2.3.1 Imagen de medidas y cambio de variables . . . . .	172
2.3.2 Diferenciación de medidas . . . . .	187
2.3.3 Funciones de variación acotada . . . . .	203
2.3.4 Diferenciación de funciones . . . . .	211

2.4	Medidas en espacios localmente compactos . . . . .	216
2.4.1	Introducción . . . . .	216
2.4.2	Teorema de Representación de Riesz . . . . .	218
2.4.3	Medidas de Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ . . . . .	223
2.5	Ejercicios . . . . .	225
<b>3</b>	<b>Dualidad y espacios de Lebesgue</b>	<b>231</b>
3.1	Espacios $L^p$ ( $1 < p < +\infty$ ) . . . . .	232
3.1.1	El resultado de dualidad . . . . .	233
3.1.2	Reflexividad . . . . .	244
3.1.3	Propiedades . . . . .	250
3.2	Espacio $L^1$ . . . . .	254
3.2.1	El resultado de dualidad . . . . .	255
3.2.2	Reflexividad . . . . .	262
3.2.3	Propiedades . . . . .	264
3.3	Espacio $L^\infty$ . . . . .	265
3.3.1	El resultado de dualidad . . . . .	265
3.3.2	Reflexividad . . . . .	271
3.3.3	Propiedades . . . . .	271
3.4	Dualidad en otros Espacios . . . . .	273
3.4.1	El espacio $C_0$ y el espacio de Medidas de Radon . . . . .	273
3.4.2	Los espacios $L^p_{loc}$ y $L^p_c$ . . . . .	281
3.5	Ejercicios . . . . .	287
<b>4</b>	<b>Convolución</b>	<b>295</b>
4.1	Una estructura adicional . . . . .	296
4.1.1	Grupos topológicos localmente compactos . . . . .	296
4.1.2	Medidas de Haar, primeras propiedades . . . . .	304
4.1.3	Espacios de Lebesgue y medidas de Haar . . . . .	316
4.2	Producto de convolución . . . . .	318
4.2.1	Definición y propiedades elementales . . . . .	319
4.2.2	Desigualdades de Young . . . . .	326
4.3	Soporte de convolución y regularidad . . . . .	329
4.3.1	Soporte del producto de convolución . . . . .	330
4.3.2	Derivadas parciales: notaciones . . . . .	333
4.3.3	Continuidad, derivación y producto de convolución . . . . .	336
4.4	Aplicaciones de la convolución . . . . .	340
4.4.1	Sucesiones regularizantes, aproximación y densidad . . . . .	340
4.4.2	Un criterio de compacidad . . . . .	347
4.4.3	Aproximaciones de la identidad . . . . .	349
4.5	Operadores de convolución . . . . .	354
4.5.1	Definiciones y propiedades elementales . . . . .	354
4.5.2	Continuidad de los operadores de convolución . . . . .	356
4.5.3	Semi-grupos de convolución . . . . .	357
4.6	Ejercicios . . . . .	364
	<b>Bibliografía</b>	<b>369</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>373</b>