

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>v</b>
<b>1 Espacios métricos, normados y de Banach</b>	<b>1</b>
1.1 Espacios topológicos y espacios métricos . . . . .	1
1.1.1 Definiciones . . . . .	2
1.1.2 Límites y continuidad . . . . .	5
1.1.3 Propiedades uniformes . . . . .	7
1.2 Compacidad . . . . .	11
1.2.1 Espacios compactos . . . . .	11
1.2.2 Compacidad en los espacios métricos . . . . .	15
1.2.3 Espacios localmente compactos . . . . .	18
1.3 Espacios localmente convexos y espacios de Fréchet . . . . .	19
1.3.1 Preliminares . . . . .	20
1.3.2 Semi-normas . . . . .	21
1.3.3 Espacios definidos por familias de semi-normas . . . . .	22
1.4 Espacios normados y espacios de Banach . . . . .	29
1.4.1 Definiciones . . . . .	30
1.4.2 Tres ejemplos clásicos . . . . .	35
1.4.3 Propiedades básicas . . . . .	36
1.4.4 Equicontinuidad y teorema de Ascoli-Arzelá . . . . .	39
1.5 Ejercicios . . . . .	42
<b>2 Teoría de la medida</b>	<b>49</b>
2.1 Álgebras y funciones aditivas de conjuntos . . . . .	50
2.1.1 Preliminares . . . . .	50
2.1.2 Definiciones y ejemplos elementales . . . . .	51
2.2 $\sigma$ -álgebras y medidas . . . . .	57
2.2.1 $\sigma$ -álgebras . . . . .	58
2.2.2 Medidas sobre $\sigma$ -álgebras . . . . .	65
2.2.3 Clases monótonas . . . . .	74
2.3 Medidas exteriores . . . . .	79
2.3.1 Definiciones y propiedades . . . . .	79
2.3.2 Teoremas de prolongación de medidas . . . . .	84
2.3.3 Completación de medidas . . . . .	92
2.4 Medidas Borelianas . . . . .	96
2.4.1 Rápida descripción de los conjuntos Borelianos . . . . .	96
2.4.2 Regularidad de las medidas Borelianas . . . . .	98
2.4.3 Construcción y propiedades de la medida de Lebesgue . . . . .	104
2.4.4 Conjuntos no medibles . . . . .	111
2.5 Ejercicios . . . . .	114

<b>3</b>	<b>Teoría de la integración</b>	<b>121</b>
3.1	Las limitaciones de la integral de Riemann . . . . .	122
3.2	Teoría de la integración de Lebesgue . . . . .	125
3.2.1	Funciones medibles . . . . .	125
3.2.2	Propiedades válidas en $\mu$ -casi todas partes . . . . .	134
3.2.3	Construcción de la integral de Lebesgue . . . . .	137
3.2.4	Espacio de funciones integrables . . . . .	147
3.2.5	Integración en un subconjunto . . . . .	152
3.3	Teoremas clásicos de la teoría de la integración . . . . .	157
3.3.1	Convergencia monótona . . . . .	157
3.3.2	Lema de Fatou . . . . .	159
3.3.3	Convergencia dominada . . . . .	160
3.3.4	Integrales dependientes de un parámetro . . . . .	163
3.3.5	Modos de convergencia . . . . .	168
3.4	Integración en los espacios producto . . . . .	177
3.4.1	$\sigma$ -álgebras producto . . . . .	178
3.4.2	Medidas producto . . . . .	182
3.4.3	Teoremas de Fubini-Tonelli . . . . .	185
3.4.4	Integrales múltiples . . . . .	190
3.5	Relaciones entre la integral de Riemann y de Lebesgue . . . . .	192
3.5.1	Cuando la integral de Riemann y de Lebesgue coinciden . . . . .	193
3.5.2	Teoremas fundamentales del cálculo integral . . . . .	195
3.5.3	Integrales impropias . . . . .	197
3.6	Ejercicios . . . . .	199
<b>4</b>	<b>Espacios de Lebesgue</b>	<b>205</b>
4.1	Espacio de funciones esencialmente acotadas . . . . .	206
4.1.1	Supremo Esencial . . . . .	206
4.1.2	Los espacios $\mathcal{L}^\infty$ . . . . .	208
4.1.3	Los espacios $L^\infty$ , normabilidad y convergencia . . . . .	211
4.2	Espacios de funciones de potencia $p$ -eme integrables . . . . .	215
4.2.1	Espacios $\mathcal{L}^p$ definiciones, ejemplos y propiedades . . . . .	216
4.2.2	Espacios $L^p$ normabilidad, convergencia y completitud . . . . .	222
4.2.3	Desigualdades de Hölder y aplicaciones . . . . .	228
4.2.4	Los espacios de Lebesgue $L^p$ ( $0 < p < 1$ ) y $L$ . . . . .	242
4.3	Propiedades adicionales . . . . .	248
4.3.1	Comparación de modos de convergencia . . . . .	249
4.3.2	Desigualdad de Jensen y aplicaciones . . . . .	254
4.3.3	Convexidad y continuidad de la norma . . . . .	258
4.4	Espacios de funciones localmente integrables . . . . .	259
4.4.1	Definiciones y primeras propiedades . . . . .	259
4.4.2	Estructura de los espacios locales . . . . .	261
4.4.3	Relaciones de inclusión . . . . .	262
4.5	Densidad y separabilidad de los espacios de Lebesgue . . . . .	263
4.5.1	Definiciones y propiedades generales . . . . .	264
4.5.2	Densidad en los espacios $L^p$ con $1 \leq p < +\infty$ . . . . .	268
4.5.3	Densidad en los espacios $L^\infty$ . . . . .	273

4.6	Espacios de Lebesgue discretos - espacios de sucesiones . . . . .	276
4.6.1	Espacios de sucesiones . . . . .	277
4.6.2	Propiedades de inclusión de los espacios $\ell^p$ . . . . .	280
4.6.3	Densidad y de separabilidad en los espacios $\ell^p$ . . . . .	282
4.7	Ejercicios . . . . .	286

<b>Bibliografía</b>	<b>291</b>
---------------------	------------

<b>Índice alfabético</b>	<b>293</b>
--------------------------	------------