

Portafolio de Consumo. Problema de Merton.

CEPEDA Eduardo

marzo 2007

1 Introducción

El problema tratado es la optimización de una función de utilidad (calculada en función del consumo) de un inversionista-consumidor que dispone de una riqueza inicial y utiliza un portafolio que autofinancia compuesto por una inversión en un activo con riesgo y por dinero que lo puede guardar en el banco (para ganar los respectivos intereses).

La función de utilidad es la siguiente :

$$J(x, y, \pi_t, c_t) = \mathbb{E} \int_0^T \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha t} (c_t X_t)^\gamma dt,$$

donde $\gamma < 0$ o > 0 , $\alpha > 0$ et T puede ser finito o infinito, este tipo de función es llamada HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), el término presente en la integral es para asegurar la sumabilidad en horizonte infinito.

Esta función es utilizada para controlar un proceso de difusión, lo que produce una ecuación diferencial parcial de primer orden no lineal conocida bajo el nombre de *Hamilton - Jacobi - Bellman* (HJB).

En horizonte finito podemos tratar el caso con $\alpha = 0$ y procurar encontrar una solución a la ecuación (HJB) generada, en este documento el lector encontrará la resolución completa del problema de Merton para la función de utilidad siguiente :

$$\mathbb{E} \int_0^T \log(C_\theta) d\theta,$$

De hecho, esta segunda función es el caso límite de la primera con : $\gamma = 0$, $\alpha = 0$ y T finito.

Un modo heurístico de verlo es el hecho de que $\frac{dx^\gamma}{dx} = \gamma x^{\gamma-1}$ y $\frac{d(\log(x))}{dx} = x^{-1}$.

Veremos también, al final de este documento, una manera "intuitiva" de encontrar la ecuación (HJB) para la resolución del problema de Merton en horizonte infinito y se dará los controles optimales.

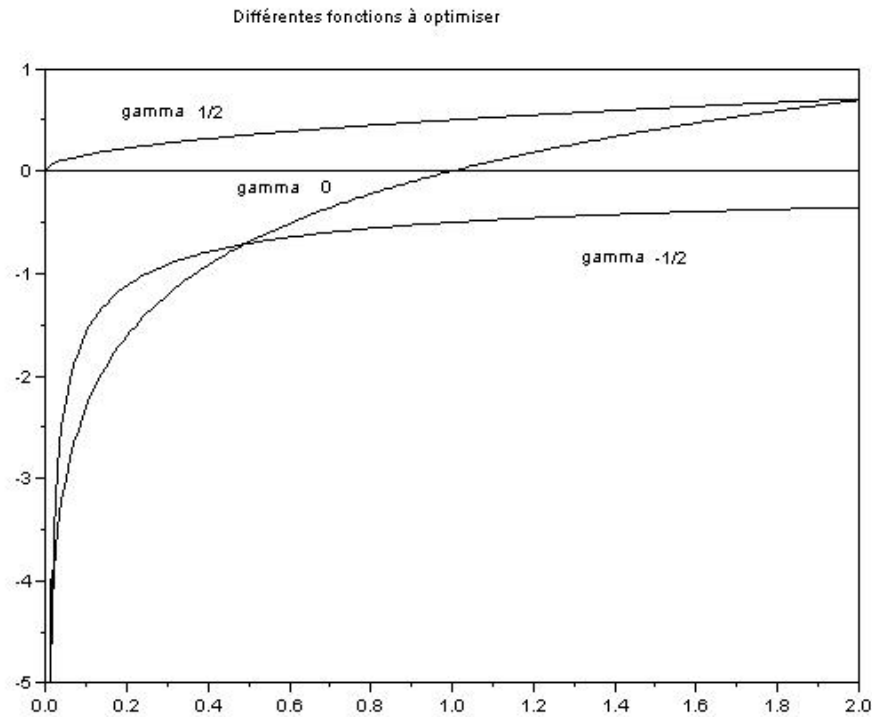


FIG. 1 – fonctions

2 Présentation del Problema de Merton

Para construir un problema de gestión de portafolio, veremos que hay unos puntos importantes en la creación de nuestra ecuación (HJB), (llamaremos portafolio a la función que resuelve a (HJB)) :

- Dinámica de nuestra riqueza, basada en la dinámica del subyacente.
- El portafolio (desconocido al principio y que será determinado cuando se conozca la ecuación HJB)
- La función valor (que es la integral de una función cuyas propiedades serán precisadas más tarde. Es esto lo que se llama **condiciones de admisibilidad**)
- La fórmula de Itô, la cual originará la ecuación (HJB) para resolver el problema de portafolio.

Nos ubicamos en el modelo de Black y Scholes y consideramos un portafolio constituido por una acción cuya dinámica de precios es (S_t) y de una capitalización a la tasa sin riesgo r :

$$\begin{cases} S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_\theta d\theta + \int_0^t \sigma S_\theta dB_\theta, \\ S_0 > 0, \\ S_t^0 = S_0^0 e^{rt}, \\ S_0^0 > 0. \end{cases}$$

Aquí B_t es un movimiento browniano. Notaremos H_0^t , H_t las cantidades de dinero y de acciones respectivamente, al tiempo t . Notaremos C_t la tasa de consumo instantánea del inversionista. Suponemos que la riqueza del inversionista, (W_t) , es autofinanciada :

$$\begin{aligned} W_t &= H_t^0 S_t^0 + H_t S_t \\ &= W_0 + \int_0^t H_t^0 dS_\theta^0 + \int_0^t H_t dS_\theta - \int_0^t C_\theta d\theta. \end{aligned}$$

Además, supondremos que la riqueza inicial $W_0 > 0$ es determinista y estrictamente positiva. Supondremos también :

$$0 < \frac{\mu - r}{\sigma^2} < 1$$

En efecto, si esta fracción fuese negativa, entonces $\mu < r$ y el riesgo del activo ya no es justificado por una prima de riesgo. Ponemos entonces todo el dinero al banco y enfrentaríamos un problema diferente. Si fuese más grande que 1, entonces es el dinero en el banco, esta vez, que ya no sería justificado. También, intuitivamente, mientras la fracción es más grande se vuelve mas interesante invertir en el activo que dejar el dinero en el banco.

Vamos a definir :

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{l} \Pi_t^0 := \frac{H_t^0 S_t^0}{W_t} \\ \Pi_t := \frac{H_t S_t}{W_t} \end{array} \right) & \text{si } W_t \neq 0. \\ \left(\begin{array}{l} \Pi_t^0 := 0 \\ \Pi_t := 0 \end{array} \right) & \text{si } W_t = 0. \end{cases}$$

Entonces, escribiendo de manera diferencial las dinámicas de S_t , S_t^0 y W_t :

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ dS_t^0 &= r S_t^0, \\ dW_t &= H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t - C_t dt. \end{aligned}$$

Vemos que si $W_t \neq 0$ (si $W_t = 0$ no queda ya nada más a gastar y $\Pi_t^0 = \Pi_t = 0$) tenemos $1 = \Pi_t^0 + \Pi_t$ entonces, encontramos que la dinámica de la riqueza puede ser escrita de la siguiente manera :

$$dW_t = [rW_t + \Pi_t W_t (\mu - r) - C_t] dt + \sigma \Pi_t W_t dB_t.$$

tenemos entonces :

$$W_t = W_0 + \int_0^t (rW_s - C_s + (\mu - r)\Pi_s W_s) ds + \int_0^t \sigma \Pi_s W_s dB_s.$$

El inversionista procura maximizar el consumo total sobre $[0, T]$, entonces debe resolver el problema :

$$\sup_{(\Pi_\theta), (C_\theta)} \mathbb{E} \int_0^T \log(C_\theta) d\theta, \quad (1)$$

donde los controles (C_t) et (Π_t) los suponemos admisibles, es decir, adaptados y continuos (para que la integral estocástica tenga sentido) y tal que el proceso (W_t) correspondiente verifica : casi seguramente, la riqueza W_t es estrictamente positiva para todo tiempo $0 \leq t \leq T$, y satisface la **restricción de admisibilidad** :

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \{(T-t)|\log(W_t)|\} < +\infty. \quad (2)$$

Además, los procesos (Π_t) y (C_t) estan obligados a tomar sus valores en $[-1, 1]$ y $]0, +\infty]$ respectivamente ; finalmente, el proceso (C_t) debe verificar

$$\mathbb{E} \int_0^T |\log(C_\theta)| d\theta < +\infty. \quad (3)$$

Entonces la ecuación siguiente llamada de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se vuelve muy importante para resolver el problema del inversionista.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) + \max_{\pi \in [-1, 1], c > 0} (L^{\pi, c} \Phi(t, x) + \log(c)) = 0 & (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}_+^*, \\ \Phi(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

donde

$$L^{\pi, c} := (rx - c + (\mu - r)\pi x) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t, x).$$

Se mostrará que su solución evaluada en los buenos argumentos nos permitirá de encontrar teóricamente el valor de la maximización de (1).

Esta ecuación posee una solución, dada por :

$$V(t, x) = (T-t) \log\left(\frac{x}{T-t}\right) + \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right) (T-t)^2$$

En efecto :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) &= 1 + \log\left(\frac{T-t}{x}\right) - \left(r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right) (T-t), \\ \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) &= \frac{T-t}{x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) &= -\frac{T-t}{x^2}. \end{aligned}$$

y

$$L^{\pi, c} = (rx - c + (\mu - r)\pi x) \left(\frac{T-t}{x}\right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \pi^2 (T-t) + \log(c).$$

¹La interpretación dicreta de la fórmula (1) es : Optimizamos la media geométrica del consumo entre 0 y T.

Puesto que $L^{\pi,c}$ es cóncava en (π, c) , en efecto, su matriz hesiana es :

$$\begin{bmatrix} -\sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

su maximización nos conlleva al cálculo de los puntos extremos de $L^{\pi,c}$, lo que nos da :

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{\pi,c}}{\partial \pi}(\pi^*, c^*) = 0 & \implies \pi^*(t, x) = \frac{\mu-r}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial L^{\pi,c}}{\partial c}(\pi^*, c^*) = 0 & \implies c^*(t, x) = \frac{x}{T-t}. \end{cases}$$

El mejor valor para π es coherente con la nota 2. Además, vemos que el logaritmo del consumo es la diferencia del logaritmo de la riqueza y de $T-t$ (y aunque no sea acotado es integrable sobre $[0, T]$).

Entonces $V(t, x)$ es solución de (HJB).

Comenzaremos demostrando la desigualdad :

$$V(0, W_0) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(C_\theta) d\theta \right]. \quad (4)$$

En efecto, (utilizamos la notación $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi'_{x_i}$) aplicamos la fórmula (diferencial) de Itô a $V(t, W_t)$ y encontramos :

$$dV(t, W_t) = V'_x(t, W_t) dW_t + V'_t(t, W_t) dt + \frac{1}{2} V''_{xx}(t, W_t) \sigma^2 H_t^2 S_t^2 dt$$

Reemplazamos la expresión de Π_t y la dinámica de W_t :

$$\begin{aligned} dV(t, W_t) = & V'_x[rW_t - C_t + \Pi_t W_t(\mu - r)] dt + V'_x(t, W_t) \sigma W_t \Pi_t dB_t \\ & + V'_t(t, W_t) dt + \frac{1}{2} V''_{xx}(t, W_t) \sigma^2 \Pi_t^2 W_t^2 dt, \end{aligned}$$

gracias a (HJB) tenemos :

$$V'_t(t, W_t) \geq -V'_x[rW_t - C_t + \Pi_t W_t(\mu - r)] - \frac{1}{2} V''_{xx}(t, W_t) \sigma^2 \Pi_t^2 W_t^2 - \log(C_t),$$

Esta desigualdad es verdadera para todo control $(\Pi_t, C_t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, entonces :

$$dV(t, W_t) \leq -\log(C_t) dt + V'_x(t, W_t) \sigma W_t \Pi_t dB_t,$$

Integramos esta expresión sobre $[0, T - \epsilon[$ y calculamos el límite de su esperanza cuando ϵ tiende a 0 :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \int_0^{T-\epsilon} dV(t, W_t) \leq - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \int_0^{T-\epsilon} \log(C_t) dt$$

En efecto, ya que $\int_0^{T'} (V'_x(s, W_s) \sigma W_s \Pi_s)^2 dt < +\infty$ y $(V'_x(t, W_t) \sigma W_t \Pi_t)$ adaptado, entonces $\int_0^{T'} V'_x(s, W_s) \sigma W_s \Pi_s dB_s$ es una martingala cuya esperanza es nula.

Entonces con (3) aplicamos el teorema de Lebesgue, cambiamos límite y esperanza y obtenemos el resultado ya que $V(T, W_T) = 0$. Esta relación es válida para cualquier control admisible (Π_θ) et (C_θ) , deducimos :

$$V(0, W_0) \geq \sup_{(\Pi_\theta), (C_\theta)} \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(C_\theta) d\theta \right].$$

Podemos explicitar entonces el proceso (W_t^*) correspondiente a los controles $C_t^* := c^*(t, W_t^*)$ y $\Pi_t^* := \pi^*(t, W_t^*)$:

$$\begin{cases} dW_t^* = \left[rW_t^* - \frac{W_t^*}{T-t} + W_t^* \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right] dt + \frac{\mu-r}{\sigma} W_t^* dB_t, \\ W_0^* = W_0. \end{cases} \quad (5)$$

Buscamos la solución a esta ecuación diferencial estocástica que puede ser escrita bajo la forma :

$$\begin{cases} \frac{dW_t^*}{W_t^*} = \left(a - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t, \\ W_0^* = W_0. \end{cases}$$

donde $a = r + \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2$ et $b = \frac{\mu-r}{\sigma}$.

Para hacerlo, vamos a aplicar la fórmula de Itô a $\log(W_t^*)$ lo que nos da :

$$d(\log W_t^*) = \frac{dW_t^*}{W_t^*} - \frac{1}{2} b^2 dt$$

y reemplazamos $\frac{dW_t^*}{W_t^*}$ por su valor :

$$d(\log W_t^*) = \left(a - \frac{b^2}{2} - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t.$$

Integramos sobre $[0, t]$ y reemplazamos las expresiones de a y b lo que nos permite dar la expresión de W_t^* que se escribe de la siguiente manera :

$$W_t^* = W_0(T-t) e^{\left[r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right] t + \frac{\mu-r}{\sigma} B_t}.$$

Si suponemos que existe otra solución X_t de (5) aplicando la fórmula de Itô a $d\left(\frac{W_t^*}{X_t}\right)$ encontraremos que esta última expresión es nula casi seguramente, de donde deducimos la unicidad de W_t^* ($W_0^* = X_0$).

Ahora, mostraremos que W_t^* satisface la condición de admisibilidad (2), en efecto :

$$\begin{aligned} (T-t) |\log(W_t^*)| &\leq (T-t) |\log(T-t)| + T |\log(W_0)| + \left(r + \frac{1}{2} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} \right) T^2 \\ &\quad + \frac{\mu-r}{\sigma} T \max_{0 \leq \theta \leq T} |B_\theta| \end{aligned}$$

y gracias a la relación siguiente :

$$\mathbb{E} \max_{0 \leq \theta \leq T} |B_\theta|^2 \leq 4T,$$

deducimos (3).

La admisibilidad de π^* es evidente. Para verificar la admisibilidad de C_t^* la explicitamos :

$$C_t^* = \log(T - t) + \log(W_0) + \left(r + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \right) t + \frac{\mu - r}{\sigma} B_t,$$

y podemos ver que C_t^* satisface (1).

Ahora bien, siguiendo la misma técnica que para la demostración de (4), en el caso donde la función $V(t, W_t^*)$ satisface la ecuación (HJB) tenemos :

$$V(0, W_0) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(c^*(\theta, W_\theta)) d\theta \right].$$

Podemos observar que la ecuación diferencial (HJB) aparece de una forma natural a partir de la fórmula de Itô.

Gracias a la expresión explícita de la riqueza del inversionista W_t^* deducimos que $W_t^* \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow T$, es decir $W_T^* = 0$ casi seguramente. Esto se interpreta del modo siguiente, consideramos $[0, T]$ el período de vida del inversionista, entonces éste busca consumir el máximo posible en el curso de su vida sin dejar nada en herencia en T .

Del mismo modo le aplicamos estas ideas con σ constante (en horizonte infinito de tiempo) al operador siguiente :

$$J(x, y, \pi_t, c_t) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha t} (c_t X_t)^\gamma dt, \quad \alpha > 0 \quad (6)$$

Vamos a ver cómo la fórmula de Itô interviene en la construcción de la ecuación de modo muy importante. Vamos a explicitar la ecuación de (HJB) que satisface el portafolio.

Sea $V(x)$ el portafolio (que depende solamente de x), aplicamos la fórmula de Itô y obtenemos :

$$dV(X_s) = V'(x) dX_s + \frac{1}{2} V''(x) \pi^2 \sigma^2 ds,$$

reemplazando la dinámica de la riqueza, esta ecuación se convierte en :

$$dV(X_s) = \underbrace{V'(x) [X_s (r + (\mu - r)\pi - c) ds + \pi \sigma dW_s]}_{\text{martingala}} + \underbrace{\frac{1}{2} V''(x) \pi^2 \sigma^2 ds}_{\text{función } \Phi(x, c)}$$

Las expresiones sobre las llaves deben desaparecer dejándonos una función $\Phi(x, c)$ y una martingala para la ecuación del portafolio, lo que justificará la escritura de (la base de la ecuación) :

$$rxV'(x) + \text{opt}_{\pi,c}\{V'(x)(\mu - r)\pi - cV'(x) + \frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2x^2 - \Phi(x, c) = 0\}$$

donde $\text{opt} = \max$ o \min según el caso. Recordemos la forma de la integral. En particular, vemos que la función dentro de la integral (6) depende también del tiempo. Aplicamos entonces la fórmula de Itô sobre la función $e^{-\alpha t}V(x)$ (técnica semejante a la de la variación de la constante para la resolución de ecuaciones diferenciales) :

$$d(e^{-\alpha s}V(x)) = e^{-\alpha s}dV_s - \alpha e^{-\alpha s}V(x)ds$$

Escribamos la dinámica de $V(x)$: $dV(x) = \Phi(x, c)ds + V'(x)\sigma\pi dW_s$. Esta relación será encontrada después de haber reemplazado la ecuación diferencial en la dinámica de $V(x)$. Suponemos la última igualdad y la reemplazamos, lo que nos da :

$$d(e^{-\alpha s}V(x)) = e^{-\alpha s}(\Phi(x, c)ds + V'(x)\sigma\pi dW_s) - \alpha e^{-\alpha s}V(x)ds$$

De donde deducimos : $\Phi(x, c) = \alpha V(x) - \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma$.

Para que la integral estocástica sea bien definida, las condiciones $\int_0^{+\infty} V'(X_s)^2 ds < +\infty$ et $V'(X_s)$ \mathcal{F}_t -adaptada , deben ser verificadas, y tendremos una martingalas.

Para determinar finalmente la forma de (HJB) en este caso, estudiamos el operador :

$$L^{\pi,c} = V'(x)(\mu - r)\pi - cV'(x) + \frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2x^2 - \alpha V(x) + \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma = 0.$$

cuya matriz hesiana es :

$$\begin{bmatrix} V''(x)x^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)c^{\gamma-2}x^\gamma \end{bmatrix}$$

Que en nuestro caso es de determinante positivo, entonces la escritura de la ecuación (HJB) siguiente esta bien justificada :

$$\begin{cases} rxV'(x) + \min_{\pi,c}\{xV'(x)[(\mu - r)\pi - c] + \frac{1}{2}V''(x)x^2\pi^2\sigma^2 - \alpha V(x) + \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma\} = 0 \\ \text{condition sur } V : e^{-\alpha t}V(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tenemos :

$$V(x) = (c^*)^{\gamma-1} \frac{x^\gamma}{\gamma}$$

con los controles optimales :

$$\begin{aligned} \pi^* &= \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} \\ c^* &= \frac{\alpha - \gamma(\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r)}{1-\gamma} \end{aligned}$$