Cálculo Estocástico y Finanzas de Mercado.

CEPEDA Eduardo

30 de marzo del 2007

1 Matemática financiera : precio de opciones.

Tomando un ejemplo de las finanzas, veremos como la matemática y la economía continuan tejiendo lazos extremadamente estrechos. Una prueba de este compromiso con la economía es el hecho que, en los últimos años, los laureados con el premio nobel en economía son matemáticos.

En 1827 el botánico inglés Robert Brown fue el primero en observar el movimiento errático de partículas orgánicas finas suspendidas en un gas o en un líquido. Depués de él, en el siglo XIX, varios físicos reconocieron que este movimiento es muy irregular y que no admitía tangente, no se puede entonces hablar de su velocidad, ni se le puede aplicar ninguna ley de la mecánica. De hecho, el movimiento browniano pertenece a una clase de funciones que siendo más que continuas no llegan a ser derivables (lo que en lenguaje técnico se conoce como espacios de Hölder).

En 1900, Louis Bachelier introduce el movimiento browniano para modelizar la dinámica de los precios de las acciones en la Bolsa. Su "Teoría de la especulación" es el primer ladrillo de las finanzas modernas. En 1905 Albert Einstein construye un modelo probabilístico para una partícula en difusión, él encuentra la ley de probabilidad para la posición de tal partícula.

En los años 60 el trabajo de Bachelier es retomado, y en los últimos 30 años los mercados financieros han experimentado una revolución de gran amplitud. La actividad financiera se desarrolla a través de un cierto número de instrumentos que tienen como objetivo la repartición del riesgo de un mercado determinado, riesgo que nace de las variaciones de las tasas de cambio de divisas, de las tasas de interés, o de factores económicos que se escapan del control de los participantes de este mercado. La gran variabilidad de los precios de estos instrumentos o parámetros condujeron de manera natural a esta necesidad de transferir el riesgo. Los bancos juegan un papel importante en esta transformación proponiendo productos financieros que serán llamados *productos derivados*.

Un producto muy utilizado para evitar estos riesgos es la opción, y al problema que nos interesamos es el de su evaluación (pricing). Este problema es bastante antiguo, ejemplos de tales opciones se encuentran en el siglo XVII con el mercado de tulipanes en Holanda, donde una mala determinación de su precio llevó a su colapso. Es recién en 1973, gracias a los trabajos Merton, Black y de Scholes, que se logra dar una solución satisfactoria a este problema, lo que permitió el rápido desarrollo del primer mercado organizado de opciones. En la FIG. 1 podemos ver una ilustración del modelo propuesto por Black y Scholes, gracias al movimiento browniano es posible modelizar las características que se encuentran en el curso del precio de activos financieros.

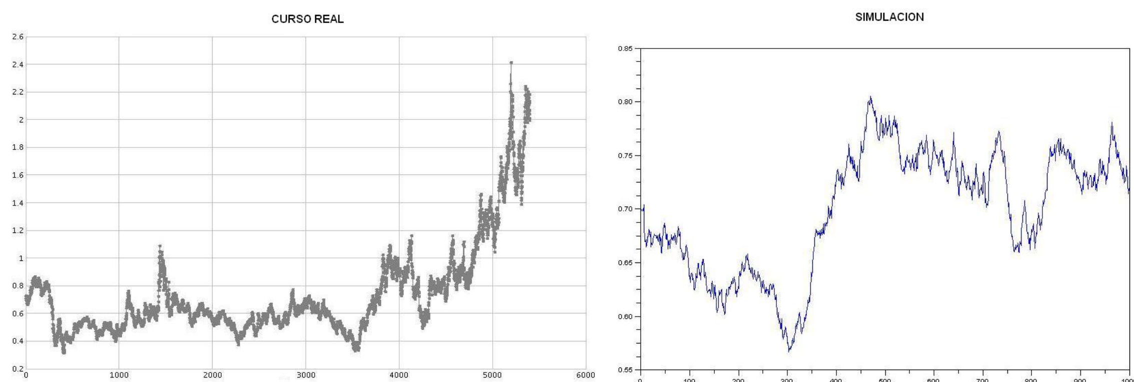

Fig. 1 – Evolución entre los años 1984 - 2006 del precio del contrato futuro sobre la gasolina sin plomo en el New York Mercantil Exchange (NYMEX) y simulación. El riesgo esta representado por los movimientos impredecibles de subida y bajada que sufre el precio del activo. Los matemáticos recurren a las probabilidades para modelizar el riesgo.

Qué es una opción financiera ? Una opción es un contrato que da el derecho (y no la obligación) de comprar (tal opción se llama "CALL", el derecho de vender se llama "PUT") a una fecha futura predeterminada ("madurez" del contrato), supongamos 3 meses, una cantidad fija de un activo (una acción) a un precio dado ("precio de ejercicio" o *"strike"*) a cambio de una prima inicial pagada ahora. Este tipo de contrato es interesante para un comprador que en el presente no dispone del dinero y quiere asegurarse contra una alza del precio de la acción.

Pongámonos un ejemplo, supongamos que una compañía área (TAME) debe fijar los precios de sus vuelos para sacarlos a las venta, de esta manera un cliente podrá acceder a un vuelo para dentro de tres meses. Evidentemente, éstos precios dependen fuertemente del precio del combustible y una alza en su precio puede provocar fuertes pérdidas a TAME.

Así, una forma de asegurarse contra esta posible alza es comprando opciones sobre el combustible, un contrato para dentro de 3 meses está escrito sobre 42000 galones y cada galón será vendido a un precio de 1$. Supongamos que TAME utiliza mensualmente 4200000 galones de combustible para sus aviones, y que los precios de sus vuelos han sido fijado en base a un precio de 1$ por galón ; si el precio de un galón sube 1 centavo, TAME perderá 42000$. He ahí el interés de las opciones, para TAME es más atractivo comprar 10 opciones que arriesgarse a ese tipo de pérdidas.

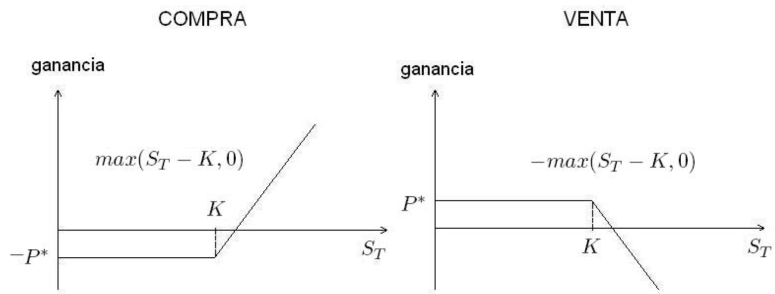

FIG. 2 – Gráfico de las funciones de ganancia (*pay-off*) de un call, en el eje S_T se encuentra el precio de S en la fecha T, la ganancia depende del *strike* K, cuando $S_T > K$ la función "despega". Vemos que las pérdidas para quién vende la opción son ilimitadas, es quién vende la opción (generalmente un banco) que absorbe todo el riesgo en caso de que el precio suba (zona más a la derecha de S_T). Podemos ver en la figura que los gráficos toman en cuenta la prima pagada por TAME (la línea horizontal corta el eje de la *ganancia* en la prima pagada P^*), por esta razón se dice que, en caso de no ejercer la opción, la pérdida de TAME será a lo más la prima pagada.

Dentro de tres meses la opción será ejercida evidentemente si el curso de la acción es superior al *strike*, en ese caso el dueño de la opción ejerce su derecho de comprar la acción (en nuestro ejemplo TAME ejercerá si el galón es cotizado por más de 1$), después de ejercer la opción el subyacente podría ser vendido de inmediato en el mercado, lo cual le produciría una ganancia (*"pay-off"*) igual a la diferencia entre el curso de la acción S_T y el *strike*, mientras que no la ejercerá si esta diferencia es negativa y su ganancia será nula.

TAME tendrá la opción de beneficiarse del precio de 1 $ o de renunciar a este precio si éste sobre el mercado en la fecha es más bajo. Al ejercer su opción, le permite asegurar una producción de vuelos estables en precio. Puesto que TAME es consumidor de combustible, no tiene ningún interés en revender el combustible en el mercado (lo que se conoce como especular, comprar opciones con el objetivo de ganar dinero), su único objetivo es la protección.

Ahora bien, la cuestión central en la gestión de riesgos financieros es aquella del precio sobre el cual las dos partes de tales contratos deben ponerse de acuerdo. Las dos partes afrontan riesgos diferentes : el comprador perderá a lo más la prima pagada por su derecho de ejercer (el precio de la opción), de su parte el vendedor afronta un riesgo que se agranda cuando el mercado esta en alza.

En los mercados financieros se encuentran cierto tipo de agentes llamados *"arbitradores"* su actividad consiste en detectar los productos financieros cuyo precio esta desplazado respecto al que debería ser, teniendo en cuenta otros precios del mercado pueden sacar provecho y realizar ganancias sin tomar ningún riesgo. Este tipo de participantes forzan a los precios a verificar ciertas relaciones de coherencia, lo que conduce a la unicidad de precios de los productos derivados.

Existen algunos productos financieros cuyo precio puede ser deducido verificando tales relaciones sin hacer referencia a ningún modelo (lo que se conoce como **ausencia de oportunidad de arbitraje**), lo que es de vital importancia para el mercado.

Es claro entonces que el precio de una opción no puede ser cualquiera, en los mercados se evidencia además una fuerte coherencia entre los precios de las opciones sobre un mismo activo. Esto es debido a lo que se puede llamar **la ley fundamental de las finanzas de mercados** : *"En un mercando bastante líquido, en donde no haya ni costos de transacción, ni limitaciones sobre la gestión (compra - venta) de activos, no existe oportunidad de arbitraje, es decir que no es posible ganar dinero de manera segura a partir de una inversión inicial nula"*.

La incertidumbre que afecta el subyacente de la opción (activo sobre el cual esta escrito el contrato) es el resultado de pequeños movimientos cotidianos, los cuales pueden ser observados. Esto provee de información que podría ser utilizada para intentar sacar provecho :

- Para definir un modelo para la dinámica del curso del subyacente.
- Para reducir el riesgo final mediante una actitud dinámica y racional, ya que el vendedor de tales opciones (el "trader") siempre tiene la posibilidad de comprar y vender subyacente que financia gracias a la prima recibida por su opción.

Precisamente éste es el mensaje de Black y Scholes en 1973, quienes definieron, gracias a la resolución de una ecuación matemática, el precio de un producto derivado como el "precio de su cobertura", lo que les valió el premio Nobel a Robert Merton y Myron Scholes en 1997 (Fischer Black falleció en 1995).

La idea detrás de esto, es que es posible gracias al modelo propuesto, saber qué porcentaje de la prima será utilizado para comprar el subyacente de la opción y qué porcentaje será guardado en el banco (para obtener una ganancia igual a la tasa de interés pagada por éste), esto se realiza de manera continua, y los días en donde se ejecutan estas transacciones se llaman "días de trading".

El conjunto de días de trading y los respectivos porcentajes se llama **estrategia** y el portafolio así constituido : **autofinanciado** (no se inyecta ni se retira dinero del mismo). De ésta manera, en la fecha de madurez el portafolio tendrá el mismo valor que el *pay-off* de la opción y la opción por parte del vendendor podrá ser saldada sin problemas, se dice entonces que el portafolio *replica* la opción.

El rendimiento de un activo dado tiene dos componentes, una parte determinista llamada tendencia μ que vendría a ser el rendimiento puro y constante si no existiera la parte aleatoria (FIG3, $\sigma = 0\%$) ; y una probabilística, en la cual interviene el movimiento browniano a través de la volatilidad σ, mientras más grande es la volatilidad de un activo más probable es que su precio sufra variaciones fuertes FIG3.

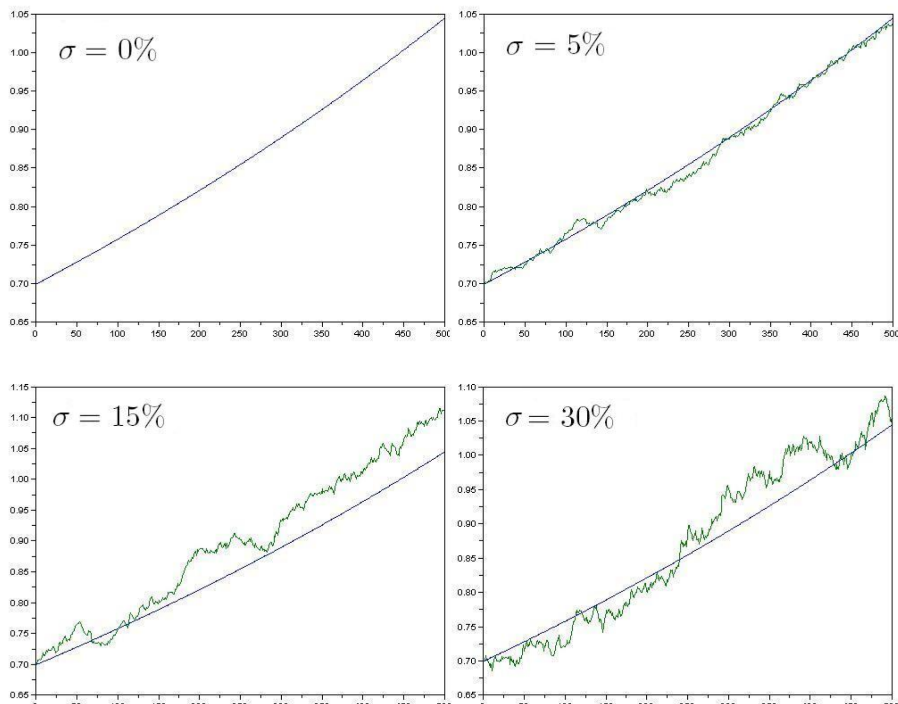

FIG. 3 – Vemos los cursos de un activo sin riesgo con $\sigma = 0\%$(dinero en el banco ganando intereses, curva lisa) y tres activos con diferentes volatilidades, podemos apreciar que cuando la volatilidad crece la variaciones son más fuertes y el comportamiento del activo se aleja de aquel del dinero en el banco.

1.1 Modelo

Sea un espacio de probabilidad filtrado $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$ dotado de un movimiento browniano unidimensional estándar W, la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es la filtración canónica, es decir $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$, lo que se traduce como : la información disponible en la fecha t es generada por el browniano. De hecho, esta información es el precio del activo.

Vamos a suponer que el activo financiero $(S_t)_{t\geq 0}$ sigue una dinámica de tipo browniano geométrico, es decir :

$$S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$$

donde S_0 es el curso inicial del activo, r designa la tasa de interés sin riesgo y es supuesta constante, σ el parámetro de volatilidad.

Este tipo de modelos utilizan una nueva herramienta matemática : el *cálculo estocástico*, que nació gracias a los trabajos del japonés Itô en 1948, quién dió una formula de derivación de una función que tiene como argumento el movimiento browniano (a-priori imposible).

Itô dió una formula para derivar una función $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, es decir C^1 en la primera variable (el tiempo) y C^2 para la segunda (el espacio). Aplicamos la fórmula (diferencial) de Itô (con la notación $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi'_{x_i}$) a la función $f(t,x) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x)$, lo que nos da :

$$df(t, W_t) = f'_x(t, W_t)dW_t + f'_t(t, W_t)dt + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, W_t)dt$$

Los cursos de los activos con y sin riesgo, son entonces :

$$\begin{cases} S_t &=& S_0 + \int_0^t rS_\theta d\theta + \int_0^t \sigma S_\theta dW_\theta, \\ S_0 &>& 0, \\ S_t^0 &=& S_0^0 e^{rt}, \\ S_0^0 &>& 0. \end{cases} \tag{1}$$

El precio de un activo, de acuerdo a la modelización de Black y Scholes, obedece la ecuación diferencial estocástica (1), y el precio de una opción sobre este activo obedece una cierta ecuación diferencial parcial, que en su versión mas simple (suponiendo que los parámetros del modelo son constantes en el tiempo) es la misma que la ecuación del calor.

Ahora vamos a calcular de manera explícita la fórmula para el precio del CALL, su pay-off está definido por la función $h_C(S_T) = (S_T - K)^+$, y el precio no es mas que una actualización del valor esperado de este pay-off, es decir $e^{-rT}\mathbb{E}[h_C(S_T)]$.

El precio será dado en términos de la función de repartición de la ley normal centrada y reducida : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(x) \equiv \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq x)$, Entonces :

$e^{-rT}\mathbb{E}[h_C(S_T)] = e^{-rT}\mathbb{E}[(S_T - K)^+]$, reemplazamos S_T por su dinámica :
$e^{-rT}\mathbb{E}[h_C(S_T)] = e^{-rT}\mathbb{E}[(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} - K)^+]$
sabemos que $W_T = \sqrt{T}\,G$ donde $G \sim \mathcal{N}(0,1)$

definimos $g = \{S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}G} > K\}$ el dominio donde se ejerce la opción, además $G \sim -G \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces :

$$\begin{aligned} e^{-rT}\mathbb{E}[h_C(S_T)] &= e^{-rT}\mathbb{E}[(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma\sqrt{T}G} - K)\mathbb{1}_g] \\ &= S_0\mathbb{E}[e^{\frac{\sigma^2}{2}T-\sigma\sqrt{T}G}\ \mathbb{1}_g] + e^{-rT}K\ \mathbb{P}(g). \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos : $g = \left\{G < \frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\ln(\frac{S_0}{K})}{\sigma\sqrt{T}} := d_0\right\}$.

Entonces $\mathbb{P}(g) = \mathcal{N}(d_0)$. Finalmente :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\frac{\sigma^2}{2}T-\sigma\sqrt{T}G}\ \mathbb{1}_g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\sigma^2}{2}T-\sigma\sqrt{T}x}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{\{x<d_0\}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+\sigma\sqrt{T})^2}\mathbb{1}_{\{x<d_0\}}dx \quad \text{on fait : } y = x+\sigma\sqrt{T} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(y)^2}\mathbb{1}_{\{y<d_0+\sigma\sqrt{T}\}}dy \\ &= \mathcal{N}(d_0+\sigma\sqrt{T} := d_1). \end{aligned}$$

de donde :

$$e^{-rT}\mathbb{E}[h_C(S_T)] = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_0).$$

Gracias al trabajo de todos éstos matemáticos y éstas herramientas se logra dar un precio a los *productos derivados* existentes y a aquellos que se desarrollan actualmente para satisfacer a nuevas necesidades de seguridad contra el riesgo. En ésta área la matemática permite valorizar productos que son altamente delicados y que mueven grandes cantidades de dinero cada día.

Si deseamos ser más realistas, podemos agregar otras componentes al modelo, como costos de transacción, varias limitaciones al mercado, impacto del número de transacciones sobre el precio, etc. Responder a estos nuevos retos es posible, y mientras el modelo describe más fielmente la realidad, las ecuaciones matemáticas se vuelven mucho más complejas y ameritan un trabajo científico más intenso.

Vemos entonces, cómo estas nuevas ideas matemáticas se ajustan para resolver los problemas mas recientes en investigación, y cómo se ha logrado en cierto modo ajustar un comportamiento descrito matemáticamente a un mercado financiero como si fueran leyes físicas.