Introducción a la Teoría de Operadores Lineales

Juan Mayorga-Zambrano, PhD
jrmayorgaz@gmail.com

Junio 2013

Resumen

Este minicurso fue preparado para la I Escuela de Verano de Matemática y Física y ha sido adaptado a partir de [3]. Sin tratar de ser autocontenido se presenta de una forma fluida. Se parte de los elementos de Álgebra Lineal en espacios de dimensión infinita, se hace una breve presentación de los espacios normados para terminar con ejemplos de operadores lineales acotados de común uso en Ingeniería. Varios ejemplos son desarrollados con apoyo de Maxima, un Sistema Computacional Algebraico del tipo software libre.

Contenidos

1. Espacios vectoriales

A grosso modo, un espacio vectorial es un conjunto donde se pueden sumar sus elementos y, adicionalmente, se los puede multiplicar por escalares de manera que se cumplen las propiedades usuales de los vectores "físicos", es decir vectores bidimensionales o tridimensionales.

Recordemos que $(V,+)$ es un grupo abeliano si se cumplen las siguientes propiedades.

a) *[Asociatividad aditiva]* Dados $u, v, w \in V$, se tiene que
$$(u+v)+w = u+(v+w). \tag{1.1}$$

b) *[Existencia del neutro aditivo]* Existe un elemento $0 \in V$ tal que
$$u+0 = u, \quad \text{para todo } u \in V. \tag{1.2}$$

c) *[Existencia de inversos aditivos]* Para cada $u \in V$ existe un elemento $v \in V$ tal que
$$u+v = 0. \tag{1.3}$$

d) *[Conmutatividad aditiva]* Dados $u, v \in V$, se cumple que
$$u+v = v+u. \tag{1.4}$$

Definición 1.1. [Espacio vectorial]
Sean $(V,+)$ un grupo abeliano, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ una operación externa. Se dice que $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$, se tiene que

$$(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot u; \tag{1.5}$$
$$\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v; \tag{1.6}$$
$$(\alpha\beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u); \tag{1.7}$$
$$1\cdot u = u. \tag{1.8}$$

Si no hay lugar a confusión se hablará del espacio vectorial V en lugar de $(V,+,\cdot)$.

En la definición anterior, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ se dice que V es un espacio vectorial real; si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ se dice que V es un espacio vectorial complejo. A (1.5) se le refiere como *propiedad distributiva de vector* en tanto que a (1.6) se le refiere como *propiedad distributiva de escalar*.

En este curso consideramos principalmente espacios vectoriales reales. Casi todos los resultados son también válidos espacios vectoriales complejos pero queremos evitar complicaciones innecesarias. Cuando sea necesario se hará explícito que un espacio vectorial trabaja sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.1. El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de las matrices de m filas y n columnas es un espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde,

$$\lambda\in\mathbb{R}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{amn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Ejemplo 1.2. [Espacio vectorial de las funciones reales]
Consideramos el conjunto $\mathcal{F}(I)$ de todas las funciones reales con dominio $I\subseteq\mathbb{R}$. Recordemos que dadas $f,g\in\mathcal{F}(I)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ se definen las funciones $f+g$ y λf mediante

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \qquad x\in I; \tag{1.9}$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad x\in I. \tag{1.10}$$

Con estas operaciones $\mathcal{F}(I)$ es un espacio vectorial.

Es común encontrarse con subconjuntos de espacios vectoriales que son, en sí mismos, espacios vectoriales con las operaciones heredadas de su universo.

Definición 1.2. [Subespacio vectorial]
Sea V un espacio vectorial. Se dice que $W\subseteq V$, $W\neq\emptyset$, es un subespacio vectorial de V si dados $\alpha\in\mathbb{R}$ y $u,v\in W$ se tiene que $\alpha u+v\in W$.

Observación 1.1. El lector puede verificar que en el marco de la Definición 1.2, W es también un espacio vectorial cuando se consideran las operaciones $+$ y $\cdot$ *heredadas* de V.

Ejemplo 1.3. Sea $I\subseteq\mathbb{R}$. No es difícil verificar que

$$\begin{aligned} P(I) &= \{p: I\to\mathbb{R}\,/\,p \text{ es polinomio}\} \\ &= \{p: I\to\mathbb{R}/ \quad \exists a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}: p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

es un subespacio vectorial $\mathcal{F}(I)$.

El siguiente resultado establece que la estructura de espacio vectorial es estable ante intersecciones.

Teorema 1.1. [Intersección de espacios vectoriales]
Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subespacios vectoriales de V. Entonces $U=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ también es un subespacio vectorial de V.

Demostración. Sean $\alpha\in\mathbb{R}$ y $u,v\in U$, arbitrarios. Puesto que $u,v\in V_\lambda$, para todo $\lambda\in\Lambda$, se sigue que

$$\alpha u+v\in V_\lambda, \quad \text{para todo } \lambda\in\Lambda,$$

pues V_λ es subespacio vectorial de V, para cada $\lambda\in\Lambda$. Se concluye que U es subespacio vectorial de V pues $\alpha u+v\in U=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$. □

Observación 1.2. A grosso modo, un **espacio funcional** es un espacio vectorial donde los vectores son funciones (reales o complejas) que cumplen habitualmente con ciertas propiedades de derivabilidad y/o integrabilidad.

Tip de Maxima No. 1.
Los comandos plot2d y wxplot2d permiten crear gráficas bidimensionales. En particular, permiten graficar curvas paramétricas.

Ejemplo 1.4. Sean $-\infty<a<b<\infty$. Sean

$$V_1=\{f\in\mathcal{F}([a,b])\,/\quad f(a)=f(b)=0\}, \qquad V_2=\left\{f\in\mathcal{F}([a,b])\,/\quad \left|\int_a^b f(x)dx\right|<\infty\right\}.$$

Se puede verificar que tanto V_1 como V_2 son subespacios funcionales de $\mathcal{F}([a,b])$. Por el Teorema 1.1, el conjunto

$$V_3=\left\{f\in\mathcal{F}([a,b])\,/\quad \left|\int_a^b f(x)dx\right|<\infty \wedge f(a)=f(b)=0\right\}$$

de las funciones integrables[1] en $[a,b]$ y que se anulan en la frontera también es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([a,b])$. Véase la Figura 1.

[1] El concepto de integrabilidad será supuesto en el sentido de Riemann.

```
(%i1)  f(x):=x*(x-1)*sin(10*x);
```

(%o1) $f(x) := x\,(x-1)\sin(10\,x)$

```
(%i2)  g(x):=x*(exp(x-1)-1)*cos(5*x);
```

(%o2) $g(x) := x\,(\exp(x-1)-1)\cos(5\,x)$

```
(%i3)  h[a](x):= a*f(x)+g(x);
```

(%o3) $h_a(x) := a\,f(x) + g(x)$

```
(%i4)  plot2d([f(x),g(x),h[2](x),h[3](x)],[x,0,1]);
```

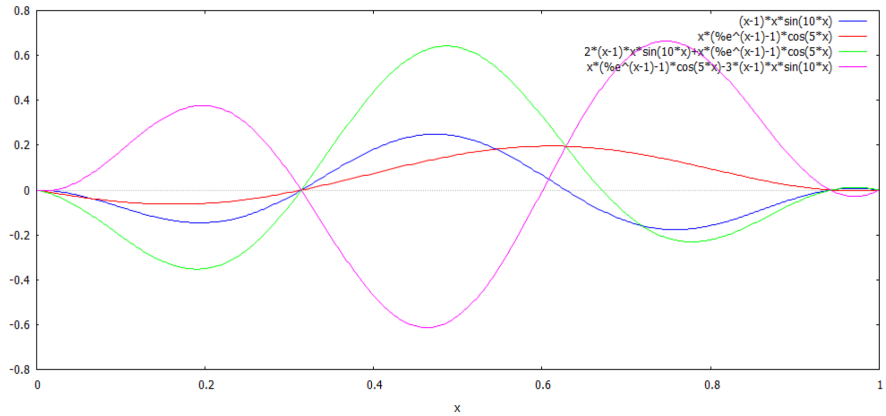

Figura 1: Con $a = 0$ y $b = 1$, se describen $f(x) = x(x-1)\operatorname{sen}(10x)$ (azul), $g(x) = x\cos(5x)(\exp(x-1)-1)$ (rojo), $h_2(x) = 2f(x)+g(x)$ (verde) y $h_{-3}(x) = -3f(x)+g(x)$ (violeta)

Notación 1.1. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}^m$. Por $C^k(\Omega;\Upsilon)$ representaremos el espacio funcional constituido por las funciones $\psi : \Omega \to \Upsilon$ que tienen derivadas continuas al menos hasta orden $k \in \mathbb{N}_*$. Cuando $\Upsilon = \mathbb{R}$ se escribe simplemente $C^k(\Omega)$ en lugar de $C^k(\Omega;\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.5. Sean $-\infty < a < b < \infty$ y $V_0 = C(a,b)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $V_k = C^k(a,b)$ es un subespacio vectorial de V_0. Es claro que $V_\infty \subsetneq \ldots \subsetneq V_{k+1} \subsetneq V_k \subsetneq V_{k-1} \subsetneq \ldots V_1 \subsetneq V_0$, donde $V_\infty = C^\infty(a,b) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(a,b)$ es el espacio vectorial de las funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes sobre (a,b).

En un espacio vectorial V, se llama **combinación lineal** a un vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k v_k, \tag{1.12}$$

donde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y, para cada k, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y $v_k \in V$. Si $N < \infty$ se dice que (1.12) es una combinación lineal **finita** en tanto que si $N = \infty$ se dice que (1.12) es una combinación lineal **infinita**.

Definamos lo que es la cápsula de un subconjunto de un espacio vectorial.

Definición 1.3. [Cápsula / espacio generado]
Dado un subconjunto D de un espacio vectorial V, se llama cápsula de D (o espacio generado por D), denotado $< D >$, al subespacio vectorial de V más pequeño que contiene a D.

No es difícil comprobar que

$$< D > = \bigcap_{U \in \mathcal{W}} U, \tag{1.13}$$

donde $\mathcal{W}$ es el conjunto de los subespacios vectoriales de V que contienen a D. Adicionalmente, se tiene la siguiente caracterización que establece que la cápsula de un conjunto está constituido por todas las combinaciones lineales finitas de elementos del conjunto.

Proposición 1.1. [Caracterización de la cápsula]

Sean V un espacio vectorial y $D \subseteq V$. Se tiene que $u \in < D >$ ssi existen $v_1, v_2, \ldots, v_n \in D$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n v_n$.

Tenga presente que la cápsula de D está formada por las combinaciones lineales finitas de elementos de D.

Ejemplo 1.6. Sean $V = P_3(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual a 3 y el conjunto $D = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq V$, donde, para $x \in \mathbb{R}$,

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + x^2, \qquad p_3(x) = 1 + x^3.$$

Aplicando la Proposición 1.1 se encuentra que $< D >$ está formado por los polinomios de la forma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, donde $a - b - c - d = 0$.

Cuando dos vectores físicos u y v no son múltiplos el uno del otro, no están sobre la misma línea recta (trazada en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$) y se dice en este caso que u y v son linealmente independientes. Este concepto se puede generalizar para conjuntos de vectores en un espacio vectorial general.

Definición 1.4. [Independencia lineal]
Un subconjunto finito $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de un espacio vectorial V, es linealmente independiente (abreviado **l.i.**) si para $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0$ implica que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. En general, un conjunto $R \subseteq V$ es linealmente independiente si todo subconjunto finito suyo es linealmente independiente. A un conjunto que no es linealmente independiente se dice que es linealmente dependiente (abreviado **l.d.**).

Observación 1.3. De la Definición 1.4 se sigue que que todo conjunto que contiene al vector 0 es l.d. Asimismo todo subconjunto de un conjunto l.i. es también l.i.

Ejemplo 1.7. En el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ consideramos el conjunto $R = \{C_n : n \in \mathbb{N}_*\}$, donde, para $x \in \mathbb{R}$,

$$C_0(x) = 1, \qquad C_n(x) = \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que ningún elemento C_k de R se puede construir como una combinación lineal finita de elementos de $R \setminus \{C_k\}$, se tiene que el conjunto R es l.i.

Ejemplo 1.8. En el espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ consideramos (véase el Ejemplo 1.7) el conjunto $S = \{C_0 + C_1, C_0 + C_2, C_0 + C_3\}$. Hallemos $< S >$. Sea $u \in < S >$, cualquiera. Por la Proposición 1.1, existen coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = \alpha_1(C_0 + C_1) + \alpha_2(C_0 + C_2) + \alpha_3(C_0 + C_3). \tag{1.14}$$

Por otro lado, por lo visto en el Ejemplo 1.7, el conjunto $\{C_0, C_1 C_2, C_3\}$ es l.i. de manera que u se puede escribir como

$$u = aC_0 + bC_1 + cC_2 + dC_3 \tag{1.15}$$

que implica que

$$u(x) = a + b\cos(x) + c\cos(2x) + d\cos(3x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Por (1.14) y (1.15) debe cumplirse el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a, \\ \alpha_1 = b, \\ \alpha_2 = c, \\ \alpha_3 = d, \end{cases}$$

Este sistema tiene solución sólo cuando $-a + b + c + d = 0$. Entonces, puesto que u fue elegido arbitrariamente, se tiene que $< S >= \{u = aC_0 + bC_1 + cC_2 + dC_3 \; / \; -a + b + c + d = 0\}$.

Observación 1.4. En Modelamiento Matemático los espacios vectoriales de dimensión infinita son mucho más interesantes que sus pares de dimensión finita.

Definición 1.5. [Dimensión finita e infinita]
Un espacio vectorial V se dice que tiene dimensión infinita si para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto l.i. con n vectores. Caso contrario, se dice que V tiene dimensión finita.

Los espacios vectoriales se pueden comparar por su dimensión. Para esto es necesario introducir el concepto de base. A grosso modo un conjunto es base de un espacio vectorial si lo genera y es l.i.

Definición 1.6. [Dimensión y bases de Hamel]
Sean V un espacio vectorial y $B \subseteq V$. Se dice que B es una base de Hamel de V si B es l.i. y $< B >= V$. En este caso, la dimensión de V es $\dim(V) = \#(B)$.

Por $\#(A)$ se entiende la cardinalidad del conjunto A.

Observación 1.5. Más adelante se introducirá el concepto de base de Schauder que es más apropiado para las aplicaciones de la Matemática a la Ingeniería. Los conceptos de base de Hamel y base de Schauder coinciden para espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejemplo 1.9. Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$. Como el estudiante recordará, el conjunto fundamental de soluciones de (1.16) es un subespacio n-dimensional del espacio funcional $C^n(\mathbb{R})$. Por ejemplo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto fundamental de soluciones de

$$y'' - \lambda y = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

es $CF =< \{y_1, y_2\} >$ donde, para $t \in \mathbb{R}$,

$$y_1(t) = \begin{cases} \cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right), & \text{si } \lambda < 0, \\ 1, & \text{si } \lambda = 0, \\ e^{-t\sqrt{\lambda}}, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \qquad y_2(t) = \begin{cases} \text{sen}\left(t\sqrt{-\lambda}\right), & \text{si } \lambda < 0, \\ t, & \text{si } \lambda = 0, \\ e^{t\sqrt{\lambda}}, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

Para los espacios de dimensión finita, la Definición 1.6 es bastante clara; sin embargo, para un espacio de dimensión infinita uno tiene todo derecho a cuestionar la existencia de una base. Gracias al Lema de Zorn se puede demostrar (véase e.g. [3]) que siempre existe una base de Hamel.

Teorema 1.2. [Existencia de bases]
Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial. Entonces V tiene una base de Hamel.

Ejemplo 1.10. Consideramos $P(\mathbb{R})$, el conjunto de los polinomios reales y $P_n(\mathbb{R})$, el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_*$, definimos $e_n \in P$ mediante $e_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Los conjuntos $B_n = \{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y $B = \{e_i : i \in \mathbb{N}_*\}$, son bases de Hamel para $P_n(\mathbb{R})$ y $P(\mathbb{R})$, respectivamente. Por tanto, $\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$ y $\dim(P(\mathbb{R})) = \aleph_0$.

Ejemplo 1.11. Consideramos el conjunto $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subseteq P_3(\mathbb{R})$ dado por $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x-1$, $p_3(x) = (x-1)^2$, $p_4(x) = (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$. Puesto que B es l.i. y tiene $4 = \dim(P_3(\mathbb{R}))$ elementos es una base de $P_3(\mathbb{R})$.

2. Operadores lineales (I)

En Ingeniería son muy importantes las transformadas de Fourier y de Laplace; estas son ejemplos de operadores lineales. Otra razón por la que las aplicaciones lineales son tan importantes en la Ingeniería es que a menudo es posible aproximar una aplicación no-lineal - que permite modelar algún sistema o fenómeno - con una aplicación lineal (dentro de ciertos parámetros).

Definición 2.1. [Operador lineal. Isomorfismo.]
Sean V y W dos espacios vectoriales. Se dice que $A : V \to W$ es un operador lineal ssi

$$A(\alpha u + v) = \alpha A(u) + A(v), \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R},\ u, v \in V. \tag{2.1}$$

En particular, si $V = W$, se dice que A está definido sobre V. Cuando $W = \mathbb{R}$, se dice A es un *funcional lineal* en V. Cuando A es biyectiva se dice que es un isomorfismo y que los espacios V y W son isomorfos

Observación 2.1. Si no hay lugar a confusión, se puede escribir Au en lugar de $A(u)$, para representar la imagen de $u \in V$ por medio de A. Cuando A es un funcional lineal también se suele denotar $A[u]$.

No es difícil probar el siguiente resultado.

Proposición 2.1. [Espacio de aplicaciones lineales]
Sean V y W dos espacios vectoriales. El conjunto

$$L(V, W) = \{A : V \to W / \quad A \text{ es lineal}\}. \tag{2.2}$$

es un espacio vectorial. Si A es un isomorfismo entonces $A^{-1} \in L(W, V)$.

Ejemplo 2.1. Sean $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$. Es evidente que $A : V \to W$ definida mediante

$$Au = u', \tag{2.3}$$

es un operador lineal que no es un isomorfismo. Por otro lado, la fórmula (2.3) define un operador lineal sobre $U = C^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, la función $D : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$Du = u'(x_0),$$

es un funcional lineal sobre V. En Maxima se puede definir el funcional D de la siguiente manera:

```
(%i1) B(u,x):= diff(depends(u,x),x)[1];
```

(%o1) $\mathrm{B}(u,x) := (\mathrm{diff}(\mathrm{depends}(u,x),x))_1$

```
(%i2) D(u):= B(u,x0);
```

(%o2) $\mathrm{D}(u) := \mathrm{B}(u, x0)$

De manera que

```
(%i3) D(u);
```

(%o3) $\frac{d}{d\,x0}\,\mathrm{u}(x0)$

```
(%i4) D(log);
```

(%o4) $\frac{1}{x0}$

```
(%i5) D(sin);
```

(%o5) $\cos(x0)$

```
(%i6) D(tan);
```

(%o6) $\sec(x0)^2$

Ejemplo 2.2. Sean $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$. Es evidente que $B : W \to V$ definido mediante

$$(Bu)(x) = \int_0^x u(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

es un operador lineal. Por otro lado, la fórmula (2.4) define un operador lineal sobre $U = C^\infty(\mathbb{R})$. Por otro lado, dado $x_0 > 0$, la función $I : W \to \mathbb{R}$ definida por

$$I[u] = \int_0^{x_0} u(t)dt,$$

es un funcional lineal sobre W. En Maxima se puede definir el funcional I de la siguiente manera:

```
(%i1) A(u,x):= integrate(depends(u,t)[1],t,0,x);
```

(%o1) $A(u,x) := \int_0^x (\mathrm{depends}(u,t))_1 dt$

```
(%i2) assume(x0>0);
```

(%o2) $[x0 > 0]$

```
(%i3) I(u):= A(u,x0);
```

(%o3) $I(u) := A(u, x0)$

De manera que

```
(%i4) I(u);
```

(%o4) $\int_0^{x0} u(t) dt$

```
(%i5) I(sin);
```

(%o5) $1 - \cos(x0)$

```
(%i6) I(cos);
```

(%o6) $\sin(x0)$

```
(%i7) I(tan);
```

(%o7) $-\log(\cos(x0))$

Ejemplo 2.3. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $U : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la aplicación lineal definida mediante

$$Up = (a_0, a_1, ..., a_n),$$

donde, para $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, es un isomorfismo.

Definición 2.2. [Núcleo o kernel. Imagen.]
Sea $A : V \to W$ una aplicación lineal. Se denomina núcleo o kernel de A al conjunto $\ker(A) = \{u \in V : \quad Au = 0\}$.
Al rango de A $\mathrm{Rg}(A) = \{w \in W / \quad \exists v \in V : Av = w\}$ se le suele referir como la *imagen* de A.

Ejemplo 2.4. Consideramos el operador $A \in L(\mathrm{C}^1(\mathbb{R}), \mathrm{C}(\mathbb{R}))$ que fue definida en el Ejemplo 2.1 mediante $Au = u'$. En este caso

$$\ker(A) = \left\{ f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) / \quad f \text{ es constante} \right\}.$$

Dada una función $v \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, cualquiera, es claro que la función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$u(x) = \int_0^x v(y)\, dy,$$

está en $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ y verifica $Au = v$. Puesto que v fue elegida arbitrariamente, se sigue que A es sobreyectiva, así que $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{C}(\mathbb{R})$.

En la siguiente Proposición establecemos que una aplicación lineal es inyectiva cuando su kernel es el *singleton* $\{0\}$.

Proposición 2.2. [Kernel, Imagen e Inyectividad]
Sea $A : V \to W$ una aplicación lineal. Se tiene que

i) $\ker(A)$ es un subespacio vectorial de V;
ii) A es inyectiva ssi $\ker(A) = \{0\}$;
iii) La imagen de A es un subespacio vectorial de W.

Demostración. i) Sean $u, v \in \ker(A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, cualesquiera. Se tiene que

$$A(\alpha u + v) = \alpha A(u) + A(v) = 0,$$

de manera que $\alpha u + v \in \ker(A)$. Por la arbitrariedad de u, v y α se concluye que $\ker(A)$ es un subespacio vectorial de V.
ii.a) Supongamos que $\ker(A) = \{0\}$ y probemos que A es inyectiva. Sean $u, v \in V$ tales que $A(u) = A(v)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} A(u) - A(v) &= 0, \\ A(u - v) &= 0, \end{aligned}$$

de manera que $u - v = 0$, es decir $u = v$. Por la arbitrariedad de u y v la aplicación A es inyectiva.
ii.b) Supongamos que A es inyectiva y probemos que $\ker(A) = \{0\}$. Sea $u \in \ker(A) \neq \{0\}$, cualquiera. Se tiene que $Au = 0$ y $A0 = 0$ de manera que, por la inyectividad de A, $u = 0$. Por la arbitrariedad de u se sigue que $\ker(A) = \{0\}$.
iii) Se deja este punto para el lector. □

Ejemplo 2.5. El lector puede verificar con facilidad que los operadores de derivación e integración presentados en los Ejemplos 2.1 y 2.1, respectivamente, no son inyectivos.

3. Valores y vectores propios

El concepto de valor propio es muy importante en Ingeniería; por ejemplo para el análisis de vibraciones, análisis de circuitos eléctricos, en la teoría de elasticidad, crecimiento de poblaciones, etc. Asimismo se utiliza en la aplicación de las cadenas de Markov para la predicción probabilística de eventos futuros.

Definición 3.1. [Valor propio. Vector propio.]
Sea T un operador lineal sobre el espacio vectorial V. Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T si existe un $u \in V \setminus \{0\}$ tal que $Tu = \lambda u$. En este caso se dice que u es un vector propio de T asociado a λ.

Proposición 3.1. [Espacio propio]
Se denomina espacio propio asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ al conjunto $A_\lambda = <\{u \in V : \quad Tu = \lambda u\}>$. Es claro que A_λ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo 3.1. Sea $V = C^\infty(\mathbb{R})$ y L el operador lineal definido sobre V mediante $Lu = \dfrac{d^2}{dx^2}u$. Se tiene que todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio. En efecto,

i) para $\lambda = 0$ se tiene que $A_0 = <\{u_1, u_2\}>$, donde las funciones propias u_1 y u_2 están dadas por

$$u_1(x) = 1, \qquad u_2(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R};$$

ii) para $\lambda > 0$ se tiene que $A_\lambda = <\{u_1, u_2\}>$, donde las funciones propias u_1 y u_2 están dadas por

$$u_1(x) = e^{x\sqrt{\lambda}}, \qquad u_2(x) = e^{-x\sqrt{\lambda}}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

iii) para $\lambda < 0$ se tiene que $A_\lambda = <\{u_1, u_2\}>$, donde las funciones propias u_1 y u_2 están dadas por

$$u_1(x) = \cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right), \qquad u_2(x) = \operatorname{sen}\left(x\sqrt{-\lambda}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.1. [Independencia lineal de vectores propios]
Sea L un operador lineal sobre V. Supóngase que λ_i, $i = 1, 2, \ldots n$, son valores propios de L, distintos dos a dos. Si para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, u_i es un vector propio asociado a λ_i, entonces el conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ coeficientes tales que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Probemos por inducción que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
i) Para $n = 1$ se tiene que $\alpha_1 u_1 = 0$ y, como $u_1 \neq 0$ (por ser vector propio), se sigue que $\alpha_1 = 0$.
ii) Supongamos que

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0. \tag{3.5}$$

Tenemos que probar que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k+1} = 0. \tag{3.6}$$

Supongamos entonces que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0, \tag{3.7}$$

de manera que

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} u_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} u_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0. \tag{3.8}$$

Aplicando L a (3.7) se tiene que

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0. \tag{3.9}$$

Por (3.8) y (3.9) se sigue que

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)u_1 + \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)u_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)u_k = 0,$$

de manera que, por (3.5), se obtiene

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0,$$

pues los λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, son distintos dos a dos. Por tanto, por (3.7),

$$\alpha_{k+1} u_{k+1} = 0,$$

y, como $u_{k+1} \neq 0$ (por ser vector propio), se sigue que $\alpha_{k+1} = 0$, con lo cual se ha probado (3.6). □

4. Espacios normados

El concepto de norma es una generalización de la función módulo (que a su vez generaliza bidimensionalmente la función valor absoluto) para el conjunto $\mathbb{C}$, pues permite medir el tamaño de un vector y la distancia entre vectores que viven en un espacio vectorial.

Definición 4.1. [Norma. Espacio normado]
Se dice que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio normado si V es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una aplicación, llamada norma, que verifica las siguientes propiedades

$$\|u\| \geq 0, \quad \text{para todo } u \in V; \tag{4.10}$$

$$\|u\| = 0 \quad \text{ssi} \quad u = 0; \tag{4.11}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|, \quad \text{para todo } u \in V, \text{ y todo } \alpha \in \mathbb{R}; \tag{4.12}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \text{para todo } u, v \in V. \tag{4.13}$$

Observación 4.1. Si no hay lugar a confusión se dirá que V es el espacio normado en lugar de $(V, \|\cdot\|)$. La desigualdad triangular (4.13) establece que en un triángulo formado en un espacio vectorial normado, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Ejemplo 4.1. Consideramos el espacio $V = \mathbb{R}^n$. Denotamos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Todas las fórmulas que siguen definen normas sobre $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_0 = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Ejemplo 4.2. Sea V el conjunto de todas las sucesiones reales. Dados $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se definen $x + y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, , $\lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Con estas operaciones V es un espacio vectorial. El conjunto $l^2 = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$ es un subespacio vectorial de V. Sobre l^2 se define una norma: $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$.

Una vez que se puede medir distancias en un espacio es posible establecer el concepto de convergencia. Esto lo establecemos en la siguiente definición.

Definición 4.2. [Distancia y convergencia]
Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La distancia entre los vectores $u, v \in V$ está dada es $\operatorname{dist}(u, v) = \|u - v\|$. Se dice que una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ converge al vector $v \in V$ si se cumple que $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$.

Observación 4.2. Las propiedades de un espacio normado $(V, \|\cdot\|_1)$ pueden diferir sustancialmente de las propiedades del espacio normado $(V, \|\cdot\|_2)$; por ejemplo, una sucesión $(v_n) \subseteq V$ podría converger en $(V, \|\cdot\|_1)$ y no en $(V, \|\cdot\|_2)$.

Observación 4.3. En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes, es decir que si una sucesión es convergente en una norma es, de hecho, convergente en cualquier otra norma.

4.1. Teorema de Aproximación de Weierstrass

Supongamos que $-\infty < a < b < \infty$. Consideramos el espacio $V = C([a, b])$. La aplicación $\|\cdot\|_\infty : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)| \tag{4.14}$$

es una norma sobre $C([a, b])$; se la denomina **norma ∞ de Lebesgue**. La denominación se justifica más adelante en la Proposición 4.3. De hecho, el supremo en (4.14) es un máximo (véase e.g. [1, Teo. 3.12]). Es en el espacio normado $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ donde tiene sentido el **Teorema de Aproximación de Weierstrass** que el estudiante aprendió en su curso de Cálculo. Este famoso teorema establece que dada cualquier $f \in C([a, b])$ y dado cualquier grado de aproximación $\epsilon > 0$, se puede hallar un polinomio $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - p(t)| < \epsilon. \tag{4.15}$$

Dado el conjunto de puntos $A = \{(x_i, y_i) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$ tal que los x_i son diferentes y el conjunto l.i. $\{\phi_i \in C([a, b]) : \quad i = 1, \ldots, n\}$, la función $g(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)$, $x \in [a, b]$, interpola A ssi los coeficientes a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, verifican

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Ejemplo 4.3. Ejemplifiquemos el contenido del Teorema de Weierstras. Consideramos el espacio $V = C([-1,1;3,1])$. En este espacio nos interesa aproximar mediante un polinomio a la función determinada por la fórmula

```
(%i1)  f(x):= 1.2921 - 0.8123*exp(x)+0.0496*exp(2*x);
```

(%o1) $f(x) := 1{,}2921 - 0{,}8123 \exp(x) + 0{,}0496 \exp(2x)$
Buscamos un polinomio de la forma $g_4(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$ que coincida con f en los puntos

```
(%i2)  x[1]: -1;  y[1]: f(x[1]), numer;
```

(%o2) -1
(%o3) $0,99998415998497$

```
(%i4)  x[2]: 2;  y[2]: f(x[2]), numer;
```

(%o4) 2
(%o5) $-2,001962027517413$

```
(%i6)  x[3]: 3;  y[3]: f(x[3]), numer;
```

(%o6) 3
(%o7) $4,986686514534318$

```
(%i8)  x[4]: 0;  y[4]: f(x[4]), numer;
```

(%o8) 0
(%o9) $0,5294$

```
(%i10) x[5]: 1;  y[5]: f(x[5]), numer;
```

(%o10) 1
(%o11) $-0,54946314675032$

Calculamos los coeficientes a_k, $k = 1,2,\ldots,5$:

```
(%i12) phi(x,n):= if n=1 then 1 else x^(n-1);
```

(%o12) $\mathrm{phi}(x,n) := \mathrm{if}\, n = 1 \mathrm{then} 1 \mathrm{else} x^{n-1}$

```
(%i13) Phi: matrix(
       [phi(x[1],1),phi(x[1],2),phi(x[1],3),phi(x[1],4),phi(x[1],5)],
       [phi(x[2],1),phi(x[2],2),phi(x[2],3),phi(x[2],4),phi(x[2],5)],
       [phi(x[3],1),phi(x[3],2),phi(x[3],3),phi(x[3],4),phi(x[3],5)],
       [phi(x[4],1),phi(x[4],2),phi(x[4],3),phi(x[4],4),phi(x[4],5)],
       [phi(x[5],1),phi(x[5],2),phi(x[5],3),phi(x[5],4),phi(x[5],5)]
       );
```

(%o13) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i14) Y: transpose(matrix([y[1],y[2],y[3],y[4],y[5]]));
```

(%o14) $\begin{pmatrix} 0,99998415998497 \\ -2,001962027517413 \\ 4,986686514534318 \\ 0,5294 \\ -0,54946314675032 \end{pmatrix}$

```
(%i15) a: invert(Phi).Y, numer;
```

(%o15) $\begin{pmatrix} 0,5294 \\ -0,09881920348516 \\ -0,66164532271963 \\ -0,67590444988249 \\ 0,35750582933696 \end{pmatrix}$

```
(%i16) a1: submatrix(2,3,4,5,a)[1][1];
```

(%o16) $0,5294$

```
(%i17) a2: submatrix(1,3,4,5,a)[1][1];
```

(%o17) $-0,09881920348516$

```
(%i18) a3: submatrix(1,2,4,5,a)[1][1];
```

(%o18) $-0,66164532271963$

```
(%i19) a4: submatrix(1,2,3,5,a)[1][1];
```

(%o19) $-0,67590444988249$

```
(%i20) a5: submatrix(1,2,3,4,a)[1][1];
```

(%o20) $0,35750582933696$

De manera que el polinomio interpolante es

```
(%i21) g4(x):= a1+a2*x+a3*x^2+a4*x^3+a5*x^4;
```

(%o21) $\mathrm{g4}(x) := a1 + a2\,x + a3\,x^2 + a4\,x^3 + a5\,x^4$

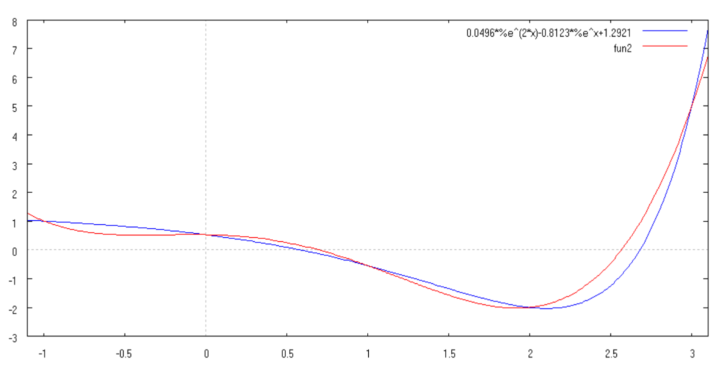

Figura 2: La señal f (azul) y el polinomio interpolante g_4 (rojo).

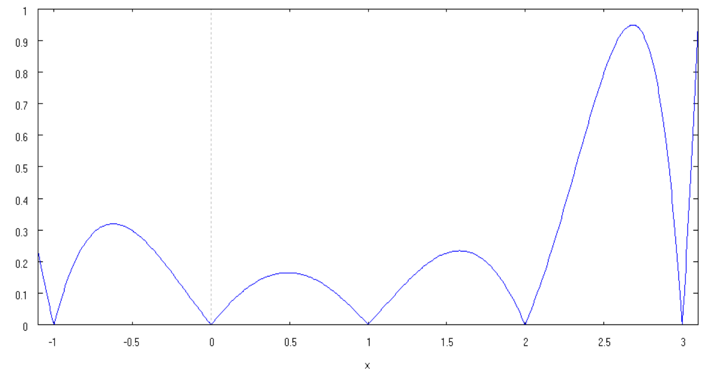

Figura 3: Gráfico de $|f - g_4|$. El punto más alto de la gráfica provée el valor de la distancia entre f y g_4.

4.2. Continuidad de aplicaciones

La continuidad de una aplicación entre espacios normados se define de forma análoga a como se establece la continuidad de funciones reales y complejas.

Definición 4.3. [Continuidad de aplicaciones]
Sean V y W dos espacios normados y $L : V \to W$. La aplicación L es continua en $v_0 \in V$ ssi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad \|v - v_0\| < \delta \implies \quad \|L(v) - L(v_0)\| < \epsilon. \tag{4.17}$$

Observación 4.4. La relación (4.17) establece que una aplicación es continua cuando pequeñas perturbaciones entorno al punto de referencia v_0 provocan pequeñas perturbaciones en $L(v_0)$.

Proposición 4.1. [Continuidad de la norma]
Sea V un espacio normado. Se cumple, para todo $u, v \in V$, que $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$. Consecuentemente, la norma es una aplicación continua.

Ejemplo 4.4. Ejemplifiquemos el contenido de la Proposición 4.1. Consideremos el espacio $V = C([0,1])$. Tomemos como señal original la función $f \in C([0,1])$ definida por la fórmula

```
(%i1)  f(x):= 2.5*x*(1-x);
```

(%o1) $f(x) := 2{,}5\, x\,(1 - x)$
A partir de su gráfica (véase la Figura 4) es claro que $\|f\|_\infty = 0{,}625$.

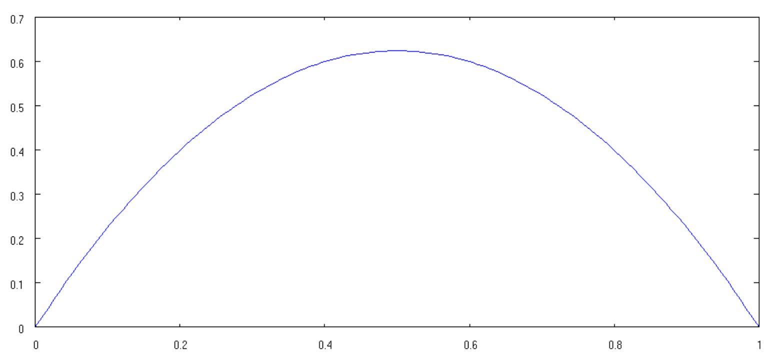

Figura 4: La señal determinada por $f(x) = 2{,}5x(1 - x)$.

Tomemos como perturbación a la función $\epsilon \cdot g \in C([0,1])$ definida por

```
(%i3)  g(x):= exp(x)*sin(40*x)/5;
```

(%o3) $g(x) := \dfrac{\exp(x)\sin(40x)}{5}$

```
(%i4)  eps: 0.1;
```

(%o4) 0,1

A partir de la gráfica (véase la Figura 5) podemos estimar que $\|g\|_\infty \approx 0{,}530635$ de manera que $\|\epsilon\, g\| \approx 0{,}0530635$.
A partir de la gráfica de la señal perturbada (véase la Figura 6) estimamos que $\|f + \epsilon\, g\|_\infty \approx 0{,}657671$ de manera que, ante una perturbación de tamaño $\|\epsilon\, g\| = 0{,}0530635$, la norma de la señal original ha sido perturbada en $\left|\|f\| - \|f + \epsilon\, g\|\right| \approx |0{,}625 - 0{,}657671| = 0{,}032671$.

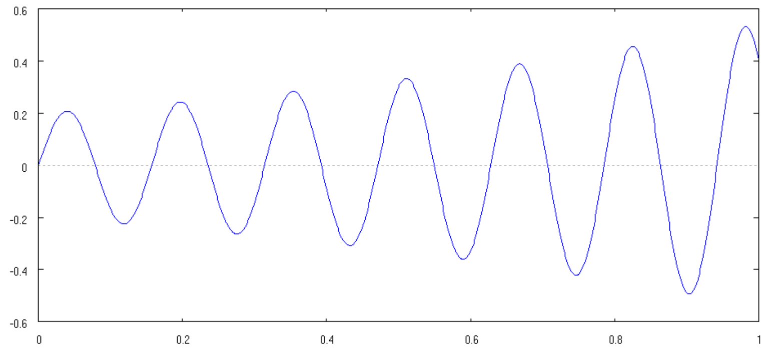

Figura 5: La señal determinada por $g(x) = \exp(x) * \mathrm{sen}(40 * x)/5$.

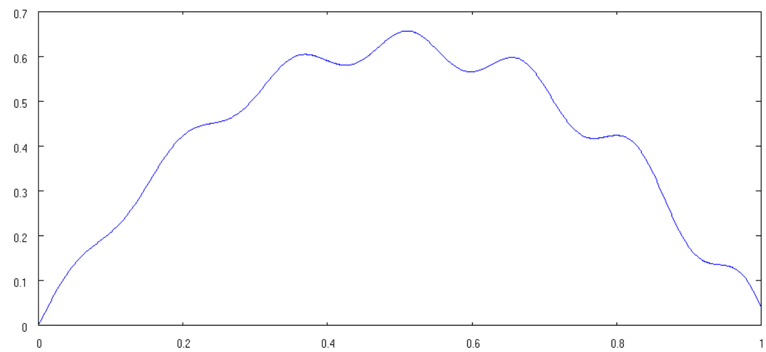

Figura 6: La señal determinada por $(f + \epsilon g)(x) = 2{,}5x(1-x) + \epsilon \exp(x) * \mathrm{sen}(40 * x)/5$.

4.3. Normas de Lebesgue

Sea $1 \le p < \infty$ y supongamos que $-\infty < a < b < \infty$. Consideramos nuevamente el espacio $V = C([a,b])$ pero ahora con la aplicación $\|\cdot\|_p$ definida mediante

$$\|u\|_p = \left(\int_a^b |u(t)|^p\right)^{1/p}. \tag{4.18}$$

Se puede probar, con ayuda de la desigualdad de Hölder[2], que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre $C([a,b])$; se le denomina **norma p de Lebesgue**.

Proposición 4.2. [Desigualdad de Hölder]
Supongamos que $-\infty < a < b < \infty$ y que $p, p' \in [1,\infty]$ son **conjugados**, es decir que cumplen $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Entonces se cumple la desigualdad de Hölder

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_{p'}, \quad \text{para todo } u, v \in C([a,b]). \tag{4.19}$$

Observación 4.5. No es indispensable que la función u sea continua en $[a,b]$ para que la fórmula (4.18) tenga sentido.

En la siguiente Proposición se establece la relación entre las normas ∞ y p de Lebesgue.

Proposición 4.3. [Relación entre las normas ∞ y p de Lebesgue]
Sea $u \in C([a,b])$. Se tiene que $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$, es decir $\sup_{t\in[a,b]} |u(t)| = \lim_{p\to\infty} \left(\int_a^b |u(t)|^p\right)^{1/p}$.

Ejemplo 4.5. Consideramos la función $u \in C([1{,}0, 4{,}0])$ dada por

```
(%i1)  u(t):= log(t)*sin(10*t);
```

(%o1) $\mathrm{u}(t) := \log(t)\sin(10\,t)$
Véase la Figura 7. El valor de $\|u\|_\infty$ es aproximadamente

```
(%i3)  Ninfty: 1.365;
```

(%o3) 1,365

[2]Para probar la desigualdad de Hölder se necesita la **desigualdad de Young**

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \quad \text{para todo } a, b \ge 0,$$

que, a su vez, es consecuencia de la concavidad de la función logarítmica.

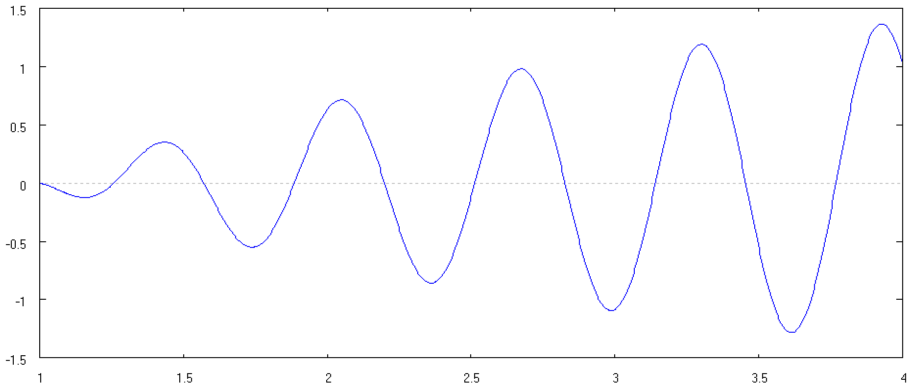

Figura 7: La función $u : [1,4] \to \mathbb{R}$ dada por $u(t) = \ln(t)\,\mathrm{sen}(10t)$.

El valor de $\|u\|_p$ está definido por (4.18):

```
(%i4)  N(p):= quad_qag(abs(u(t))^p,t,1.0,4.0,3)^(1/p);
```

(%o4) $\quad \mathrm{N}(p) := \mathrm{quad\_qag}\left(|\mathrm{u}(t)|^p, t, 1{,}0, 4{,}0, 3\right)^{\frac{1}{p}}$

Ejemplifiquemos la Proposición 4.3; para ello definimos el error relativo (en porcentaje):

```
(%i5)  e(p):= 100*abs(N(p)[1]-Ninfty)/abs(Ninfty);
```

(%o5) $\quad \mathrm{e}(p) := \dfrac{100\,\left|(\mathrm{N}(p))_1 - Ninfty\right|}{|Ninfty|}$

Se tiene que

```
(%i6)  for p:1 thru 2101 step 300 do
           display(N(p)[1]);
```

$\mathrm{N}(1)(1) = 1{,}648813571180869$
$\mathrm{N}(301)(1) = 1{,}348979876499674$
$\mathrm{N}(601)(1) = 1{,}357715135779118$
$\mathrm{N}(901)(1) = 1{,}360861925365285$
$\mathrm{N}(1201)(1) = 1{,}362505940996866$
$\mathrm{N}(1501)(1) = 1{,}363522980117027$
$\mathrm{N}(1801)(1) = 1{,}364217045609398$
$\mathrm{N}(2101)(1) = 1{,}364722251259739$
(%o6) *done*

```
(%i7)  for p:1 thru 2101 step 300 do
           display(e(p));
```

$\mathrm{e}(1) = 20{,}79220301691349$
$\mathrm{e}(301) = 1{,}17363542126928$
$\mathrm{e}(601) = 0{,}53368968651154$
$\mathrm{e}(901) = 0{,}30315565089484$
$\mathrm{e}(1201) = 0{,}18271494528457$
$\mathrm{e}(1501) = 0{,}10820658483319$
$\mathrm{e}(1801) = 0{,}057359296014794$
$\mathrm{e}(2101) = 0{,}020347893059413$
(%o7) *done*

Observe que el error cometido al aproximar $\|u\|_\infty$ con $\|u\|_{2101}$ es aproximadamente 0,0203 %.

4.4. Bases de Schauder

Con ayuda del Lema de Zorn, se establece que todo espacio vectorial posée una base de Hamel. Sin embargo, este resultado no provée ninguna información sobre la naturaleza de dicha base y, de hecho, se pueden encontrar bases de Hamel que no son numerables de manera que no hay garantía de que se pueda obtener una expansión de la forma

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k. \tag{4.20}$$

Por ello, cuando el universo de estudio es un espacio normado o un espacio Euclidiano, es indispensable establecer un nuevo concepto de base.

Para un espacio vectorial de dimensión finita existe un único concepto de base: un conjunto finito linealmente independiente tal que si se le añade cualquier otro vector deja de ser linealmente independiente. Esta noción no se puede generalizar a espacios de dimensión infinita. Sin embargo, definiremos el concepto de base teniendo como norte la existencia de sumas infinitas de la forma (4.20).

Definición 4.4. [Base de Schauder]
Sea V un espacio normado. Se dice que una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ l.i. es una base de Schauder de V si dado cualquier $u \in V$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n. \tag{4.21}$$

Observación 4.6. La igualdad (4.21) es equivalente a $\lim\limits_{m\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n u_n \right\| = 0.$

Proposición 4.4. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ una base de Schauder del espacio normado V. Se tiene que $V = \overline{<\{u_n : n \in \mathbb{N}\}>}$.

Entonces una base de Schauder permite generar cualquier vector mediante combinaciones lineales infinitas.

Demostración. Sea $v \in V$, cualquiera. Puesto que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para V, existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n. \tag{4.22}$$

Ahora definimos para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$v_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n. \tag{4.23}$$

Puesto que en (4.23) se tiene una combinación lineal finita, se tiene que $v_N \in <\{u_n : n \in \mathbb{N}\}>$, para todo $N \in \mathbb{N}$, y entonces, por (4.22), se tiene que $v \in \overline{<\{u_n : n \in \mathbb{N}\}>}$. Por la arbitrariedad de v se sigue que $V \subseteq \overline{<\{u_n : n \in \mathbb{N}\}>}$. □

El ambiente natural en una gran cantidad de aplicaciones del Análisis Matemático a la Ingeniería es algún espacio Euclidiano.[3] Allí, bajo condiciones apropiadas, se puede probar la existencia de bases de Schauder ortonormales. Por su importancia tienen nombre propio:

Definición 4.5. [Base ortogonal. Base Hilbertiana]
Sea V un espacio Euclidiano. Se dice que una sucesión $B = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ es una base ortogonal de V si es una base de Schauder de V y es es ortogonal.

Observación 4.7. Si, adicionalmente, B es ortonormal se dice que B es una base Hilbertiana de V. En este caso, dado $u \in V$ se puede escribir

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \tag{4.24}$$

y se dice que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de **coeficientes de Fourier** de u y que (4.24) es la **serie de Fourier** de u (en la base B).

Teorema 4.1. [Cálculo de coeficientes de Fourier. Igualdad de Parseval]
Sea $B = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base Hilbertiana del espacio Euclidiano V. Entonces, dado $u \in V$ se tiene $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, donde $\alpha_n = (u, u_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además se cumple la igualdad de Parseval

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2. \tag{4.25}$$

5. Operadores lineales (II)

5.1. Equivalencia entre acotamiento y continuidad

Empecemos por caracterizar a las aplicaciones lineales continuas.

Teorema 5.1. [Aplicaciones lineales continuas]
Sean V y W dos espacios normados. Una aplicación lineal $F : V \to W$ es continua ssi es **acotada**, es decir si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|F(u)\|_W \le c\|u\|_V, \quad \text{para todo } u \in V. \tag{5.26}$$

Observación 5.1. La denominación "acotada" en el Teorema 5.1 tiene que ver con el hecho de que si $A \subseteq V$ es acotado, entonces $F(A) \subseteq W$ también es acotado.

Demostración. Para $F = 0$ el resultado es inmediato. Consideramos entonces que $F \neq 0$.

i) Supongamos que F es acotada. Sean $u_0 \in V$ y $\epsilon > 0$, cualesquiera. Entonces, puesto que F es lineal, se tiene para todo $u \in B(u_0, \delta)$, $\delta = \epsilon/c$, que

$$\begin{aligned}
\|F(u) - F(u_0)\|_W &= \|F(u - u_0)\|_W \\
&\le c\,\|u - u_0\|_V \\
&< c\delta \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de u_0 y ϵ se sigue que F es continua en V.

ii) Supongamos, ahora, que F es continua en V. Sea $u_0 \in V$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|u - u_0\|_V \le \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|F(u) - F(u_0)\|_W \le \epsilon. \tag{5.27}$$

En particular, podemos tomar

$$u = u_0 + \frac{\delta}{\|v\|} v,$$

[3] En este caso la norma es generada por un producto escalar mediante $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

I ESCUELA DE VERANO DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

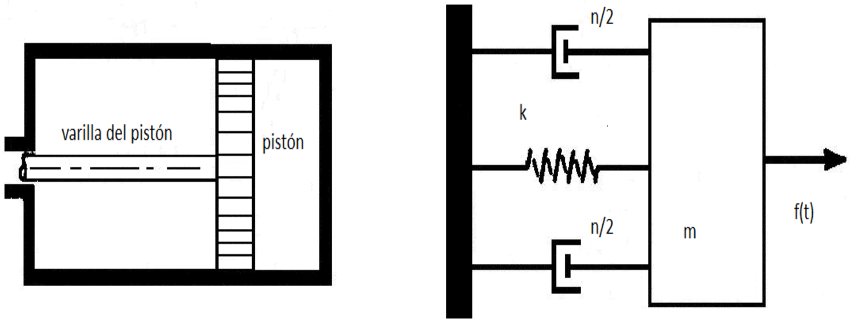

Figura 8: Esquema básico de un pistón.

donde $v \in V \setminus \{0\}$, es arbitrario. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq \|F(u) - F(u_0)\|_W \\ &= \|F(u - u_0)\|_W \\ &= \left\| F\left(\frac{\delta}{\|v\|} v\right) \right\|_W \\ &= \frac{\delta}{\|v\|} \|F v\|, \end{aligned}$$

de donde, tomando $c = \epsilon/\delta$, se sigue que

$$\|F(v)\|_W \leq c\|v\|_V, \quad \text{para todo } v \in V.$$

□

Observación 5.2. El espacio de operadores lineales continuos de un espacio normado V en un espacio normado W, denotado $\mathcal{L}(V, W)$ constituye un espacio vectorial. Cuando $V = W$ se denota $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$.

Ejemplo 5.1. [Movimiento vibratorio forzado amortiguado]
Consideramos un sistema resorte-masa como una idealización del movimiento de un pistón y su varilla donde hay amortiguamiento viscoso entre el pistón y la pared por la que desliza. Si suponemos que la varilla del pistón se comporta elásticamente entonces un modelo matemático del sistema puede establecerse al considerarse que la fuerza de restauración elástica es proporcional al desplazamiento (con constante de proporcionalidad $k > 0$) y que la resistencia viscosa es proporcional a la velocidad de desplazamiento (con constante de proporcionalidad $\eta > 0$):

$$m x''(t) + \eta x'(t) + k x(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{5.28}$$

donde f representa la fuerza externa que provoca el movimiento del pistón. Véase la Figura 8.
Para la ecuación diferencial (5.28) consideramos las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \tag{5.29}$$
$$x'(0) = 0, \tag{5.30}$$

y supondremos que las constantes positivas m, η y k son tales que $\eta^2 - 4mk > 0$, de manera que la la ecuación

$$m\lambda^2 + \eta\lambda + k = 0,$$

tiene dos soluciones reales distintas $\lambda_2 > \lambda_1$. Consideramos ahora el operador

$$L : \mathrm{C}([0, \infty)) \to \mathrm{C}([0, \infty))$$

definido mediante

$$(L u)(t) = \frac{1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \left(e^{\lambda_2 (t-\tau)} - e^{\lambda_1 (t-\tau)} \right) u(\tau) d\tau, \qquad t \geq 0. \tag{5.31}$$

El lector puede verificar que L es un operador lineal y que si $f \in \mathrm{C}([0, \infty))$ entonces la solución del problema de valor inicial (5.28)-(5.30) es $L f$, es decir, que el movimiento del pistón está definido por

$$x(t) = \frac{1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \left(e^{\lambda_2 (t-\tau)} - e^{\lambda_1 (t-\tau)} \right) f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

El operador L no es continuo en el espacio $(\mathrm{C}([0, \infty)), \|\cdot\|_\infty)$ ni en el espacio $(\mathrm{C}([0, \infty)), \|\cdot\|_2)$.

Ejemplo 5.2. Dado $T > 0$, el operador

$$M : \mathrm{C}([0, T]) \to \mathrm{C}([0, T])$$

definido por

$$(M u)(t) = \frac{1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^t \left(e^{\lambda_2 (t-\tau)} - e^{\lambda_1 (t-\tau)} \right) u(\tau) d\tau, \qquad t \in [0, T],$$

es lineal continuo en $(\mathrm{C}([0,T]),\|\cdot\|_\infty)$ y en $(\mathrm{C}([0,T]),\|\cdot\|_2)$. Además, dada $f\in\mathrm{C}([0,T])$, Mf es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} m x''(t)+\eta x'(t)+kx(t)=f(t), & t\in[0,T],\\ x(0)=0, \\ x'(0)=0. \end{cases}$$

Verifiquemos la continuidad de M en $(\mathrm{C}([0,T]),\|\cdot\|_2)$:

$$\begin{aligned} \|Mu\|_2^2 &= \int_0^T\left[\frac{1}{m(\lambda_2-\lambda_1)}\int_0^t\left(e^{\lambda_2(t-\tau)}-e^{\lambda_1(t-\tau)}\right)u(\tau)d\tau\right]^2dt\\ &\leq \frac{1}{m^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}\int_0^T\left[\left(\int_0^t(e^{\lambda_2(t-\tau)}-e^{\lambda_1(t-\tau)})^2d\tau\right)^{1/2}\cdot\left(\int_0^t|u(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}\right]^2dt\\ &\leq \frac{\|u\|_2^2}{m^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}\int_0^T\int_0^t(e^{\lambda_2(t-\tau)}-e^{\lambda_1(t-\tau)})^2d\tau dt\\ &\leq \frac{\alpha^2\|u\|_2^2}{m^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}, \end{aligned}$$

donde

$$\alpha^2=\int_0^T\int_0^t(e^{\lambda_2(t-\tau)}-e^{\lambda_1(t-\tau)})^2d\tau\,dt,$$

de manera que

$$\|Mu\|_2\leq\frac{\alpha}{m(\lambda_2-\lambda_1)}\|u\|_2,\quad \text{para todo } u\in\mathrm{C}([0,T]).$$

Observación 5.3. Dado un espacio normado V, se denomina **espacio dual** de V a

$$V'=\mathcal{L}(V,\mathbb{R}). \tag{5.32}$$

Entonces, el dual de V está formado por todos los funcionales lineales continuos definidos sobre V.

Tenga presente que se puede cambiar c por cualquier constante $k>c$ en (5.26). Por otro lado, podemos intentar reempazar c por constantes más pequeñas pero se alcanzará un punto crítico a partir del cual no se puede disminuir más.

Teorema 5.2. [Norma de un operador lineal acotado]
Sean V y W espacios normados. Para $F\in\mathcal{L}(V,W)$ se denota

$$\|F\|=\sup_{u\neq0}\frac{\|F(u)\|_W}{\|u\|_V}=\sup_{\|u\|=1}\|F(u)\|_W. \tag{5.33}$$

La fórmula (5.33) define una norma sobre el espacio vectorial $\mathcal{L}(V,W)$. Adicionalmente se tiene que

$$\|F\|=\inf\{c>0:\|F(u)\|_W\leq c\|u\|_V,\text{ para todo } u\in V\}. \tag{5.34}$$

Por (5.26) y (5.34) se sigue el siguiente Corolario.

Corolario 5.1. Bajo las condiciones del Teorema 5.2 se sigue que

$$\|Fu\|_W\leq\|F\|\|u\|_V,\quad\text{para todo } u\in V. \tag{5.35}$$

Ejemplo 5.3. [Integral definida]
Consideremos el espacio $\mathrm{C}([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Definimos el funcional $F:\mathrm{C}([a,b])\to\mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$F(u)=\int_a^b u(t)dt,\qquad u\in\mathrm{C}([a,b]).$$

De manera que $F(u)$ es la integral definida de u en el intervalo $[a,b]$. Es claro que F es un funcional lineal. Puesto que

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left|\int_a^b u(t)dt\right|\\ &\leq (b-a)\cdot\max_{t\in[a,b]}|u(t)|\\ &= (b-a)\|u\|_\infty, \end{aligned}$$

se tiene que F es un funcional lineal acotado sobre $\mathrm{C}([a,b])$ y además, por (5.34), se sigue que

$$\|F\|\leq b-a. \tag{5.36}$$

Consideremos ahora la función $u_0\in\mathrm{C}([a,b])$ definida mediante

$$u_0(t)=1,\qquad t\in[a,b].$$

Es claro que $\|u_0\|_\infty=1$. Se tiene entonces, por (5.33), que

$$\|F\|\geq|F(u_0)|=\int_a^b 1\cdot dt=b-a. \tag{5.37}$$

Por (5.36) y (5.37) se sigue que

$$\|F\|=b-a.$$

Ejemplo 5.4. [Operadores de Hilbert-Schmidt]

Sea $K \in \mathrm{L}^2([a,b]\times[a,b])$, es decir, $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que se verifica $C = \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\,dt < \infty$. Sobre $H = \mathrm{L}^2(a,b)$ consideramos el operador $T : H \to H$ definido mediante

$$(Tu)(s) = \int_a^b K(s,t)\,u(t)dt. \tag{5.38}$$

Se dice que $K = K(s,t)$ es el **kernel** o **núcleo** del operador de Hilbert-Schmidt T. El operador T es acotado. En efecto, por la desigualdad de Cauchy - Schwartz, se tiene para $u \in H$ que

$$\|Tu\|_2 = \left(\int_a^b |(Tu)(s)|^2 ds\right)^{1/2} = \left(\int_a^b \left|\int_a^b K(s,t)\,u(t)dt\right|^2 ds\right)^{1/2} \leq C^{1/2}\cdot\|u\|_2,$$

de manera que

$$\|T\| \leq C^{1/2}.$$

Se dice que el operador T es autoadjunto si y sólo si tiene **núcleo simétrico**, es decir si para casi[4] todo $s,t \in [a,b]$, se cumple la relación

$$K(s,t) = K(t,s). \tag{5.39}$$

Los operadores de Hilbert-Schmidt tienen múltiples aplicaciones en Ingeniería y en Física-Matemática, en particular, en Mecánica Cuántica (véase e.g. [6]). Un operador de Hilbert-Schmidt es, de hecho, más que acotado, es un operador compacto (véase e.g. [4, Theorem VI.22]), es decir que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ está acotada, entonces $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ posée una subsucesión convergente.

5.2. Transformada de Fourier

Vamos a suponer que $I \subseteq \mathbb{R}$ es $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$ ó $\mathbb{R}$ y que $p \geq 1$. Se define el espacio de **funciones** p**-integrables** sobre I como

$$\Lambda^p(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} : \quad \int_I |f(t)|^p dt < \infty \right\}. \tag{5.40}$$

Recalcamos que para que la definición de $\Lambda^p(I)$ sea estrictamente correcta, la integral que aparece en (5.40) debe ser calculada en el sentido de Lebesgue y no en el sentido de Riemann.

Se define sobre $\Lambda^p(I)$ una relación de equivalencia mediante

$$u \sim v \quad \text{ssi} \quad \int_I |u(t)-v(t)|^p dt = 0. \tag{5.41}$$

Se define el espacio de Lebesgue $\mathrm{L}^p(I)$ como

$$\mathrm{L}^p(I) = \{[u] : u \in \Lambda^p(I)\}, \tag{5.42}$$

donde $[u]$ representa la clase de equivalencia de $u \in \Lambda^p(I)$. A grosso modo la clase $[u]$ está formada por todas funciones v que son p-integrables y tales que $u(t) = v(t)$ en casi todo punto $t \in I$ de manera que la integral en (5.41) se anula. Por esta razón, es habitual abusar de la notación escribiendo u en lugar de $[u]$.

Definición 5.1. [Transformada de Fourier]
Sea $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La transformada de Fourier de f se define como la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{5.43}$$

La transformada de Fourier es una herramienta para el Análisis de Señales. En este contexto ingenieril, habitualmente se refiere a la variable ω como la **frecuencia de la señal** f que depende del tiempo t. Al gráfico de la función $\omega \mapsto |\hat{f}(\omega)|$ se le refiere como el **espectro de amplitud**. Es común denotar

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega), \tag{5.44}$$

y a veces por facilidad se escribe

$$\mathscr{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Observación 5.4. Por (5.43) es claro que si f es par, entonces $\hat{f}$ toma sólo valores reales. Por otro lado, si f es impar, entonces $\hat{f}$ toma sólo valores imaginarios.

Ejemplo 5.5. Consideramos la función $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ definida por la fórmula

```
(%i1)   f(t):= (2/%pi)*t/(t^4+4);
```

(%o1) $\mathrm{f}(t) := \dfrac{\frac{2}{\pi}\,t}{t^4+4}$

Puesto que f es impar, sabemos que su transformada de Fourier toma sólo valores imaginarios. Aplicamos (5.43) para calcular su transformada de Fourier:

[4] Esto quiere decir, a grosso modo que el área de la región $U = \{(s,t) \in [a,b]\times[a,b] : K(s,t) \neq K(t,s)\}$ es cero. Esto incluye el caso en que $U = \emptyset$, en cuya situación se reemplaza la frase "casi todo" por "todo".

```
(%i2) F1: integrate(f(t)*exp(-%i*w*t),t,minf,inf);
```

Is w positive, negative, or zero? p;

(%o2) $-i e^{-w}\sin(w)$

```
(%i3) F2: integrate(f(t)*exp(-%i*w*t),t,minf,inf);
```

Is w positive, negative, or zero? n;

(%o3) $-i e^{w}\sin(w)$

De manera que $\hat{f}$ está dada por

```
(%i4) F(w):= -%i*sin(w)*%e^(-abs(w));
```

(%o4) $\mathrm{F}(w) := (-i)\sin(w)\, e^{-|w|}$

Definición 5.2. [Transformada inversa de Fourier]
Sea $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Entonces la transformada inversa de Fourier de g se define como la función $\check{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{5.45}$$

Es común denotar

$$\mathscr{F}^{-1}[g](t) = \check{g}(t). \tag{5.46}$$

Nos cuestionamos ahora para que valores de p la relación

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{5.47}$$

define a $\mathscr{F}$ como un operador con dominio en $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ y, en tal caso, cuál sería el codominio. Empecemos considerando el caso $p = 2$. El siguiente resultado establece que la energía de una señal es $1/(2\pi)$ veces la energía de su espectro de amplitud.

Teorema 5.3. [Teorema de Pancherel]
Sea $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Entonces $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ y se tiene que

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\cdot\|f\|_2, \tag{5.48}$$

de manera que $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \mathrm{L}^2(\mathbb{R}))$ con

$$\|\mathscr{F}\| = \sqrt{2\pi}. \tag{5.49}$$

Para una demostración de este resultado puede verse e.g. [2]. El siguiente teorema es una interpolación de los Teoremas **??** y 5.3.

Teorema 5.4. [Desigualdad de Hausdorff - Young]
Sean $1 \le p \le 2$ y $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$. Entonces,

$$\|\hat{f}\|_{p'} \le (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\cdot\|f\|_p. \tag{5.50}$$

De manera que $\mathscr{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R}))$ con

$$\|\mathscr{F}\| \le (2\pi)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{5.51}$$

Para una demostración de este resultado puede verse e.g. [5].

6. Ejercicios propuestos

1) Pruebe que el conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de las matrices de $m \times n$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas en el Ejemplo 1.1

2) Pruebe que el conjunto $\mathcal{F}(I)$ de todas las funciones reales con dominio $I \subseteq \mathbb{R}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas en el Ejemplo 1.2.

3) Sea V un espacio vectorial. Suponga que W es un subconjunto no-vacío de V que verifica que

$$\alpha u + v \in W, \qquad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ para todo } u, v \in W.$$

Pruebe que W es un espacio vectorial.

4) Sean $-\infty < a < b < \infty$. Usando el resultado del Ejercicio 3, pruebe que el conjunto $V_3 = \left\{ f \in \mathcal{F}([a,b]) / \quad \left| \int_a^b f(x)dx \right| < \infty \wedge f(a) = f(b) = 0 \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}([a,b])$.

5) Sean $-\infty < a < b < \infty$ y $V_0 = \mathrm{C}(a,b)$.

   a) Pruebe que V_0 es un espacio vectorial.
   b) Pruebe que para cada $k \in \mathbb{N}$, $V_k = \mathrm{C}^k(a,b)$ es un subespacio vectorial de V_0.
   c) Pruebe que $V_\infty = \mathrm{C}^\infty(a,b) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}^k(a,b)$, el conjunto de las funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes sobre (a,b), es un subespacio vectorial de V_k.

6) Sean V un espacio vectorial y $D \subseteq V$. Pruebe que
$$< D >= \bigcap_{U \in \mathcal{W}} U,$$
donde $\mathcal{W}$ es el conjunto de los subespacios vectoriales de V que contienen a D.

7) Sean $W = P$, el conjunto de los polinomios reales y $V = P_3$, el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual a 3.

   a) Pruebe que W es un espacio vectorial cuando se considera la suma habitual de polinomios.
   b) Pruebe que V es un subespacio vectorial de W.
   c) Halle la cápsula del conjunto $D = \{p_1, p_2, p_3\} \subseteq V$, donde, para $x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = 1 + x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = 1 + x^3$.

8) Consideramos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $S = \{(1, \alpha, 1), (-1, 0, 1), (1 + \alpha, 1, 0)\}$ es linealmente independiente en V?

9) **[*]** Sean $f_1, f_2, f_3 \in C^2(\mathbb{R})$. Pruebe que $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ es l.i. si y sólo si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\det\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & f_3(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & f_3'(x_0) \\ f_1''(x_0) & f_2''(x_0) & f_3''(x_0) \end{pmatrix} \neq 0$.

10) Consideramos el conjunto $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \subseteq P_3(\mathbb{R})$ dado por $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x - 1$, $p_3(x) = (x-1)^2$, $p_4(x) = (x-1)^3$, $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que B es una base de $P_3(\mathbb{R})$.

11) **[*]** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, con $a_n \neq 0$. Pruebe que $B = \{p, p', p'', ..., p^{(n)}\}$ es una base para $P_n(\mathbb{R})$.

12) Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2} : \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$.

   a) Pruebe que W es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2,2}$.
   b) Halle una base para W.
   c) Calcule la dimensión de W.

13) Sean $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$.

   a) Pruebe que la función $A : V \to W$ definida mediante
   $$Au = \frac{d}{dx} u, \tag{6.1}$$
   es una aplicación lineal que no es un isomorfismo. Indique si esta aplicación es inyectiva.
   b) Pruebe que la fórmula (6.1) define un operador lineal sobre $U = C^\infty(\mathbb{R})$. Indique si este operador es inyectivo.
   c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pruebe que la función $D : V \to \mathbb{R}$ definida por $D[u] = \dfrac{d}{dx} u(x_0)$, es un funcional lineal sobre V.

14) Sean $V = C^1(\mathbb{R})$ y $W = C(\mathbb{R})$.

   a) Pruebe que la función $B : W \to V$ definida mediante
   $$Bu(x) = \int_0^x u(t) dt, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6.2}$$
   es un operador lineal. Indique si es inyectivo.
   b) Pruebe que la fórmula (6.2) define un operador lineal sobre $U = C^\infty(\mathbb{R})$. Indique si el operador es inyectivo.
   c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pruebe que la función $I : W \to \mathbb{R}$ definida por $I[u] = \displaystyle\int_0^{x_0} u(t) dt$, es un funcional lineal sobre W. Indique si el funcional es inyectivo.

15) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $L : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ la aplicación lineal definida mediante $Lp = (a_0, a_1, ..., a_n)$, donde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que L es un isomorfismo.

16) Sean V y W dos espacios vectoriales. Pruebe que el conjunto $L(V, W) = \{A : V \to W / \quad A \text{ es lineal}\}$. es un espacio vectorial cuando se equipa con las operaciones naturales de suma y multiplicación por un escalar

17) Consideramos el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, y el conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   a) Pruebe que W es un subespacio vectorial de dimensión 2 de V.
   b) Pruebe que la aplicación $A : \mathbb{C} \to W$, dada por $A(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, es un isomorfismo.

18) Sea $V = C^\infty(\mathbb{R})$ y L el operador lineal definido sobre V mediante $Lu = \dfrac{d^2}{dx^2} u$. Pruebe que todo $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de L y halle el espacio propio A_λ.

19) Consideramos números $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ y la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = \log_{a_j}(a_i)$, $\quad i, j \in \{1, 2, 3\}$. Determine los valores propios de la aplicación lineal $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante $\mathcal{A}u = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

20) Sea $V = C^\infty(0,1)$. Determine los valores y espacios propios del operador $T : V \to V$ definido mediante

$$(Tu)(t) = t\,u'(t), \qquad t \in (0,1).$$

21) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y la aplicación lineal $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante $\mathcal{A}u = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores propios de $\mathcal{A}$.

b) Demostrar que para el valor propio máximo, existe un vector propio $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $x, y, z \in [0,1]$ y $x + y + z = 1$.

c) Determinar $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

22) Consideramos el espacio $V = \mathbb{R}^n$. Denotamos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que todas las fórmulas que siguen definen normas sobre $\mathbb{R}^n$:

$\|x\|_0 = \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|, \quad \|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \; p \geq 1.$

Considere $n = 2$. Grafique la bola $B(0,1)$ para cada una de las normas del punto anterior; considere $p = 3$ y $p = 4$.

23) Sea V un espacio normado. Pruebe que se cumple

$$\|u - v\| \geq |\|u\| - \|v\||, \qquad \text{para todo } u, v \in V.$$

Demuestre que la norma es una aplicación continua.

24) Sea $V = C([a,b])$, donde $-\infty < a < b < \infty$. Pruebe que la fórmula $\|u\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |u(t)|$ define una norma sobre V.

25) Pruebe la desigualdad de Young $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{p'}b^{p'}, \quad \forall a, b \geq 0.$
Idea.- Utilice la concavidad de la función logaritmo en $(0,\infty)$.

26) Sean $p, p' \in [1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pruebe que para $u, v \in C([0,1])$ se cumple la desigualdad de Hölder $\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$.
Idea.- Puede utilizar la desigualdad de Young para probar que $\displaystyle\int_0^1 |u(t)v(t)|dt \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{p'}\|v\|_p^{p'}$. Reemplace u por λu, $\lambda > 0$, y optimice en λ la desigualdad así obtenida.

27) Sea $V = C([0,1])$. Pruebe que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre V.
Idea.- Para probar la desigualdad triangular use la desigualdad de Hölder.

28) Sea $B = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base Hilbertiana del espacio Euclidiano V. Pruebe que dado un $u \in V$ se cumple la igualdad de Parserval $\|u\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$, donde, para $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de u.

29) Pruebe que en un espacio normado una bola es un conjunto abierto.

30) Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ dos espacios normados y $L : V \to W$ una aplicación lineal.

a) Pruebe que si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|L[u]\|_W \leq c\|u\|_V, \quad \text{para todo } u \in V, \tag{6.3}$$

entonces L es continua.

b) Pruebe que si L es continua, entonces existe una constante $c > 0$ que verifica (6.3).

c) Pruebe que si $\dim(W) < \infty$ entonces L es continua.

Referencias

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[2] J. Mayorga-Zambrano, *Distribuciones Temperadas y Transformada de Fourier*, Apuntes de Curso ESPE, Vol.01, N.03 (2010).

[3] ———, *Matemática Superior para Ingeniería (con ayuda de Maxima)*, (preprint), Ecuador, 2013.

[4] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern Mathematical Physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York, 1972.

[5] ———, *Methods of modern Mathematical Physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.

[6] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operatos*, vol. 99 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), first ed., 2009.