

Algunas herramientas matemáticas para la economía y las finanzas: el movimiento Browniano y la integral de Wiener.

Diego Chamorro

15 de diciembre de 2011

Resumen

El objetivo de este artículo es mostrar algunos de los aspectos matemáticos que se encuentran detrás de los modelos realizados para describir fenómenos económicos y financieros. Nos concentraremos en particular en las dos herramientas de base que son el movimiento Browniano y la integral de Wiener y mostraremos algunas de sus principales propiedades y características.

Palabras clave: Movimiento Browniano, Integral de Wiener.

1. Introducción

El Ecuador produce una gran variedad de materias primas como por ejemplo el cacao, banano, petróleo, etc. y el precio de estas materias primas se negocia, en función de la oferta y la demanda, en las bolsas de valores internacionales. Diversos factores (económicos, políticos, tecnológicos, meteorológicos, etc.) intervienen en la variación de los precios de estas materias primas, de manera que tanto los productores como los compradores deben realizar estudios de mercado detallados para poder posicionarse (a corto, mediano y largo plazo) en función de estas fluctuaciones.

Un primer paso simple para tratar de comprender la evolución del precio de estas materias primas consiste en graficar las fluctuaciones pasadas a partir de las informaciones disponibles. En los gráficos a continuación mostramos la variación del precio del cacao y del barril de petróleo durante el período 1994-2007.

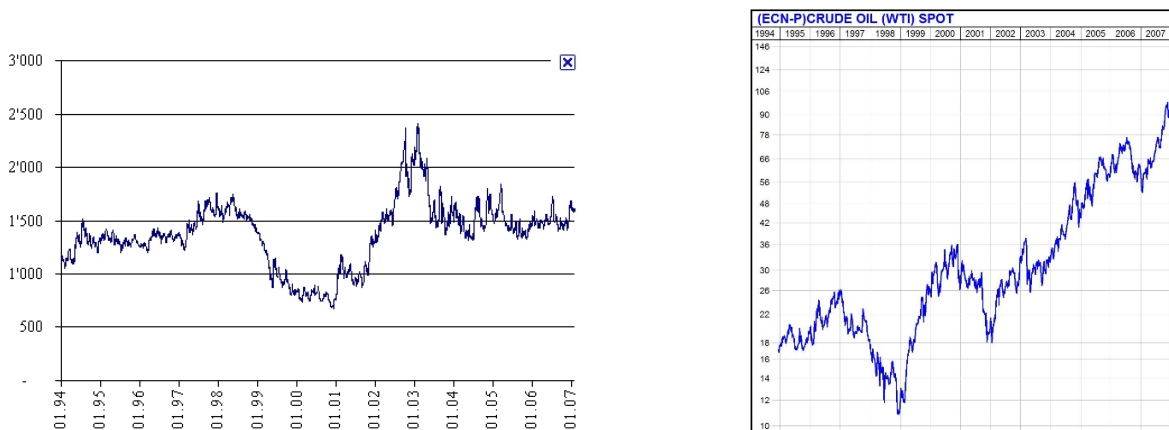


Figura 1: Fluctuaciones del precio del cacao y del petróleo durante el período 1994-2007. Fuente: internet.

Visualmente, la primera observación que podemos hacer es que la función que representa la evolución durante los años 1994-2007 del precio de estas materias primas *no es muy regular*: presenta picos, oscilaciones y variaciones muy rápidas. Notamos también que, a partir de un cierto tiempo t (digamos enero 2000, para fijar las ideas) es muy difícil predecir, a la luz de las informaciones pasadas, el precio al instante $t + \varepsilon_1$ o $t + \varepsilon_2$ (digamos enero 2001 y enero 2002). Finalmente, podemos razonablemente suponer que la evolución *futura* tendrá un comportamiento similar (picos, oscilaciones y variaciones bruscas). Muchas de las previsiones económicas y financieras se construyen por medio de modelos que buscan

replicar, o reproducir, estas observaciones en el futuro. Así por ejemplo, buena parte del presupuesto general del estado Ecuatoriano está dado en función de la evolución del precio del petróleo y de la manera en que su venta ha sido negociada y esta negociación se lleva sobre la base de modelos matemáticos sofisticados. Es por esta razón que es fundamental comprender las herramientas matemáticas subyacentes.

Una de las primeras etapas en el uso de esta *caja de herramientas matemáticas* consiste en tratar de *reproducir* o *modelar* por medio de objetos matemáticos los gráficos anteriores. Esto es posible por medio de un proceso estocástico muy particular llamado el *movimiento Browniano*.

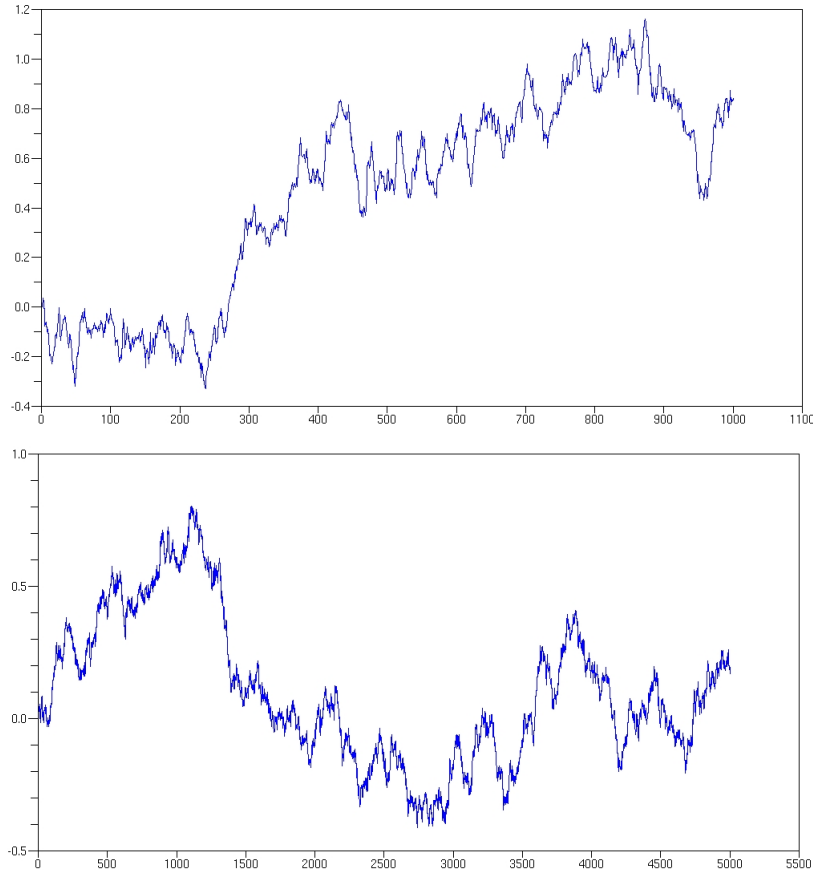


Figura 2: Dos ocurrencias de un movimiento Browniano.

Podemos observar que este objeto matemático comparte, al menos visualmente, muchas de las propiedades de los gráficos de la figura 1: picos, oscilaciones y variaciones bruscas. En realidad éste es uno de los objetos matemáticos de base para una buena parte de las matemáticas financieras. Pero, ¿qué es el *movimiento Browniano* y porqué este nombre? Este pequeño texto está dedicado a responder a estas inquietudes.

El plan del artículo es el siguiente. En la sección 2 explicaremos cómo obtener el movimiento Browniano estándar a partir de caminatas aleatorias y daremos una serie de propiedades interesantes de este objeto matemático. En la sección 3 discutiremos algunos aspectos relativos a la integral de Riemann-Stieltjes cuando la función contra la cual se desea integrar es justamente un movimiento Browniano. Esto conducirá a la construcción de la integral de Wiener. Finalmente, en la sección 4 veremos cómo intervienen estos objetos en la modelización financiera por medio de un ejemplo concreto. En el apéndice A daremos los códigos en SCILAB que permiten hacer una modelización informática de las trayectorias de un movimiento Browniano.

2. El movimiento Browniano

El movimiento Browniano es un buen ejemplo de interacción entre diferentes disciplinas científicas. En efecto, en 1827, el biólogo escocés Robert Brown observa en el microscopio el movimiento errático de ciertas partículas de una planta en un líquido y esto concordaba con los conocimientos de esa época

que veían este tipo de movimiento desordenado como consecuencia de algún “fluido vital”. Sin embargo, esta hipótesis fue rechazada por Brown cuando en 1828 observó el mismo tipo de movimiento caótico con partículas inorgánicas de tamaño similar. Años más tarde, en 1901, el francés Louis Bachelier introduce este movimiento para explicar las fluctuaciones de los mercados financieros y este es el inicio de una larga tradición en las matemáticas financieras, pero hay que esperar al matemático norteamericano Norbert Wiener para obtener una definición matemática formal de este objeto en 1923.

Procesos estocásticos y caminatas aleatorias

El movimiento Browniano es un caso muy particular de un proceso estocástico cuya definición general damos a continuación.

Definición 2.1 (Proceso Estocástico) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidades, sea (E, \mathcal{E}) un espacio medible y sea I un conjunto de índices (en la práctica se tiene $I = \mathbb{R}_+$ o $I = \mathbb{N}$). Un proceso estocástico es entonces una colección de variables aleatorias $(X_t)_{t \in I}$ definidas sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valores sobre el espacio (E, \mathcal{E}) .

Demos un ejemplo que será de utilidad posteriormente. Sea $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli de ley de probabilidad dada por $\mathbb{P}(\epsilon_t = -1) = \mathbb{P}(\epsilon_t = 1) = 1/2$. Definimos entonces un proceso estocástico, llamado *caminata aleatoria*, de la siguiente forma:

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ X_{t+1} = X_t + \epsilon_t. \end{cases} \quad (1)$$

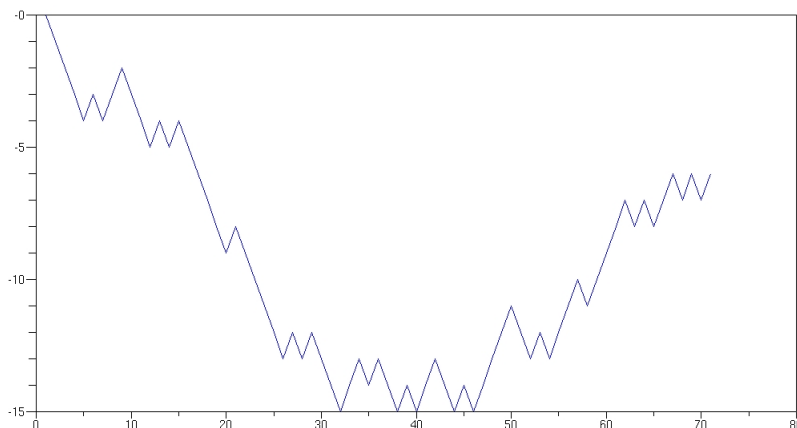


Figura 3: Una caminata aleatoria.

Los puntos obtenidos por medio de este proceso entre t y $t + 1$ son juntados linealmente para obtener la figura 3.

Visualmente podemos apreciar cierta similitud de esta caminata aleatoria con los gráficos de la figura 1, pero esta modelización deja mucho que desear. Es por esta razón que vamos a imponer ciertas condiciones que harán que el objeto matemático correspondiente se acerque más a las fluctuaciones del precio de las materias primas observadas.

Estas condiciones pueden parecer arbitrarias, pero serán justificadas al *construir* el movimiento Browniano.

Definición 2.2 (Movimiento Browniano estándar) Un proceso estocástico $B(t, \omega)$ es un movimiento Browniano estándar si satisface las siguientes condiciones:

- 1) El proceso comienza en cero: $\mathbb{P}(\omega : B(0, \omega) = 0) = 1$
- 2) Para todo $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuida con media cero y de varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s),$$

es decir, para todo $a < b$, se tiene:

$$\mathbb{P}(a \leq B(t) - B(s) \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

3) El proceso $B(t, \omega)$ tiene incrementos independientes: para todo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

son independientes.

4) Casi todos los caminos de $B(t, \omega)$ son funciones continuas:

$$\mathbb{P}(\omega : B(\cdot, \omega) \text{ es continua}) = 1.$$

Por comodidad, el proceso estocástico $B(t, \cdot)$, será notado $B(t)$ o B_t .

Definición 2.3 Una realización para un ω fijado $t \mapsto B(t, \cdot)$ de un movimiento Browniano es llamada una Trayectoria.

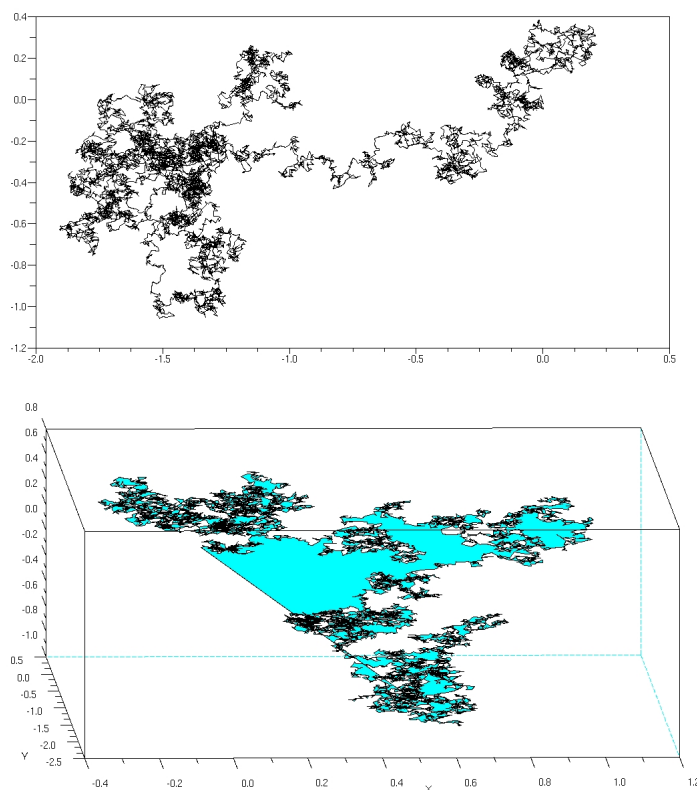


Figura 4: Dos trayectorias de un movimiento Browniano en 2D y 3D.

Construcción del Movimiento Browniano

La caminata aleatoria definida en la página anterior verifica algunos de los puntos anteriores, pero en particular no cumple con la condición 2). Sin embargo la idea de caminatas aleatorias es muy útil para una construcción simple y rápida del movimiento Browniano.

Empecemos con una variante del proceso estocástico dado en (1) y consideremos una caminata aleatoria, que empieza en el punto cero, con saltos de amplitud a y $-a$ de igual probabilidad de ocurrencia en los tiempos $\delta, 2\delta, \dots$ en donde s, δ son dos números positivos. Más formalmente, sea $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas tales que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = -a) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = a) = \frac{1}{2}.$$

Construimos a partir de esto una caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ escribiendo

$$\begin{cases} Y_{a,\delta}(0) = 0, \\ Y_{a,\delta}(n\delta) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n. \end{cases} \quad (2)$$

Luego, para todo tiempo t tal que $n\delta < t < (n+1)\delta$ juntamos linealmente los extremos de esta manera:

$$Y_{a,\delta}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{a,\delta}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{a,\delta}((n+1)\delta).$$

La cantidad $Y_{a,\delta}(t)$ representa la posición de la caminata aleatoria en el tiempo t y es a partir de esta caminata aleatoria que vamos a obtener el movimiento Browniano haciendo tender a y δ hacia cero, es decir $B(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t)$. Pero antes de lanzarnos en el cálculo de este límite, conviene estudiar la función característica:

$$\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos a ver que muchas de las propiedades del proceso estocástico límite se pueden obtener al comprender esta función característica.

Por simplicidad, vamos a suponer que $t = n\delta$, de manera que $n = t/\delta$, esto será suficiente para nuestros propósitos inmediatos. Por construcción de $Y_{a,\delta}$ y por las propiedades de las variables aleatorias $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i\lambda \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \right) \right] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E} [\exp(i\lambda \varepsilon_j)] = \mathbb{E} [\exp(i\lambda \varepsilon_1)]^n \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i\lambda a} + \frac{1}{2} e^{-i\lambda a} \right)^n = \cos(\lambda a)^n = \cos(\lambda a)^{t/\delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

A partir de este pequeño cálculo, observamos que, para λ y t fijados, el límite de la cantidad $\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))]$ cuando a y δ tienden independientemente hacia cero no existe. Para verificarlo basta hacer un desarrollo limitado de la cantidad $\cos(\lambda a)^{t/\delta}$: en efecto, si a y δ son muy pequeños se tiene

$$\cos(\lambda a)^{t/\delta} \approx 1 - \frac{t\lambda^2 a^2}{2\delta}.$$

Vemos por ejemplo que si $a \approx x$ y si $\delta \approx x^3$ entonces hay un verdadero problema en la fórmula anterior si se hace $a, \delta \rightarrow 0$. Esto muestra que se debe fijar con cuidado la relación entre a y δ para que el límite exista. Sin embargo, la existencia del límite de la cantidad $\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))]$ cuando $a, \delta \rightarrow 0$ no es suficiente para obtener una caminata aleatoria con las propiedades buscadas. Si fijamos ahora a y δ tales que $\frac{a^2}{\delta} \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 0$, se obtiene que

$$\lim_{a,\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] = 1$$

y esto implica que el proceso estocástico $X(t)$ definido por $X(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t)$ existe, pero se tiene que $X(t) \equiv 0$.

Para obtener el movimiento Browniano conviene, antes de hacer un desarrollo limitado, escribir $x = \ln(\cos(\lambda a)^{t/\delta})$. Se tiene entonces que $x = \frac{t}{\delta} \ln(\cos(\lambda a))$ y si a es muy pequeño tenemos $\cos(\lambda a) \approx 1 - \frac{\lambda^2}{2} a^2$, ahora dado que $\ln(1 + \tau) \approx \tau$ si τ es pequeño podemos escribir

$$\ln(\cos(\lambda a)^{t/\delta}) \approx \ln(1 - \frac{\lambda^2}{2} a^2) \approx -\frac{\lambda^2}{2} a^2$$

y de esta forma observamos que si a y δ son muy pequeños se tiene $x \approx -\frac{t\lambda^2}{2\delta} a^2$ y entonces $\cos(\lambda a)^{t/\delta} \approx e^{-\frac{t\lambda^2}{2\delta} a^2}$. Por lo tanto, volviendo a la expresión (3), si a y δ son muy pequeños obtenemos la aproximación

$$\mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] \approx e^{-\frac{t\lambda^2}{2\delta} a^2}.$$

En particular si fijamos $a^2 = \delta$ entonces podemos escribir

$$\lim_{a,\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\exp(i\lambda Y_{a,\delta}(t))] = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El lector observará que esta función característica corresponde a una distribución gaussiana centrada de varianza igual a t . Estas observaciones nos permiten enunciar nuestro primer teorema:

Teorema 1 Sea $Y_{a,\delta}(t)$ una caminata aleatoria, que empieza en cero, con saltos equiprobables de amplitud a y $-a$ en los tiempos $\delta, 2\delta, \dots$. Si suponemos que $a^2 = \delta$, entonces para todo tiempo $t \geq 0$ el límite

$$B(t) = \lim_{a,\delta \rightarrow 0} Y_{a,\delta}(t) \quad \text{existe.}$$

Se tiene además que

$$\mathbb{E} \left[e^{i\lambda B(t)} \right] = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

y el proceso estocástico $B(t)$ es un movimiento Browniano estándar.

Demstración. Con los cálculos de las líneas precedentes hemos verificado la existencia del proceso estocástico $B(t)$ y la validez de la fórmula (4). Por construcción de la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}(t)$ se tiene que el proceso estocástico $B(t)$ comienza en cero. Para verificar que la variable aleatoria $B(t) - B(s)$ es normalmente distribuida con media cero y de varianza $t - s$, aplicamos la fórmula (4) para obtener

$$\mathbb{E} \left[e^{i\lambda[B(t)-B(s)]} \right] = e^{-\frac{(t-s)\lambda^2}{2}}$$

de donde se deduce que $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. La independencia de los incrementos es una consecuencia de la independencia de las variables aleatorias $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que ayudaron a construir el proceso estocástico $B(t)$. Con esto hemos comprobado los puntos 1), 2) y 3) de la definición 2.2. Pero falta el punto 4). La continuidad del movimiento Browniano es un poco más delicada y para ello necesitaremos introducir la siguiente noción y verificar un resultado dado en la proposición 2.1:

Definición 2.4 Sean $(X_t)_{t \in I}$ y $(\tilde{X}_t)_{t \in I}$ dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo espacio de probabilidades. Decimos que \tilde{X}_t es una modificación de X_t si para todo $t \in I$ se tiene la identidad

$$X_t = \tilde{X}_t \quad \text{casi en todas partes.}$$

Proposición 2.1 (Teorema de Kolmogorov-Čentsov) Sean $(X_t)_{t \in [0,1]^d}$ un proceso estocástico y tres constantes, estrictamente positivas, γ, c, ϵ tales que

$$\mathbb{E} [|X_t - X_s|^\gamma] \leq c|t - s|^{d+\epsilon}.$$

Entonces existe una modificación \tilde{X}_t de X_t tal que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sup_{s \neq t} \frac{|\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|}{|t - s|^\alpha} \right)^\gamma \right] < +\infty \quad (5)$$

para todo $\alpha \in [0, \epsilon/\gamma[$.

Prueba de la proposición 2.1. Para $m \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto D_m como la colección de d -uplas $s = (2^{-m}k_1, \dots, 2^{-m}k_d)$ en donde cada k_i es un entero en el intervalo $[0, 2^m]$ y definimos $D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$.

Definimos además el conjunto Δ_m de parejas $(s, t) \in D_m$ tales que $|s - t| = 2^{-m}$. Notemos que hay un poco menos que $2^{(m+1)d}$ de este tipo de parejas. También diremos para todo $s, t \in D$ que $s \leq t$ si cada componente de s es menor o igual que el componente correspondiente de t .

Definamos ahora $K_j = \sup_{(s,t) \in \Delta_m} |X_t - X_s|$. La hipótesis de la proposición nos asegura que existe una constante κ tal que

$$\mathbb{E}[K_j^\gamma] \leq \sum_{(s,t) \in \Delta_m} \mathbb{E} [|X_t - X_s|^\gamma] \leq 2^{(m+1)d} \times c2^{-m(d+\epsilon)} = \kappa 2^{-m\epsilon}.$$

Por construcción del conjunto D , para todo punto $s \in D$ existe una sucesión creciente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ tal que $s_n \in D_n$ y tal que $s_n \leq s$ con $s_n = t$ a partir de un cierto n suficientemente grande. Sea ahora $s, t \in D$ con la condición que $|s - t| \leq 2^{-m}$. Se tiene entonces o que $s_m = t_m$ o que $(s_m, t_m) \in \Delta_m$ y en ambos casos podemos escribir:

$$X_s - X_t = \sum_{j=m}^{+\infty} (X_{s_{j+1}} - X_{s_j}) + X_{s_m} - X_{t_m} + \sum_{j=m}^{+\infty} (X_{t_j} - X_{t_{j+1}})$$

en donde las series precedentes son en realidad sumas finitas. De esta identidad se deduce que

$$|X_s - X_t| \leq K_m + 2 \sum_{j=m+1}^{+\infty} K_j \leq 2 \sum_{j=m}^{+\infty} K_j.$$

Definimos ahora el conjunto $M_\alpha = \sup_{s,t \in D, s \neq t} \left\{ \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \right\}$. Tenemos entonces que

$$M_\alpha \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{(m+1)\alpha} \sup_{|t-s| \leq 2^{-m}} |X_t - X_s| : s, t \in D, s \neq t \right\} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ 2^{(m+1)\alpha+1} \sum_{j=m}^{+\infty} K_j \right\} \leq 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j\alpha} K_j.$$

Ahora, para $\gamma \geq 1$ y para $\alpha \leq \epsilon/\gamma$, obtenemos con $\kappa' = 2^{\alpha+1} \kappa^{1/\gamma}$ que

$$\|M_\alpha\|_{L^\gamma} \leq 2^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j\alpha} \|K_j\|_{L^\gamma} \leq \kappa' \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(\alpha-\epsilon/\gamma)} < +\infty.$$

en dónde hemos notado $\|\cdot\|_{L^\gamma}$ la norma usual en los espacios L^γ .

Si $0 < \gamma < 1$, el mismo razonamiento se aplica a la cantidad $\mathbb{E}[M_\alpha^\gamma]$ en lugar de $\|M_\alpha\|_{L^\gamma}$. Se obtiene entonces, que para casi todo ω , X_t es uniformemente continuo sobre D y podemos definir sin ambigüedad

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega).$$

Finalmente, aplicando el Lema de Fatou a este límite y como se tiene que $\tilde{X}_t = X_t$ casi en todas partes, se obtiene que \tilde{X}_t es la modificación buscada. ■

Fin de la demostración del teorema 1. Se tiene por las propiedades anteriormente verificadas que $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s) = \sqrt{t-s} \mathcal{N}(0, 1)$. Se obtiene entonces para todo entero $n \geq 1$ que

$$\mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] = \mathbb{E}[|\sqrt{t-s} \mathcal{N}(0, 1)|^{2n}] = |t-s|^n \mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}].$$

Calculemos ahora $\mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}]$, para ello calculamos la función característica de la variable aleatoria $\mathcal{N}(0, 1)^{2n}$:

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda \mathcal{N}(0, 1)^{2n}}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (i)^k \lambda^k G^{2nk}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} (i)^k \lambda^k \mathbb{E}[G^{2nk}]$$

en donde G es una gaussiana normalizada. Dado que todos los momentos impares de las gaussianas son nulos, se tiene que solo los k momentos pares intervienen en esta suma. Así se obtiene que

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda \mathcal{N}(0, 1)^{2n}}] = e^{-c_n \frac{\lambda^2}{2}}$$

y por lo tanto se obtiene que $\mathbb{E}[\mathcal{N}(0, 1)^{2n}] = c_n$. Es decir que se verifica la hipótesis de la proposición 2.1 con $\gamma = 2n$ y $\epsilon = n - 1$:

$$\mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] = c_n |t-s|^n. \tag{6}$$

Entonces, la expresión (5) implica que existe una modificación $\tilde{B}(t)$ de $B(t)$ que es continua y por lo tanto se obtiene que

$$\mathbb{P}(\omega : B(\cdot, \omega) \text{ es continua}) = 1.$$

Con esto se tiene el punto 4) de la definición de movimiento Browniano y terminamos de esta manera la demostración del teorema 1. ■

Algunas propiedades del movimiento Browniano

Una vez que hemos construido el movimiento Browniano estándar y que se dispone de la identidad $\mathbb{E}[e^{i\lambda B(t)}] = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}}$ es posible dar una serie de propiedades que detallamos a continuación:

Proposición 2.2 *Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un movimiento Browniano estándar. Entonces*

1) para todo $t > 0$, $B(t)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida de media cero y de varianza t .

2) para todo $s, t \geq 0$, se tiene $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{s, t\}$.

Prueba. Por el primer punto de la definición 2.2 se tiene que $B(t) = B(t) - B(0)$ mientras que por el segundo punto se tiene que $B(t) - B(0) \sim \mathcal{N}(0, t)$ de donde se obtiene la primera asección de esta proposición. Nótese en particular que se tiene la fórmula

$$\text{Var}(B(t)) = \mathbb{E}[B(t)^2] = t$$

puesto que $\mathbb{E}[B(t)] = 0$.

Para mostrar la segunda parte podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $s < t$, entonces por los puntos 2) y 3) de la definición 2.2 podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B(s)B(t)] &= \mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2] = \mathbb{E}[B(s)(B(t) - B(s))] + \mathbb{E}[B(s)^2] \\ &= \mathbb{E}[B(s)]\mathbb{E}[B(t) - B(s)] + \mathbb{E}[B(s)^2] = 0 + s = s; \end{aligned}$$

es decir que $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{s, t\}$. ■

Proposición 2.3 Sea $t_0 \geq 0$ un real. Entonces el proceso estocástico $\tilde{B}(t)$ definido por la fórmula

$$\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$$

es un movimiento Browniano estándar.

Prueba. Hay que verificar que el proceso estocástico $\tilde{B}(t)$ cumple con las cuatro condiciones de la definición 2.2.

Vemos pues que se tienen los puntos 1) y 4). Ahora, para todo $s < t$ escribimos

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = B(t + t_0) - B(s + t_0), \quad (7)$$

pero como $B(t)$ es un movimiento Browniano se tiene que $B(t + t_0) - B(s + t_0)$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza $(t + t_0) - (s + t_0) = t - s$, de tal manera se obtiene que $\tilde{B}(t)$ verifica la condición 2). Finalmente, para el punto 3), podemos suponer que $t_0 > 0$, en ese caso, para toda sucesión $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ se tiene $0 < t_0 < t_0 + t_1 < \dots < t_0 + t_n$. Aplicamos entonces el punto 3) a $B(t)$ para obtener que $B(t), B(t_k + t_0) - B(t_{k-1} + t_0), k = 1, \dots, n$ son variables aleatorias independientes. Por la fórmula (7) se tiene entonces que las variables aleatorias $\tilde{B}(t_k) - \tilde{B}(t_{k-1})$ son independientes de manera que se obtiene la condición 3). ■

Proposición 2.4 Para todo número real $\lambda > 0$, el proceso estocástico $\tilde{B}(t) = B(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ es un movimiento Browniano estándar.

Prueba. Las condiciones 1), 3) y 4) son inmediatas. Para verificar 2) observamos que para todo $s < t$ se tiene

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B(\lambda t) - B(\lambda s))$$

y esto muestra que la variable aleatoria $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)$ es normalmente distribuida, de media cero y de varianza $\frac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s) = t - s$. De donde se obtiene la condición 2) y se termina la verificación de esta proposición. ■

Este hecho nos explica que si agrandamos el movimiento Browniano por medio de una lupa, seguiremos observando a todas las escalas un movimiento Browniano.

Nos interesamos ahora en estudiar la *regularidad* de este objeto matemático. Por definición tenemos que es un objeto continuo, pero ¿es posible decir un poco más? Para hacernos una idea de la situación, vamos a volver a la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ definida en (2) que nos ha servido para la construcción del movimiento Browniano. En efecto, si fijamos por un instante a y δ , vemos que entre cada etapa de la caminata aleatoria $Y_{a,\delta}$ se tiene que la pendiente es igual, en valor absoluto, a $\frac{a}{\delta}$. Dado que, para

la obtención del movimiento Browniano, hemos fijado $a = \sqrt{\delta}$, la pendiente entre estas dos etapas de la caminata aleatoria es del orden de $\frac{1}{\sqrt{\delta}} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$. Esto muestra heurísticamente que es posible que el movimiento Browniano no sea un objeto derivable. En este sentido tenemos el importante teorema siguiente:

Teorema 2 (Paley, Wiener, Zygmund) *Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un movimiento Browniano estándar, entonces, para todo $\omega \in \Omega$, las trayectorias $B_t(\omega)$ no son derivables en ningún punto.*

Este resultado, demostrado en 1933, es de gran importancia pues da un ejemplo de funciones que no son derivables en ningún punto pero sobre todo muestra que estas funciones no son únicamente artefactos matemáticos, sino que aparecen en las observaciones de la naturaleza. La demostración de este teorema puede encontrarse en [6].

Tenemos pues una función continua que no es derivable en ningún punto es decir que para una trayectoria dada se tiene que $B(t, \cdot) \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Vamos a ver que es posible detallar un poco más la noción de regularidad y para ello introducimos el siguiente espacio de funciones.

Definición 2.5 (Espacios de Hölder) *Sea $0 < \alpha < 1$. Definimos el espacio de Hölder homogéneo $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R})$ como el conjunto de funciones (módulo las constantes) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que la cantidad*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{sea finita.} \quad (8)$$

Los espacios de Hölder $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R})$ con $0 < \alpha < 1$ son generalizaciones fraccionarias de los espacios de funciones a derivadas continuas $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ con $k \in \mathbb{N}$.

Por el teorema 1 sabemos que el movimiento Browniano B_t admite una modificación que pertenece al espacio $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ de funciones continuas, pero por el teorema 2 se tiene que $B_t \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Gracias a los espacios de Hölder podemos afinar esta información:

Teorema 3 *Sea $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un movimiento Browniano estándar, entonces existe una modificación $\tilde{B}(t)$ continua de $B(t)$ tal que casi todas sus trayectorias poseen una regularidad Hölderiana de orden α con $0 < \alpha < 1/2$.*

Demostración. La verificación de este hecho es inmediata una vez que se tiene el teorema de Kolmogorov-Čentsov enunciado en la proposición 2.1. En efecto, dado que se tiene la fórmula (6):

$$\mathbb{E}[|B(t) - B(s)|^{2n}] = c_n |t - s|^n$$

se puede aplicar el teorema de Kolmogorov-Čentsov con $\gamma = 2n$ y $\epsilon = n - 1$, entonces se obtiene que el movimiento Browniano $B(t)$ admite una modificación continua que es Hölder regular con índice de regularidad $0 < \alpha < \frac{n-1}{2n}$. Así se obtiene que el movimiento Browniano posee una regularidad Hölderiana de orden $0 < \alpha < 1/2$. ■

Observación 2.1 Es importante notar que se tiene la estimación estricta en el índice de regularidad y se puede mostrar que el movimiento Browniano estándar no es Hölder regular de orden $1/2$.

3. Integral de Wiener

El objetivo de esta sección es dar un sentido a la siguiente expresión:

$$I(f) = \int_a^b f(t) dB(t, \omega) \quad (9)$$

en dónde f es una función determinística (que no depende de ω) y $B(t, \omega)$ es un movimiento Browniano estándar. Antes de dar los detalles de la construcción de esta integral, llamada la integral de Wiener, vamos a mostrar algunos puntos que hay que tener en consideración.

Empecemos con dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y acotadas. Recordemos que f es *Riemann-Stieltjes con respecto a g* si el siguiente límite existe:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(x_i) - g(x_{i-1})) \quad (10)$$

en donde $\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ con la convención $a = x_0 < \dots < x_n = b$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ y τ_i es un punto de evaluación dentro del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Sin embargo hay que tener un poco de cuidado con la definición de la integral $\int_a^b f(x)dg(x)$. Consideremos el caso particular en donde $f = g$ y notaremos I_n y D_n las sumas de Riemann correspondientes con los puntos de evaluación $\tau_i = x_{i-1}$ y $\tau_i = x_i$ respectivamente:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$D_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Calculamos ahora $D_n - I_n$ y $D_n + I_n$ para obtener

$$D_n - I_n = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 \quad (11)$$

$$D_n + I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)(f(x_i)^2 - f(x_{i-1})^2) = f(b)^2 - f(a)^2. \quad (12)$$

El límite cuando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$ de la expresión (11) es llamado la *variación cuadrática* de la función f . Evidentemente, se tiene $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} D_n \neq \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} I_n$ si y solo si la variación cuadrática de f es diferente de cero. En este caso la definición de la integral (10) es problemática pues el resultado *depende* del punto de evaluación τ_i . Esto muestra que hay que tener un poco de cuidado cuando trata de definir una integral por medio de la expresión (10). Existen varias formas de contornar esta dificultad aparente, en este artículo nos concentraremos en la integral de Wiener.

Construcción de la integral de Wiener

Empezamos pues la construcción de la integral de Wiener con funciones simples $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{\{[t_i, t_{i+1}]\}}(x)$ en dónde $t_0 = a$ y $t_n = b$. Definimos entonces

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i (B(t_i, \omega) - B(t_{i-1}, \omega)). \quad (13)$$

Se tiene evidentemente $I(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha I(f)(\omega) + \beta I(g)(\omega)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f, g dos funciones simples, de manera que el operador I es lineal.

Lema 3.1 *Para una función simple f , la variable aleatoria $I(f)$ es una gaussiana con media cero y de varianza*

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Prueba. Recordemos que una combinación lineal de variables aleatorias gaussianas independientes sigue siendo una variable aleatoria gaussiana. Por la construcción dada en (13) se tiene que $I(f)$ es una variable aleatoria gaussiana.

Verifiquemos que la media de $I(f)$ es nula. Para ello escribimos:

$$\mathbb{E}[I(f)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right] = \sum_{i=1}^n a_i (\mathbb{E}[B_{t_i}] - \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}]) = 0$$

por las propiedades del movimiento Browniano dadas en la proposición 2.2. Calculemos ahora la varianza, por definición tenemos

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[I(f)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)^2\right]. \quad (14)$$

Observemos ahora dos puntos:

1. Primeramente:

$$\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] = t_i - t_{i-1}. \quad (15)$$

En efecto, desarrollando esta expresión tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] &= \mathbb{E}[B_{t_i}^2] - 2\mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_{i-1}}] + \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}^2] \\ &= t_i - 2\min\{t_i, t_{i-1}\} + t_{i-1} = t_i - t_{i-1}.\end{aligned}$$

2. Además se tiene, cuando $i \neq j$, que

$$\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_j})^2\right] = 0.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que $j < i$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(B_{t_i} - B_{t_j})^2\right] &= \mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_j}] - \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}B_{t_j}] - \mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_{j-1}}] + \mathbb{E}[B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}] \\ &= \min\{t_i, t_j\} - \min\{t_{i-1}, t_j\} - \min\{t_i, t_{j-1}\} + \min\{t_{i-1}, t_{j-1}\}.\end{aligned}$$

Lo que permite obtener el resultado deseado.

Finalmente, gracias a estas dos observaciones tenemos que la ecuación (14) se reduce a

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t)dt.$$

Lo que termina la demostración del lema. ■

Vamos ahora a generalizar la integral definida con la fórmula (13) a funciones más generales que las funciones simples. Para ello introducimos un poco de notaciones y notaremos $L^2(\Omega)$ el espacio de Hilbert formado por el conjunto de variables aleatorias de cuadrado integrable definidas sobre Ω . Para este espacio de Hilbert, el producto interno estará dado por la fórmula:

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]. \quad (16)$$

Sea ahora f una función determinista tal que $f \in L^2([a, b])$ y fijemos una sucesión de funciones simples $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2[a, b]$. Por el lema 3.1 se tiene que la sucesión $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$ de manera que converge en $L^2(\Omega)$. Esto nos permite entonces definir la siguiente cantidad

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n), \quad \text{en } L^2(\Omega). \quad (17)$$

Aquí debemos verificar que la fórmula dada por (17) está bien definida. Para ello vamos a mostrar que el límite de esta expresión es independiente de la sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerada. Sea entonces $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ otra sucesión tal que $g_n \rightarrow f$ en $L^2([a, b])$. Escribimos, gracias al lema 3.1

$$\mathbb{E}[|I(f_n) - I(g_n)|^2] = \mathbb{E}[|I(f_n - g_n)|^2] = \int_a^b (f_n - g_n)^2 dt.$$

Puesto que

$$\int_a^b (f_n - g_n)^2 dt \leq 2 \int_a^b (f_n - f)^2 + (g_n - f)^2 dt$$

y que cada una de estas partes tiende a cero cuando $n \rightarrow +\infty$, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(g_n), \quad \text{en } L^2(\Omega),$$

y esto muestra que no hay ambigüedad al considerar $I(f)$.

Definición 3.1 Sea $f \in L^2([a, b])$, el límite $I(f)$ definido por la ecuación (17) es la integral de Wiener de f . Notaremos la integral de Wiener de f de la siguiente forma:

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t)dB(t) \right) (\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (18)$$

La integral de Wiener es entonces un operador definido de $L^2([a, b])$ en $L^2(\Omega)$.

Observemos que la integral de Wiener es un operador lineal: en efecto, para todo $f, g \in L^2([a, b])$ se tiene, por construcción que $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$.

Teorema 4 Para todo $f \in L^2([a, b])$, la integral de Wiener $\int_a^b f(t)dB(t, \omega)$ es una variable aleatoria gaussiana de media cero y de varianza igual a $\|f\|_{L^2}^2$, es decir:

$$\int_a^b f(t)dB(t, \omega) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_{L^2}^2). \quad (19)$$

Demostración. Por el lema 3.1, se tiene esta propiedad cuando f es una función simple. Para una función general de $L^2([a, b])$, se obtiene el resultado como consecuencia del siguiente hecho general: si X_n es una variable aleatoria gaussiana de media μ_n y de varianza σ_n^2 y si X_n converge en $L^2(\Omega)$ hacia una variable aleatoria X , entonces X es una variable aleatoria gaussiana de media $\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n$ y de varianza $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2$. ■

Demos un par de ejemplo de cálculo de integrales de Wiener.

- Sea $f \equiv 1$ sobre el intervalo $[0, 1]$. Entonces

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dB(t) = \int_0^1 dB(t)$$

es una variable aleatoria gaussiana, de media cero y de varianza igual a 1, es decir $I(f) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- Sea $g(t) = t^2$ sobre $[1, 2]$, entonces

$$I(f) = \int_1^2 g(t)dB(t) = \int_1^2 t dB(t)$$

es una variable aleatoria gaussiana, de media cero y de varianza igual a $\int_1^2 t^2 dt = 7/3$, es decir $I(f) \sim \mathcal{N}(0, 7/3)$.

Estudiemos ahora la relación entre la integral de Wiener y la estructura de los espacios de Hilbert subyacentes.

Proposición 3.1 Sean $f, g \in L^2([a, b])$ dos funciones, entonces

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t)dt. \quad (20)$$

En particular, si f y g son ortogonales, entonces las variables aleatorias gaussianas $I(f)$ y $I(g)$ son independientes.

Prueba. Escribimos por un lado que:

$$\mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] = \mathbb{E}[(I(f + g))^2] = \int_a^b (f + g)^2 dt$$

por linealidad de la integral y por el lema 3.1. Es decir

$$\mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] = \int_a^b f^2(t)dt + 2 \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt. \quad (21)$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E}[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2] \\ &= \mathbb{E}[I(f)^2] + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] + \mathbb{E}[I(g)^2] \\ &= \int_a^b f^2(t)dt + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] + \int_a^b g^2(t)dt \end{aligned} \quad (22)$$

por el lema 3.1. Para concluir, es suficiente comparar (21) con (22). ■

Desarrollo en serie de la integral de Wiener

Vamos a ver que existe una relación muy particular entre la integral de Wiener y el movimiento Browniano. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5 Sea $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de $L^2([a, b])$; entonces, para toda función $f \in L^2([a, b])$, la integral de Wiener de f se descompone en una serie de la forma siguiente:

$$\int_a^b f(t)dB_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n(t)dB_t, \quad (23)$$

con probabilidad 1 y en donde la suma aleatoria converge casi seguramente.

Demostración. Empecemos fijando una función $f \in L^2([a, b])$ y una base ortonormal $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2([a, b])$. Tenemos entonces

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n,$$

luego integrando ambos lados de la expresión anterior con respecto a dB_t para obtener

$$\int_a^b f(t)dB_t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n dB_t = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t. \quad (24)$$

Verifiquemos que se tiene esta identidad en L^2 , para ello vamos a calcular la expresión

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB_t - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right]^2, \quad (25)$$

en donde $N \in \mathbb{N}$. Desarrollando el cuadrado se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t)dB_t \right)^2 - 2 \int_a^b f(t)dB_t \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t + \left(\sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t)dB_t \right)^2 \right] \\ &\quad - 2\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB_t \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] \\ &= \int_a^b f^2(t)dt - 2 \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB_t \int_a^b \phi_n dB_t \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b \phi_n dB_t \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Utilizamos ahora el resultado (20) para obtener

$$\begin{aligned} &= \int_a^b f^2(t)dt - 2 \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b f(t)\phi_n dt + \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 \int_a^b \phi_n(t)^2 dt \\ &= \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{n=0}^N \langle f, \phi_n \rangle^2, \end{aligned}$$

lo que tiende a cero si $N \rightarrow +\infty$. Hemos pues verificado que se tiene la identidad (24) en L^2 puesto que la cantidad (25) tiende a cero. ■

Veamos ahora la relación anunciada entre la integral de Wiener y el movimiento Browniano. En efecto, en particular si escogemos $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$ en la expresión (23) se tiene:

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}(s)dB_s = B_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^t \phi_n(s)ds \right) \left(\int_0^1 \phi_n(s)dB_s \right)$$

$$B_t(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n(\omega) \int_0^t \phi_n(s)ds$$

en donde ξ_n son variables aleatorias i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$. Esto nos permite definir de una manera muy simpática el movimiento Browniano.

4. Una aplicación del movimiento Browniano y de la integral de Wiener

Como hemos visto en la introducción, en la modelización de los precios de las materias primas puede utilizarse el movimiento Browniano. Más precisamente, una serie cronológica -dada por la evolución de los precios en el tiempo- se descompone generalmente en dos partes: una *tendencia general* a la cual se añade *variaciones aleatorias* y es de esta forma que se obtiene el modelo matemático para trabajar en matemáticas financieras. Así, la evolución de los precios de un activo financiero estará dada por medio de la fórmula siguiente

$$dX_t = fdt + \sigma dB_t \quad (26)$$

Explicuemos un poco esta expresión. Aquí dX_t representa la variación en el tiempo de los precios de un cierto activo financiero X_t , f es la tendencia general mientras que σ es la intensidad de las variaciones aleatorias que están dadas por un movimiento Browniano estándar B_t .

En el mayor grado de generalidad, las funciones f y σ son funciones medibles que dependen del tiempo t y de los precios X_t . Es decir $f = f(t, X_t)$ y $\sigma = \sigma(t, X_t)$; pero en una primera aproximación, podemos suponer que, tanto f como σ , dependen únicamente del tiempo: $f = f(t)$ y $\sigma = \sigma(t)$. Con esta simplificación, la ecuación diferencial (26) debe ser interpretada en el siguiente sentido:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s) \quad (27)$$

Diremos que (27) es la versión integral de la ecuación diferencial estocástica (26).

Gracias a la integral de Wiener y a la descripción del movimiento Browniano que acabamos de considerar en las secciones anteriores, la expresión (27) tiene un sentido muy concreto.

En cuanto a la resolución de este problema, tenemos el teorema a continuación:

Teorema 6 *Consideremos la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{cases} dX_t = [f(t)X_t + g(t)]dt + [\sigma(t)X_t + \theta(t)]dB(t), \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (28)$$

Entonces su solución está dada por el proceso estocástico

$$X_t = xe^{Y_t} + \int_0^t e^{Y_t - Y_s} [g(s) - \theta(s)\sigma(s)]ds + \int_0^t e^{Y_t - Y_s} \theta(s)dB_s$$

en donde

$$Y_t = \int_0^t [f(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2]ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s).$$

Nótese que este teorema permite estudiar ecuaciones más generales que las consideradas en la fórmula (26). La principal diferencia radica en la presencia del término X_t en la parte derecha de la ecuación (28). Podemos darnos cuenta que para dar la demostración de este problema es necesario considerar una

integral más general que la integral de Wiener: en efecto, en la definición de esta integral dada en la fórmula (18) sólo habíamos considerado integrales de la forma

$$\int_a^b f(t)dB(t)$$

en donde f era una función determinista. Es por lo tanto necesario generalizar la noción de integral de Wiener. El objeto matemático que corresponde a esta generalización es la *integral de Itô* y se puede encontrar una descripción detallada de esta integral en [6] o [7]. Consideramos que la integral de Wiener es suficiente para un primer contacto con los objetos matemáticos que intervienen en la modelización financiera.

Tenemos gracias al teorema 6 una descripción de la dinámica seguida por variables económicas, como son los precios del petróleo, cacao, flores o banano. Pero los mercados financieros van mucho más allá y utilizan estas variables como elementos de base para la construcción de nuevos productos.

Vamos a dar ahora un ejemplo que nos permitirá precisar el uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas en las actividades económicas. Supongamos que una empresa de transporte aéreo A desea planificar sus tarifas de boletos para el verano 2012. Evidentemente, el precio de los boletos dependerá del precio del petróleo y es natural que la empresa A desee protegerse ante una subida repentina de los precios de los combustibles.

Existen mecanismos financieros para lograr este objetivo: la empresa A puede buscar un banco B y comprar un producto financiero con las siguientes características:

- *Duración del producto*: empieza el 1ero de enero 2012 y termina el 1ero de junio 2012.
- *Descripción del producto*: la empresa A tiene la **opción**, y no la *obligación*, de comprar el 1ero de junio al banco B una cantidad determinada N de barriles de petróleo a un precio fijo K llamado el *strike* del producto.
- *Precio del producto*: Este producto tiene un precio que notaremos P . Este precio de la cobertura depende de muchos factores: tiempo t , strike K , valor del precio del producto subyacente X_t , etc. Notaremos entonces $P = P(X_t, t)$.

De esta manera, la empresa A se protege de una subida repentina de los precios del combustible pues ha negociado por adelantado comprar su combustible a un cierto precio K . Este tipo de producto financiero es muy común y es denominado un *Call*.

¿Qué sucede el 1ero de junio? Para verlo, notamos X_t la evolución del precio del petróleo y sea X_T el precio del barril en el tiempo final $T=1$ ero de junio.

- Si $X_T > K$: El precio del barril de crudo el 1ero de junio es mayor que el precio negociado K . La empresa A tiene entonces todo interés en ejercer su opción: compra N barriles al precio K , que es inferior al precio observado en el mercado y de esta forma se ha protegido de una fuerte alza de los precios de esta materia prima.
- Si $X_T < K$: El precio del barril de petróleo el 1ero de junio es menor que el precio negociado K . En este caso la empresa A no tiene interés en comprar al banco B algo que está más barato si lo consigue directamente en el mercado. Al no ejercer su opción la empresa pierde la cantidad P que ha pagado para cubrirse de la alza de precios.

Es interesante notar que en ambos casos, la empresa A se ha protegido de las fluctaciones del precio del petróleo.

Observemos que la situación el 1er de junio es la siguiente:

$$P(X_T, T) = \max\{X_T - K; 0\}$$

y ésta es la condición al límite cuando $t = T$.

Indiquemos que mientras más elevado es el precio final X_T , mayor será el ahorro realizado por la empresa A , mientras que mayor será el riesgo del banco B quien tendrá que comprar a un precio elevado los barriles de petróleo para venderlos a un precio más bajo a la empresa A .

En estos dos gráficos se muestra la situación de la empresa A a la izquierda (*Short Call*) y del banco B a la derecha (*Long Call*). El *Premium* corresponde al precio de la cobertura y se observa claramente

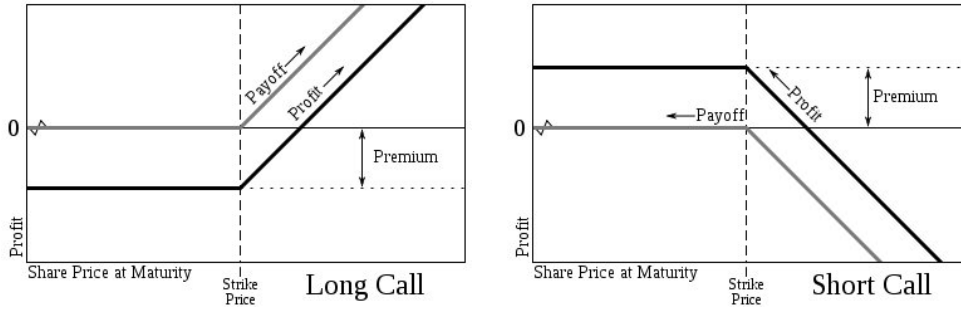


Figura 5: Evolución del ahorro y del riesgo en función de la evolución del precio del subyacente.

que si el precio del barril comienza a aumentar, el ahorro y el riesgo generados por este producto pueden ser substanciales. Es por esta razón que es muy importante conocer, en todo tiempo $0 < t < T$, el precio de la cobertura P .

En efecto, contrariamente a los seguros para autos, estos seguros de tipo *Call* pueden venderse y comprarse en los mercados financieros internacionales en dónde intervienen una gran cantidad de actores distintos. Como los bancos no poseen reservas de barriles de petróleo, para cumplir el contrato el banco B está obligado a comprar en el mercado los N barriles de petróleo. Esta transacción puede realizarse en cualquier momento antes del final del contrato y esto permite la compra-venta de estos productos financieros a otras entidades. Esta compra-venta de barriles por parte del banco debe efectuarse de tal manera que *anule* el riesgo producido por el *Call*. De esta manera se crea un mercado *secundario* de productos financieros adosados a materias primas (por oposición al mercado *primario* en donde se negocia el precio de estas materias primas) y, como hemos visto con este ejemplo, este mercado secundario corresponde a una necesidad muy real de las empresas.

Para comprender lo que sucede con la dinámica del precio de la cobertura durante el tiempo $0 < t < T$, y poder anular el riesgo generado es necesario considerar la siguiente ecuación diferencial estocástica llamada la ecuación de *Black-Scholes*. En este modelo se asume que el producto subyacente X_t -el precio del petróleo en nuestro ejemplo- sigue una dinámica de la forma

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

mientras que el precio de la cobertura debe verificar la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial P(X_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 P(X_t, t)}{\partial X_t^2} + r X_t \frac{\partial P(X_t, t)}{\partial X_t} - r P(X_t, t) = 0 \quad (29)$$

en dónde r es la tasa de interés del mercado. Esta ecuación es consecuencia de un gran número de hipótesis simplificadoras y su obtención puede encontrarse en detalle en [8] o más rápidamente en [3].

La solución de esta ecuación diferencial estocástica está dada por la fórmula de Black-Scholes

$$P(X_t, t) = X_t \mathcal{N}(0, d_1) - K e^{-rt} \mathcal{N}(0, d_2) \quad (30)$$

en dónde $\mathcal{N}(0, d_1)$ y $\mathcal{N}(0, d_2)$ son dos leyes normales de varianzas $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} [\ln(\frac{X_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t]$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$.

Es importante recalcar que es por medio de la ecuación de Black-Scholes (29) y del estudio de su solución (30) que se obtiene un mecanismo de cobertura eficaz que permite al banco B vender este producto financiero anulando su riesgo intrínseco.

El cálculo exacto de la solución (30) así como las estrategias utilizadas para la anulación del riesgo están fuera del alcance de este pequeño artículo, en donde hemos preferido concentrarnos en una exposición de las propiedades de los objetos de base que permiten construir las ecuaciones de Black-Scholes.

Estas fórmulas muestran la importancia económica de conocer correctamente las herramientas matemáticas que intervienen en la modelización de los mercados financieros.

A. Un poco de Scilab

Damos aquí los códigos en SCILAB que sirvieron para realizar los gráficos de las figuras 2 y 4. El interés de usar SCILAB radica en que es un programa libre y gratuito que está especialmente construido para cálculos matriciales.

Hemos visto en la sección 2 que es posible *modelizar* el movimiento Browniano en una dimensión por medio de una caminata aleatoria. Vamos a seguir esta idea para el código informático:

```
function []= browniano1d(N)

X=zeros(N+1, 1);
X(1)=0;
for k=2:(N+1)
X(k)=X(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
clf();
plot(X)

endfunction
```

Para el movimiento Browniano en tres dimensiones se utilizó el siguiente código.

```
function []=browniano3d(N)

// inicializacion de los vectores
X=zeros(N+1,1); X(1)=0;
Y=zeros(N+1,1); Y(1)=0;
Z=zeros(N+1,1); Z(1)=0;

//construccion de los vectores
for k=2:(N+1) X(k)=X(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
for k=2:(N+1) Y(k)=Y(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;
for k=2:(N+1) Z(k)=Z(k-1)+(1/sqrt(N))*rand(1,1,"norm");
end;

clf();
plot3d(X,Y,Z)

endfunction
```

En ambos casos N representa la longitud de la caminata aleatoria. Visualmente, se obtienen buenas aproximaciones a partir de $N > 1000$. Evidentemente esto no es más que una aproximación del movimiento Browniano, pero es suficiente para tener una primera idea de sus trayectorias.

Conclusiones

Este pequeño artículo muestra algunas de las herramientas matemáticas clásicas utilizadas en matemáticas financieras. No debe tomarse en absoluto este texto como un compendio de estas herramientas sino más bien como una invitación a investigar las matemáticas que intervienen en estos conceptos financieros. Para el lector que desea saber un poco más, he recopilado un poco de bibliografía clásica sobre estos temas. En el libro [8] se encontrará una completa descripción, muy pedagógica, de los conceptos financieros y económicos mientras que en el libro [10] se hará mayor énfasis en la modelización matemática de estos conceptos. El texto [7] es una estupenda introducción a la integración estocástica y el libro [9] explica de forma muy clara cómo estudiar las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas. El lector que desea tener más detalles matemáticos sobre los procesos estocásticos está invitado a consultar [6]. El libro [11] muestra en cambio aplicaciones financieras de objetos matemáticos sofisticados. Finalmente, el libro [5] puede servir de base para los rudimentos de teoría de la medida e integración.

Recomiendo además leer la entrevista de Lorenzo Bergomi [4] en donde se explica la actividad matemática realizada en los bancos de inversiones.

Referencias

- [1] P. BALDI, L. MAZLIAK & P. PRIOURET. *Martingales et chaînes de Markov*. Hermann (2000).
- [2] N. BOULEAU. *Processus Stochastiques et applications*. Hermann (2000).
- [3] E. CEPEDA. *Portafolio de consumo, Problema de Merton*. Sometido a la revista *Analitika* (2011).
- [4] D. CHAMORRO. *Entrevista a Lorenzo Bergomi*. Asociación Amarun- www.amarun.org (2010).
- [5] D. CHAMORRO. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*. Vol. I. Cuadernos de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional no 4 (2010).
- [6] I. KARATZAS & S. E. SHREVE. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, segunda edición, GTM 113. Springer Verlag (1998).
- [7] H.H. KUO. *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext. Springer Verlag (2006).
- [8] J. HULL. *Options, Futures and ohter Derivatives*, sexta edición traducida al francés. Pearson (2007).
- [9] B. OKSENDAL. *Stochastic Differential Equations*, sexta edición, Universitext. Springer Verlag (2003).
- [10] D. LAMBERTON & B. LAPEYRE. *Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance*. Editions Ellipses (1997).
- [11] P. MALLIAVIN & A. THALMAIER. *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*. Springer (2006).

Diego CHAMORRO

Laboratoire d'Analyse et de Probabilités
Université d'Evry Val d'Essonne
&
Asociación AMARUN
www.amarun.org

23, Bd de France,
91037 Evry

diego.chamorro@univ-evry.fr