Un cálculo simple para obtener las desigualdades logarítmicas de Gagliardo-Nirenberg mejoradas sin constantes optimales.

Diego Chamorro

06/01/2012

Resumen: Presentamos en este artículo una versión logarítmica, no optimal, de las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas. Este nuevo tipo de desigualdades puede deducirse directamente a partir de las desigualdades de Jensen y de Hölder a partir de cálculos relativamente simples.

Abstract: We study in this article a non optimal logarithmic version of the improved Gagliardo-Nirenberg inequalities. These new type of logarithmic inequalities can be easily deduced from Jensen and Hölder inequalities.

Keywords: logarithmic inequalities, Sobolev spaces, Besov spaces.
MSC 2010: 39B72, 46E35.

1. Introducción

El objetivo de este pequeño artículo es obtener, por medio de cálculos relativamente simples, una versión logarítmica euclídea *no optimal* de las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas. Este nuevo tipo de desigualdades es una generalización de las desigualdades de Sobolev logarítmicas que tienen la siguiente formulación:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|\right] dx \leq \frac{n}{p} \ln\left[\mathscr{L}_{p,n}\|\nabla f\|_{L^p}\right] \qquad (1 \leq p \leq n) \tag{1}$$

en donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica $\|f\|_{L^p} = 1$ tal que $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{L}_{p,n}$ es una constante universal que depende únicamente del índice p y de la dimensión n. Esta desigualdad ha sido ampliamente estudiada en [4], [5] y [3] y en muchos otros artículos por medio de técnicas muy distintas. Los resultados más importantes de estos trabajos tienen que ver con la *optimalidad* de este tipo de mayoración; es decir en la obtención de las funciones que realizan la igualdad en la expresión anterior y en el cálculo explícito de las constantes optimales $\mathscr{L}_{p,n}$.

En el presente texto nos proponemos enunciar y demostrar unas desigualdades más generales que las desigualdades de Sobolev logarítmicas (1) sin preocuparnos por el estudio de la optimalidad. Nuestro teorema principal es el siguiente:

Teorema 1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\|f\|_{L^p} = 1$.*

1) Si $1 < p < +\infty$ y si $f \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|\right] dx \leq \frac{r}{r-p} \ln\left[c\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\right] \tag{2}$$

en dónde $s > 0$, $\theta = p/r$, $\beta = \frac{\theta s}{1-\theta}$ y $c = c(n,p,r,s)$ es una constante universal.

2) Si $p = s = 1$ y si $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \ln\left[|f(x)|\right] dx \leq \frac{r}{r-1} \ln\left[c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\right] \tag{3}$$

en dónde $\theta = 1/r$, $\beta = \frac{\theta}{1-\theta}$ y $c = c(n,p,r)$ es una constante universal.

Rogamos al lector ver las definiciones de los espacios de Sobolev $\dot{W}^{s,p}$ y de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$ en la sección 2.

Para comenzar el estudio de este tipo de desigualdades, es conveniente observar que este resultado se construye en dos etapas distintas. En efecto, la primera etapa consiste en demostrar la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \leq \frac{r}{r-p}\ln\left[\|f\|_{L^r}\right], \tag{4}$$

mientras que la segunda etapa estudia las llamadas *desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas*

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{5}$$

y de esta manera, inyectando (5) en (4), podemos ver que se obtiene inmediatamente las desigualdades (2) y (3) y es por esta razón que denominamos estas estimaciones como las *desigualdades logarítmicas de Gagliardo-Nirenberg mejoradas*.

Expliquemos ahora por qué el resultado del Teorema 1 es una generalización de las desigualdades de Sobolev logarítmicas. Esto se deduce del hecho que las desigualdades (5) son una mejoración sensible de las desigualdades de Sobolev clásicas -en las cuales no interviene el espacio de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$-, en efecto si $s=1$ y si $r=\frac{np}{n-p}$ se tiene la cadena de estimaciones

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \leq c'\|\nabla f\|_{L^p}$$

pues la cantidad $\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}$ es muy pequeña (en un cierto sentido que será precisado posteriormente). Entonces, por el crecimiento de la función logaritmo, las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg proporcionan un resultado más preciso que las desigualdades de Sobolev clásicas puesto que podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \leq \frac{n}{p}\ln\Big[c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\Big] \leq \frac{n}{p}\ln\left[c'\|\nabla f\|_{L^p}\right].$$

De esta manera vemos que, cuando no se está preocupado por el estudio de las constantes optimales, es posible deducir las desigualdades de Sobolev logarítmicas clásicas a partir del Teorema 1.

Indiquemos para terminar esta introducción cuales son los ingredientes que intervienen en la demostración de estas fórmulas. La primera estimación (4) que se necesita para la demostración del Teorema 1 se deduce combinando la desigualdad de Jensen con la desigualdad de Hölder y en este sentido esta etapa es relativamente simple. Las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas (5) son un poco más delicadas de obtener y se lo logra por medio de una manipulación directa de la caracterización de las potencias fraccionarias del Laplaciano en el caso $p>1$ (el caso $p=1$ es un poco más difícil).

Este artículo está organizado como sigue. En la sección 2 fijamos las definiciones de los espacios funcionales que serán utilizadas a lo largo de este texto, en la sección 3 demostramos la primera etapa intermedia para la obtención de las desigualdades logarítmicas de Gagliardo-Nirenberg mejoradas mientras que en la sección 4 damos la segunda etapa necesaria para la demostración del Teorema 1.

2. Notaciones

Damos en esta sección algunas definiciones y fijamos algunas notaciones que serán utilizadas a lo largo de este artículo. De forma general, dada una norma $\|\cdot\|_E$ definiremos el espacio funcional asociado $E(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto $\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_E < +\infty\}$ en donde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de distribuciones temperadas. Así tenemos los siguientes espacios funcionales:

- Espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p\leq +\infty$

  $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

  con las modificaciones usuales cuando $p=+\infty$, es decir $\|f\|_{L^\infty} = \sup\operatorname{ess}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$.

- Espacios de Sobolev $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$: es importante recalcar que los espacios de Sobolev deben definirse con cuidado cuando el índice p que caracteriza el espacio de Lebesgue de base es igual a 1, tenemos así:

- si $0 < s < +\infty$ y si $1 < p < +\infty$ escribimos

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}$$

en donde el operador de derivación fraccionaria $(-\Delta)^{s/2}$ está definido por medio de la transformada de Fourier: $\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f}\,(\xi) = |\xi|^s \widehat{f}(\xi)$.

- si $s = 1$ y si $1 \le p < +\infty$: tenemos

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,p}} = \|\nabla f\|_{L^p}.$$

Nótese que es ésta particularidad en la definición de los espacios de Sobolev que hace que se tengan las dos desigualdades (2) y (3).

- Espacios de Besov $\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$: utilizamos aquí la definición *térmica* de estos espacios

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} = \sup_{t>0} t^{\beta/2} \|H_t(f)\|_{L^\infty} \tag{6}$$

en donde $H_t(f)$ es el producto de convolución de f con una función gaussiana, es decir $H_t(f) = f * h_t$ con $h_t(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{n/2}}$.

3. Una aplicación de las desigualdades de Hölder y de Jensen

Demostramos ahora la desigualdad (4) por medio de cálculos totalmente elementales.

Teorema 2 *Sean p y r dos índices reales tales que $1 \le p < r < +\infty$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\|f\|_{L^p} = 1$ y tal que $\|f\|_{L^r} < +\infty$ entonces se tiene la estimación*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big] dx \le \frac{r}{r-p} \ln\big[\|f\|_{L^r}\big].$$

Demostración. Con las hipótesis del teorema podemos empezar con una desigualdad de interpolación entre espacios de Lebesgue dada por la fórmula $\|f\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^r}^{1-\alpha}$, en donde p, q, r y $\alpha \in]0,1[$ están relacionados por la expresión

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r}. \tag{7}$$

Ver el Teorema 4.2.7 en [2] para una demostración de esta desigualdad de interpolación.

Una vez que disponemos de esta estimación, podemos aplicar la función logaritmo a ambos lados para obtener

$$\ln\big[\|f\|_{L^q}\big] \le \alpha \ln\big[\|f\|_{L^p}\big] + (1-\alpha) \ln\big[\|f\|_{L^r}\big].$$

Utilizando la hipótesis $\|f\|_{L^p} = 1$, se tiene

$$(\alpha - 1) \ln\left[\|f\|_{L^r}\right] \le -\ln\left[\|f\|_{L^q}\right]. \tag{8}$$

Notamos que la función $-\ln$ es una función convexa y vamos a aplicar la desigualdad de Jensen a la parte derecha de la fórmula anterior. Para ello escribimos

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] = -\frac{1}{q} \ln\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{q-p} |f(x)|^p dx\right].$$

Observamos ahora que la medida $\mu(dx) = |f(x)|^p dx$ es una medida de probabilidad puesto que se tiene $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 1$. Reescribimos entonces la fórmula anterior de la siguiente manera

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] = -\frac{1}{q} \ln\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{q-p} \mu(dx)\right],$$

para aplicar directamente la desigualdad de Jensen (ver una demostración de esta desigualdad en el Teorema 4.3.4 de [2]):

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] \le -\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right] \mu(dx) = -\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right] |f(x)|^p dx.$$

Una vez que se tiene esta desigualdad, podemos volver a la fórmula (8) y escribir

$$(\alpha-1)\ln\left[\|f\|_{L^r}\right] \leq -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right] dx,$$

es decir

$$\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right] dx \leq (1-\alpha)\ln\left[\|f\|_{L^r}\right].$$

Finalmente, utilizando las propiedades del logaritmo y la relación (7) entre los índices p, q, r y α obtenemos la desigualdad buscada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|\right] dx \leq \frac{r}{r-p}\ln\left[\|f\|_{L^r}\right].$$

■

4. Las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas

Una vez que se tiene la desigualdad (4), para obtener el Teorema 1 es suficiente mayorar la cantidad $\|f\|_{L^r}$ por las normas adecuadas. Pero antes de demostrar las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg mejoradas conviene detallar muy brevemente en qué sentido estas desigualdades mejoran las desigualdades de Sobolev clásicas.

Recordemos que estas desigualdades tienen la siguiente forma si $1 < p < +\infty$ es un real tal que $1 < ps < n$ y en donde se tiene la relación $r = \frac{np}{n-ps}$:

$$\|f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{s,p}}$$

En el caso utilizado en las desigualdades de Sobolev logarítmicas (1), es decir $1 \leq p < n$ y $r = \frac{np}{n-p}$, se tiene

$$\|f\|_{L^r} \leq C\|\nabla f\|_{L^p}$$

Vamos a concentrarnos en esta ultima estimación. En este caso particular, cuando el parámetro r está relacionado con el índice p y con la dimensión n por medio de la ecuación $r = \frac{np}{n-p}$, se tiene $L^r \subset \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}$ de manera que, al nivel de las normas, se dispone de las desigualdades $\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \leq C\|f\|_{L^r}$ y esto nos permite escribir

$$\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} = \|\nabla f\|_{L^p}\left(\frac{\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}}{\|\nabla f\|_{L^p}}\right)^{1-\theta} \leq \|\nabla f\|_{L^p}\left(\frac{C\|f\|_{L^r}}{\|\nabla f\|_{L^p}}\right)^{1-\theta} \leq c'\|\nabla f\|_{L^p}.$$

Esto muestra en qué sentido se mejoran las desigualdades de Sobolev clásicas. El lector que desea profundizar estos temas está invitado a leer [1].

Enunciemos ahora sí el teorema más importante de esta sección.

Teorema 3 *Sean p, r dos reales tales que $1 \leq p < r < +\infty$ y sea s un índice real tal que $s > 0$.*

1) Sea f una función tal que $f \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{9}$$

con $1 < p < r < +\infty$, $\theta = p/r$, $\beta = \frac{\theta s}{1-\theta}$.

2) Si f es una función tal que $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{10}$$

con $1 < r < +\infty$, $\theta = 1/r$ y $\beta = \theta/(1-\theta)$.

Las demostraciones originales de estos resultados pueden encontrarse en [6] y [8]. Presentamos aquí algunas variantes que pueden encontrarse en [1].

Demostración.

1) Empezamos la demostración observando que el operador $(-\Delta)^{s/2}$ realiza un isomorphismo entre los espacios $\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Esto se deduce directamente de la definición de los espacios de Besov dada en (6). Demostramos este hecho muy esquemáticamente en la proposición 4.1 y recomendamos ver [9] para una demostración más general y detallada. Podemos entonces reescribir la desigualdad (9) de la siguiente manera:

$$\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta} \tag{11}$$

en donde $1 < p < r < +\infty$, $\theta = p/r$, $\beta = \frac{\theta s}{1-\theta}$.

Vamos ahora a usar la siguiente definición de las potencias fraccionarias de un operador:

$$(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1} H_t f(x)dt.$$

Podemos entonces introducir un parámetro $T > 0$ que será fijado posteriormente y escribir:

$$(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\int_0^{T} t^{\frac{s}{2}-1} H_t f(x)dt + \int_T^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1} H_t f(x)dt\right). \tag{12}$$

Para el estudio de estas integrales necesitaremos las siguientes estimaciones

- $|H_t f(x)| \leq \mathcal{M}_B f(x)$

  en donde $\mathcal{M}_B f$ es la función maximal de f definida por la expresión $\mathcal{M}_B f(x) = \sup\limits_{x\in B}\frac{1}{|B|}\displaystyle\int_B |f(y)|dy$ y verifica $\|\mathcal{M}_B f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ para todo $1 < p < +\infty$. Para la verificación de éstas y otras propiedades sobre las funciones maximales ver [7].

- $|H_t f(x)| \leq Ct^{\frac{-\beta-s}{2}}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}$ (por definición de los espacios de Besov)

Utilizando estas estimaciones en (12) se obtiene la siguiente desigualdad puntual:

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x)| \leq \frac{c_1}{\Gamma(\frac{s}{2})}T^{\frac{s}{2}}|\mathcal{M}_B f(x)| + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{s}{2})}T^{\frac{-\beta}{2}}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}.$$

Fijamos ahora el parámetro $T = \left(\frac{\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}}{\mathcal{M}_B f(x)}\right)^{\frac{2}{\beta+s}}$ y se obtiene la expresión

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x)| \leq \frac{c_1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{s}{\beta+s}}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{s}{\beta+s}1} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{s}{\beta+s}}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{s}{\beta+s}}.$$

Dado que $\frac{s}{\beta+s} = 1-\theta$ y que $\theta = p/r$ escribimos $|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x)| \leq \frac{c}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}$. Para terminar solo hay que elevar a la potencia r esta cantidad e integrar con respecto a la variable x para obtener

$$\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f\|_{L^r} \leq c\|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}.$$

De esta forma se deduce la desigualdad (11), lo que termina la demostración del primer punto.

2) Para el caso cuando $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1 *Para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ tal que $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para $t \geq 0$ se tiene*

$$\|f - H_t(f)\|_{L^p} \leq C\sqrt{t}\|\nabla f\|_{L^p} \tag{13}$$

en donde C es una constante que depende solamente de la dimensión n.

Prueba. Como $H_t(f) = f * h_t$ y como h_t es una gaussiana podemos escribir

$$f(x) - H_t(f)(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x) - f(x-y)\Big)h_t(y)dy.$$

Pero como $\|f(\cdot) - f(\cdot - y)\|_{L^p} \leq |y| \, \|\nabla f\|_{L^p}$ se obtiene

$$\|f - H_t(f)\|_{L^p} \leq \|\nabla f\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n} |y|h_t(y)dy = \|\nabla f\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n} |y| \frac{e^{-|y|^2/2t}}{(2\pi t)^{n/2}} dy$$

$$\leq \|\nabla f\|_{L^p} \; t^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} |y| e^{-|y|^2} 2\pi^{-n/2} dy \leq C_n \; t^{1/2} \|\nabla f\|_{L^p}$$

y el lema está demostrado. ■

Pasemos ahora a la demostración de la desigualdad (10). Por homogeneidad de estas estimaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \leq 1$. Podemos también suponer que se tiene $\|f\|_{L^r} < +\infty$. Se trata entonces de demostrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p dx. \tag{14}$$

con la información $\|f\|_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \leq 1$. Para ello, utilizamos la siguiente caracterización[1] de los espacios de Lebesgue

$$\frac{1}{5^r}\|f\|^r_{L^r} = \int_0^{+\infty} |\{|f| > 5\alpha\}| \, d(\alpha^r). \tag{15}$$

en donde hemos notado $|A|$ la medida del conjunto A.

En lo que queda de la demostración vamos a estimar el conjunto $\{|f| > 5\alpha\}$.

Si fijamos $t_\alpha = \alpha^{2(\theta-1)/\theta}$ con la definición que hemos dado de los espacios de Besov tenemos que $\|H_{t_\alpha}(f)\|_{L^\infty} \leq \alpha$.

Para el resto de cálculos introducimos la siguiente función $\Theta_\alpha(t)$:

$$\Theta_\alpha(-t) = -\Theta_\alpha(t) \qquad \text{y} \qquad \Theta_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \alpha \\ t - \alpha & \text{si } \alpha \leq t \leq M\alpha \\ (M-1)\alpha & \text{si } t > M\alpha \end{cases} \tag{16}$$

Aquí M es un parmámetro que por el momento fijamos tal que $M > 10$. Con esta función, podemos construir $f_\alpha = \Theta_\alpha(f)$ tal que

Lema 4.2 *El conjunto $\{|f| > 5\alpha\}$ está contenido en el conjunto $\{|f_\alpha| > 4\alpha\}$ y se tiene la estimación*

$$|\{|f| > 5\alpha\}| \leq |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}| \, .$$

En particular sobre el conjunto $\{|f| \leq M\alpha\}$ se dispone de la desigualdad $|f - f_\alpha| \leq \alpha$.

Lema 4.3 *Para $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene la identidad*

$$\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} \quad \textit{casi en todas partes.}$$

La demostración de estos dos lemas puede encontrarse en [1].

Regresemos ahora a la fórmula (15), con el lema 4.2 obtenemos la mayoración

$$\int_0^{+\infty} |\{|f| > 5\alpha\}| \, d(\alpha^r) \leq \int_0^{+\infty} |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}| \, d(\alpha^r) = I. \tag{17}$$

Definimos ahora $E(\alpha) = \{|f_\alpha| > 4\alpha\}$, $F(\alpha) = \{|f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)| > \alpha\}$ y $G(\alpha) = \{|H_{t_\alpha}(f_\alpha - f)| > 2\alpha\}$. Por la propiedad de linealidad del semi-grupo H_t escribimos

$$f_\alpha = f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha) + H_{t_\alpha}(f_\alpha - f) + H_{t_\alpha}(f).$$

[1] utilizar el teorema de Fubini.

Dado que $\|H_{t_\alpha}(f)\|_{L^\infty} \leq \alpha$, se tiene $E(\alpha) \subset F(\alpha) \cup G(\alpha)$ y podemos dar la siguiente estimación de la parte derecha de (17) por medio de las dos integrales:

$$I \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |F(\alpha)| d(\alpha^r)}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} |G(\alpha)| d(\alpha^r)}_{I_2}. \tag{18}$$

• Para la primera integral I_1, la desigualdad de Tchebychev[2] nos proporciona

$$|F(\alpha)| \leq \alpha^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)|^p dx.$$

Es en éste punto que usamos la desigualdad (13) para obtener $|F(\alpha)| \leq C\,\alpha^{-p}\, t_\alpha^{p/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\alpha|^p dx$.

Recordemos que por la definición de t_α dada anteriormente se tiene $t_\alpha^{p/2} = \alpha^{p-r}$. Además, por el lema 4.3 se dispone de la identidad $\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}}$ de manera que podemos escribir

$$|F(\alpha)| \leq C\,\alpha^{-r} \int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx.$$

Integrando ahora con respecto a $d(\alpha^r)$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} |F(\alpha)| d(\alpha^r) \leq C \int_0^{+\infty} \alpha^{-r} \left(\int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx \right) d(\alpha^r) = C\,r \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \left(\int_{\frac{|f|}{M}}^{|f|} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) dx$$

Así tenemos el siguiente resultado para esta primera integral

$$I_1 \leq C\,r \log(M) \|\nabla f\|_{L^p}^p. \tag{19}$$

• Para la segunda integral I_2 dado en (18) escribimos

$$|f - f_\alpha| = |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| \leq M\alpha\}} + |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}$$

Por la definición de f_α (cf. Lema 4.2), se tiene $|f - f_\alpha| \leq \alpha + |f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}$ y aplicando H_t a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$H_{t_\alpha}(|f - f_\alpha|) \leq \alpha + H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}).$$

Lo que implica la inclusión de conjuntos $G(\alpha) \subset \left\{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \right\}$. Finalemente, si se considera la medida de estos conjuntos se tiene

$$|G(\alpha)| \leq \left| \left\{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \right\} \right|.$$

Integrando esta expresión con respecto a $d(\alpha^r)$, tenemos

$$I_2 = \int_0^{+\infty} |G(\alpha)| d(\alpha^r) \leq \int_0^{+\infty} \left| \left\{ H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}) > \alpha \right\} \right| d(\alpha^r).$$

Aplicando una vez más la desigualdad de Tchebychev y el teorema de Fubini escribimos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^{+\infty} \alpha^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} H_{t_\alpha}\left(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}} \right) dx \right) d(\alpha^r) \\ &\leq r \int_{\mathbb{R}^n} |f| \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}} \alpha^{r-2} d\alpha \right) dx = \frac{r}{r-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \frac{|f|^{r-1}}{M^{r-1}} dx = \frac{r}{r-1} \frac{1}{M^{r-1}} \|f\|_{L^r}^r \end{aligned} \tag{20}$$

Juntando las estimaciones (19) et (20) se obtiene

$$\frac{1}{5^r} \|f\|_{L^r}^r \leq Cr\ \log(M) \|\nabla f\|_{L^p}^p + \frac{r}{r-1} \frac{1}{M^{r-1}} \|f\|_{L^r}^r.$$

Si la constante M es suficientemente grande, se obtiene

$$\left(\frac{1}{5^r} - \frac{r}{r-1} \frac{1}{M^{r-1}} \right) \|f\|_{L^r}^r \leq Cq\ \log(M) \|\nabla f\|_{L^p}^p$$

y de esta manera se obtiene la desigualdad (14) y consecuentemente el punto 2).

[2] ver proposición 4.3.1 de [2] para una demostración de esta desigualdad.

Con esto terminamos la demostración del Teorema 3.

■

Proposición 4.1 *Sea $s > 0$ un real. El operador $(-\Delta)^{s/2}$ realiza un isomorfismo entre los espacios de Besov $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Prueba. Damos aquí una verificación muy rápida y esquemática de este hecho. Es suficiente demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl}(-\Delta)^{s/2} : \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}(\mathbb{R}^n) \\ f & \longmapsto & (-\Delta)^{s/2}f\end{array}$$

verifica $\|(-\Delta)^{s/2}f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}} \leq C\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}$ puesto que el caso $(-\Delta)^{-s/2}$ es totalmente similar.

Tenemos, por la definición (6), que

$$\|(-\Delta)^{s/2}f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}} = \sup_{t>0} t^{(\beta+s)/2}\|H_t((-\Delta)^{s/2}f)\|_{L^\infty}$$

pero vemos que

$$\begin{aligned}\|H_t((-\Delta)^{s/2}f)\|_{L^\infty} &= \|f * h_{t/2} * (-\Delta)^{s/2}h_{t/2}\|_{L^\infty} \leq \|H_{t/2}(f)\|_{L^\infty}\|(-\Delta)^{s/2}h_{t/2}\|_{L^1} \\ &\leq \|H_{t/2}(f)\|_{L^\infty}\, Ct^{-s/2}\|(-\Delta)^{s/2}h_1\|_{L^1} \\ &\leq Ct^{-s/2}\|H_{t/2}(f)\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

después un cambio de variable conveniente en t se obtiene,

$$\sup_{t>0} t^{(\beta+s)/2}\|H_t((-\Delta)^{s/2}f)\|_{L^\infty} \leq C\sup_{t>0} t^{(\beta+s)/2}t^{-s/2}\|H_t(f)\|_{L^\infty} = C\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}},$$

Es decir que $\|(-\Delta)^{s/2}f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}} \leq C\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}$, lo que termina la demostración.

■

Conclusiones

Como hemos visto, la demostración del Teorema 1 se descompone en dos etapas: una desigualdad logarítmica y una estimación sobre las normas de los espacios de Lebesgue L^r.

La primera etapa es bastante simple pues usa herramientas totalmente clásicas como las desigualdades de Hölder y de Jensen. La segunda etapa utiliza en cambio nociones un poco más sofisticadas, pero si se admiten un par de puntos (como por ejemplo la definición de las potencias fraccionarias de un operador, las propiedades de las funciones maximales y los lemas 4.2 y 4.3), se puede observar que las manipulaciones realizadas no son necesariamente muy complicadas.

Este artículo espera mostrar cómo, a partir de herramientas relativamente básicas del análisis matemático, se puede llegar fácilmente a problemas abiertos de actualidad. En efecto, la obtención de las funciones que realizan la igualdad -y por consecuente de las constantes optimales- en las desigualdades (2) y (3) es un trabajo de investigación que aún no ha sido resuelto.

Referencias

[1] D. Chamorro. *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg Précisées sur le groupe de Heisenberg.* Tesis Doctoral (2006).

[2] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz.* Vol. I. Cuadernos de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional no 4 (2010).

[3] D. Cordero-Erausquin, B. Nazaret, C. Villani, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalites*, Advances in Mathematics 182, 307–332 (2004).

[4] M. Del Pino, J. Dolbeault, *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalites.* J. Func. Anal. 174, 151-161 (2003).

[5] I. Gentil, *The general optimal L^p-euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations.* J. Func. Anal. 202, 591-599 (2003).

[6] P. Gérard, Y. Meyer & F. Oru. *Inégalités de Sobolev Précisées.* Equations aux Dérivées Partielles, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, exposé n° IV (1996-1997).

[7] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Prentice Hall (2004).

[8] M. Ledoux. *On improved Sobolev embedding theorems.* Math. Res. Letters 10, 659-669 (2003).

[9] E. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press (1970).

Diego Chamorro

Laboratoire d'Analyse et de Probabilités
Université d'Evry Val d'Essonne
&
Asociación Amarun
www.amarun.org

23, Bd de France,
91037 Evry

diego.chamorro@univ-evry.fr