

PORTAFOLIO DE CONSUMO. PROBLEMA DE MERTON.

CEPEDA EDUARDO

RESUMEN. En este documento exponemos la estructura de base de un problema de control optimal ilustrado a través de un ejemplo de matemáticas financieras. La modelación es realizada mediante la utilización de procesos estocásticos en tiempo continuo y la herramienta utilizada es el cálculo estocástico desarrollado por Itô en los años 60 del siglo pasado.

Palabras clave: Control estocástico optimal, procesos estocásticos, movimiento browniano, problema de Merton.

ÍNDICE

1. Introducción	2
2. Modelo y notaciones	4
2.1. Modelo de Black y Scholes	4
3. Resultados	6
4. Pruebas	7
4.1. Prueba del Lemma 3.1.	7
4.2. Demostración del Teorema 3.1.	8
4.3. Demostración de la Proposición 3.1.	10
5. Segundo problema - Razonamiento heurístico	11
6. Implementación numérica	12
Apéndice A. Nociones de economía	16
A.1. Optimización	16
A.2. Aversión al riesgo y función valor	16
Apéndice B. Procesos estocásticos y cálculo estocástico	17
B.1. Proceso Estocástico.-	17
B.2. Filtraciones.-	18
B.3. Martingalas y Movimiento Browniano	18
Apéndice C. Fórmula de Itô e integración estocástica	19
C.1. Construcción de la integral estocástica	19
C.2. Cálculo de Itô	21
Apéndice D. Modelo de Black y Scholes	22
D.1. Ausencia de oportunidad de arbitrage	23
D.2. Modelación matemática	24
D.3. Interpretación de los parámetros	25
D.4. Portafolio dinámico	25
Referencias	26

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos un caso particular del problema que fue inicialmente estudiado por Merton (mirar [8]) y es conocido bajo el nombre de *problema de asignación de portafolio* que consiste en escoger la mejor inversión sobre un número n de activos bajo un contexto de incertidumbre, de tal manera que esta inversión permita maximizar el consumo de un agente en un horizonte finito o infinito de tiempo.

Consideremos un agente (por ejemplo, una persona o una empresa) que posee una cierta cantidad de riqueza W dividida en acciones S que compra o vende en la bolsa y en dinero S^0 que guarda en el banco. El agente utiliza una porción de esta riqueza - su consumo C - para vivir durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T puede ser finito o infinito.

Evidentemente el agente está interesado en determinar la mejor combinación de acciones y dinero en el banco de tal manera que le permita maximizar su consumo en el intervalo de tiempo considerado. El problema que enfrenta el agente es la maximización de su consumo C sobre $[0, T]$ para lo cual deberá definir **controles** sobre su riqueza W .

Los controles son las cantidades que modifican el valor de la riqueza: las proporciones de acciones π y dinero π^0 que debería tener en su "portafolio" y el consumo mismo. El agente estudiará la evolución en el tiempo de tales controles.

Puesto que estamos trabajando con cantidades cuyo valor es determinado solamente cuando la configuración del mundo es conocida en el futuro, de manera natural emerge un modelo aleatorio.

Los ingredientes para formular un problema de control son los siguientes:

- **Estado del sistema.-** Consideramos un sistema dinámico (es decir, que evoluciona en el tiempo) caracterizado completamente por su estado W en todo instante. El tiempo será considerado continuo (es posible también considerar el tiempo como discreto lo que se puede modelar, por ejemplo, mediante cadenas de Markov). Nosotros consideraremos aquí que el estado W varía continuamente y bajo condiciones de incertidumbre (es decir, de manera aleatoria, ver Sección B.1).

El estado del sistema W representa todo un conjunto de las variables cuantitativas que sirven para describir el sistema de manera exhaustiva. De manera general, el número de variables de estado es considerado finito, en nuestro caso en particular será igual a uno - la riqueza, y toma sus valores en el conjunto de los números reales.

Notaremos $W_t(\omega)$ el estado del sistema en el instante $t \geq 0$ bajo una configuración del mundo $\omega \in \Omega$ donde Ω es un espacio medible dotado de una medida de probabilidad P . La aplicación $t \rightarrow W_t$ describe la evolución del sistema. Esta evolución está determinada por un modelo probabilístico.

- **Control.-** La dinámica W_t del estado del sistema es influenciada por un control que modelaremos como un proceso $(\alpha_t)_t$ cuyo valor puede ser decidido en todo instante t según la información disponible en t . Es decir, α es un proceso adaptado (ver Definición B.3) a alguna filtración (ver Definición B.2) y toma sus valores en un espacio de control A .

• **Criterio de costo.**- Dos modelos son usualmente utilizados para representar el comportamiento del agente: criterio de esperanza de utilidad (modelo presentado en este artículo) y el criterio de media-varianza (mirar Sección A.1).

Nuestro objetivo es minimizar (o maximizar) sobre los controles un funcional¹ de la forma

$$J(W, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_0^T f(W_t, \omega, \alpha_t) dt + g(W_T, \omega) \right], \quad \text{en horizonte finito } T < +\infty$$

y

$$J(W, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} f(W_t, \omega, \alpha_t) dt \right], \quad \text{en horizonte infinito.}$$

El funcional J representa una utilidad en función del consumo. La función f es la función de consumo integral, g es el consumo final y $\beta > 0$ es un coeficiente de actualización.

Nosotros consideraremos que el agente tiene un tiempo de vida finito y además que pretende consumir toda su riqueza hasta el momento $T < +\infty$ de su desaparición (sin dejar herencia), es decir consideraremos la riqueza final nula lo que implica un consumo nulo), i.e., $g(W_T, \omega) = 0$. Definimos entonces la **función valor** como

$$\vartheta(W) = \inf_{\alpha} J(W, \alpha).$$

Los objetivos serán de determinar por un lado la función valor ϑ , y por otro lado el “infima” (o “maxima”) para el funcional J y los controles optimales que lo realizan cuando estos existen.

En el artículo [3] los autores presentan una extensión del problema propuesto en este documento, ellos consideran un activo cuya volatilidad es supuesta correlacionada a un factor económico observable (tipo de modelo conocido como “a volatilidad estocástica”) y utilizan un funcional del tipo

$$\vartheta(W) = \sup_{\pi_t, c_t} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\beta t} \frac{1}{\gamma} (c_t W_t)^\gamma dt \right],$$

donde (π_t, c_t) sont respectivamente las fracciones de riqueza utilizadas en activo y consumo.

Este funcional es utilizado para controlar un proceso de difusión, lo que conduce una ecuación diferencial parcial de primer orden no lineal conocida bajo el nombre de *Ecuación de Hamilton - Jacobi - Bellman* (HJB).

El artículo está organizado de la siguiente manera, la Sección 2 presenta en detalle el modelo de Black y Scholes y todas las herramientas utilizadas en la resolución del problema que nos proponemos resolver. La Sección 3 presenta el resultado principal en la forma de un teorema más un lema y una proposición que son resultados auxiliares que completan el resultado general. Las pruebas se encuentran en la Sección 4. Presentamos en la Sección 5, una manera “intuitiva” de resolver un segundo problema en horizonte infinito haciendo

¹Generalmente, en economía, un problema de optimización es presentado como una minimización de costos, por ejemplo, la maximización de ingresos de una empresa mediante la minimización de su costos de producción. En tal caso, la función de utilidad es dada como función del costo, en nuestro caso el parámetro de interés es el consumo.

especial atención sobre la manera de deducir la ecuación (HJB) asociada al problema de Merton y se dará los controles optimales. Finalmente el Apéndice presenta un soporte teórico del artículo, constantemente el artículo hará referencia a esta sección para identificar definiciones, resultados generales y discusiones sobre los temas tratados.

2. MODELO Y NOTACIONES

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio probabilizado y B un \mathcal{F} -movimiento browniano estándar, nos ubicamos bajo el siguiente modelo (ver sección D. del apéndice para una exposición más detallada).

2.1. Modelo de Black y Scholes. Los rendimientos entre 0 y t se comportan como un movimiento browniano de tendencia $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ y de coeficiente de difusión σ . Esta hipótesis se traduce en las siguientes propiedades del proceso de precio de la acción $(S_t)_{t \in [0, T]}$:

- $S_0 = x$;
- los rendimientos $\log(S_t) - \log(S_s)$ siguen una ley gaussiana de media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$ y de varianza $\sigma^2(t - s)$.
- Para todo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos relativos $\left\{ \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right\}$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ son independientes y de misma ley.

Dicho de otra manera, existe un movimiento browniano B tal que

$$(2.1) \quad S_t = f(t, B_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

el proceso S así definido es conocido como movimiento browniano geométrico.

Mediante la aplicación de la fórmula de Itô (C.5) para el movimiento browniano y la función $f(t, B_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$, cuyas derivadas son:

$$f'_t(t, z) = f(t, z) \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad f'_z(t, z) = f(t, z)\sigma, \quad f''_{zz}(t, z) = f(t, z)\sigma^2,$$

deducimos la ecuación (2.2).

Ahora, consideremos un portafolio que estará constituido por:

$$(2.2) \quad S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s,$$

$$(2.3) \quad S_t^0 = S_0^0 e^{rt},$$

donde (2.2) representa la dinámica de precios de la acción S_t con $S_0 > 0$ y (2.3) describe la evolución de una capitalización a la tasa sin riesgo r con $S_0^0 > 0$.

Notaremos H_t y H_t^0 las cantidades de acciones y dinero respectivamente en el instante t . Designaremos mediante C_t el *consumo instantáneo* del inversionista. Supondremos que la riqueza del inversionista $(W_t)_{t \geq 0}$, es autofinanciada (mirar Definición D.1):

$$(2.4) \quad \begin{cases} W_t &= H_t^0 S_t^0 + H_t S_t \\ &= W_0 + \int_0^t H_t^0 dS_t^0 + \int_0^t H_t dS_t - \int_0^t C_t d\theta, \end{cases}$$

donde la riqueza inicial W_0 es determinista y estrictamente positiva. Supondremos además que el “Sharpe ratio” (mirar (D.6) y la Sección D.3) satisface

$$(2.5) \quad 0 < \frac{\mu - r}{\sigma^2} < 1,$$

esta condición se traduce a $0 < \frac{\lambda}{\sigma} < 1$ (para la definición de λ mirar D.7) y es una condición de admisibilidad.

Observación 2.1. *Si esta fracción fuese negativa, entonces $\mu < r$ y el riesgo del activo ya no es justificado por una prima de riesgo ($\lambda < 0$). En este caso, pondríamos todo el dinero al banco y enfrentaríamos un problema diferente. Si fuese más grande que 1, el dinero en el banco ya no sería justificado puesto que la prima de riesgo es mayor que el riesgo del activo (su volatilidad).*

También, intuitivamente, mientras la fracción es más grande se vuelve más interesante invertir en el activo que dejar el dinero en el banco.

Definimos también las fracciones de riqueza Π_t y Π_t^0 invertidas en la acción y en dinero respectivamente, mediante:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \Pi_t^0 := \frac{H_t^0 S_t^0}{W_t} \\ \Pi_t := \frac{H_t S_t}{W_t} \end{array} \right) \quad \text{si } W_t \neq 0. \\ \left(\begin{array}{l} \Pi_t^0 := 0 \\ \Pi_t := 0 \end{array} \right) \quad \text{si } W_t = 0. \end{array} \right.$$

Notemos que, puesto que la riqueza es autofinanciada, tenemos

$$(2.7) \quad \Pi_t^0 + \Pi_t = 1 \quad \text{si } W_t \neq 0.$$

Notar que si $W_t = 0$ la riqueza ha sido consumida en su totalidad y $\Pi_t^0 = \Pi_t = 0$.

En este artículo proponemos resolver el problema de optimización siguiente

$$(2.8) \quad \vartheta(W) = \sup_{\Pi_t, C_t} J(W, \Pi_t, C_t) = \sup_{\Pi_t, C_t} \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(C_t) dt \right],$$

para una mejor comprensión de la elección de la función valor dirigirse a la Sección A.2.1.

Nosotros utilizaremos en todo el documento la notación $\frac{d}{dx}V(x, y) = V'_x(x, y)$ para toda función V derivable en x .

Definición 2.1 (Ecuación de Hamilton - Jacobi - Bellman). *Sea $\mathcal{L}^{\pi, c} : C^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ el operador funcional siguiente:*

$$(\mathcal{L}^{\pi, c}\Phi)(t, x) := (rx - c + (\mu - r)\pi x)\Phi'_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2x^2\Phi''_{xx}(t, x).$$

Definimos la siguiente ecuación diferencial parcial no-lineal:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \Phi'_t(t, x) + \max_{\pi \in [-1, 1], c > 0} [(\mathcal{L}^{\pi, c} \Phi)(t, x) + \log(c)] = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*, \\ \Phi(T, x) = 0 & x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

La ecuación (2.9) es llamada de Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB) y es muy importante para resolver el problema de optimización propuesto. Mostraremos que la solución de (2.9) nos permitirá encontrar teóricamente el valor de la maximización de (2.8).

3. RESULTADOS

Admisibilidad.- Los procesos que acabamos de definir en la Sección 2.: $(W_t)_{t \geq 0}$, $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ y $(C_t = C(W_t))_{t \geq 0}$ deben cumplir ciertas propiedades de admisibilidad que aseguren su buena definición, mirar la Definición C.1 del apéndice.

Proposición 3.1. *Los controles $(C_t)_{t \geq 0}$ et $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ son procesos admisibles, y tales que*

- I) $\Pi_t \in [-1, 1]$, \mathbb{P} -c.s. $\forall t \in [0, T]$,
- II) $C_t > 0$, \mathbb{P} -c.s. $\forall t \in [0, T]$,
- III) $(C_t)_{t \geq 0}$ verifica

$$(3.1) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T |\log(C_\theta)| d\theta \right] < +\infty.$$

Además, el proceso (W_t) es tal que

- a) $W_t > 0$, \mathbb{P} -c.s. $\forall t \in [0, T]$,
- b) $(W_t)_{t \geq 0}$ verifica

$$(3.2) \quad \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} [(T-t)|\log(W_t)|] \right] < +\infty.$$

Nosotros demostramos una condición más fuerte que la pedida en la definición de proceso de Itô: $\mathbb{E}[\int X_s ds] < +\infty$ implica $\int X_s ds < +\infty$ c.s.

Ahora presentamos la solución a la ecuación (2.9).

Lema 3.1. *La ecuación (2.9) posee la solución, definida mediante:*

$$V(t, x) = (T-t) \log \left(\frac{x}{T-t} \right) + \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right) (T-t)^2$$

y definimos $V(T, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Teorema 3.1. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio probabilizado, B un \mathcal{F} -movimiento browniano estándar y los siguientes procesos:*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ dS_t^0 &= r S_t^0, \\ dW_t &= H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t - C_t dt, \end{aligned}$$

donde S_0, S_0^0 y W_0 son supuestos estrictamente positivos y deterministas.

La solución al problema de control de la riqueza (2.8) es satisfecho por los controles:

$$(3.4) \quad \Pi_t^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2}, \quad y \quad C_t = \frac{W_t^*}{T - t}.$$

Estos controles definen el proceso (controlado):

$$(3.5) \quad W_t^* = W_0(T - t) e^{[r + \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2]t + \frac{\mu - r}{\sigma} B_t},$$

éste proceso es único c.s. Además, los procesos definidos en (3.4) y (3.5) satisfacen las condiciones de admisibilidad descritas en la Proposición 3.1.

Estos procesos son determinados por la función $V(t, x)$ solución de la ecuación (2.9) explicitada en el Lema 3.1 que además cumple

$$(3.6) \quad V(0, W_0) = \vartheta(W).$$

Observación.- El mejor valor para Π_t es coherente con la hipótesis (2.5). Además, vemos que el logaritmo del consumo instantáneo C_t es la diferencia del logaritmo de la riqueza y de $T - t$. C_t no es una función acotada, sin embargo es integrable sobre $[0, T]$.

4. PRUEBAS

4.1. Prueba del Lemma 3.1. Derivando la expresión de $V(t, x)$ tenemos

$$\begin{aligned} V_t'(t, x) &= -\log\left(\frac{x}{T-t}\right) + 1 - \left(r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)(T-t), \\ V_x'(t, x) &= \frac{T-t}{x}, \quad y \quad V_{xx}''(t, x) = -\frac{T-t}{x^2}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de $\mathcal{L}^{\pi, c}$ obtenemos

$$(\mathcal{L}^{\pi, c}V)(t, x) = (rx - c + (\mu - r)\pi x) \left(\frac{T-t}{x}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2(T-t) + \log(c).$$

Consideramos $(\mathcal{L}^{\pi, c}V)(t, x)$ como una función de (π, c) y estudiamos su matriz hesiana:

$$H_{(\mathcal{L}^{\pi, c}V)}(\pi, c) = \begin{bmatrix} -\sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son negativos, entonces definida negativa. Deducimos que la función $(\mathcal{L}^{\pi, c}V)(t, x)$ es cóncava y su máximo es alcanzado en sus puntos extremos:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}^{\pi, c}}{\partial \pi}(\pi^*, c^*) = 0 \implies \pi^*(t, x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}^{\pi, c}}{\partial c}(\pi^*, c^*) = 0 \implies c^*(t, x) = \frac{x}{T - t}. \end{cases}$$

Por otro lado vemos que podemos prolongar por continuidad $V(T, x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}_+^*$. Lo que verifica que $V(t, x)$ es solución de (HJB).

■

4.2. Demostración del Teorema 3.1. La idea de la demostración es utilizar la función V solución de HJB (2.9) para dar una primera mayoración de la función valor (2.8) de la forma $J(W, \Pi_t, C_t) \leq V(0, W_0)$ para cualquier pareja de controles Π_t y C_t .

Elegiremos entonces los controles (3.4) para construir el proceso W_t^* , a continuación demostramos que para este proceso así construido la primera desigualdad demostrada se vuelve una igualdad al tomar el sup sobre los controles.

Finalmente demostramos la unicidad de este proceso. La verificación de las condiciones de admisibilidad expuestas en la Proposición 3.1 es realizada al final de la sección.

Utilizando la notación diferencial (3.3) de los procesos y (2.6) y (2.7) para Π_t , observamos que la dinámica de la riqueza puede ser escrita de la siguiente manera:

$$(4.2) \quad dW_t = [rW_t + \Pi_t W_t(\mu - r) - C_t]dt + \sigma \Pi_t W_t dB_t.$$

Consideremos la solución V de (2.9). Comenzaremos demostrando la desigualdad:

$$(4.3) \quad V(0, W_0) \geq \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(C_t) dt \right].$$

para todo π et c . Aplicamos la fórmula (diferencial) de Itô a $V(t, W_t)$ y encontramos:

$$dV(t, W_t) = V'_x(t, W_t)dW_t + V'_t(t, W_t)dt + \frac{1}{2}V''_{xx}(t, W_t)\sigma^2 H_t^2 S_t^2 dt,$$

reemplazamos (4.2) para dW_t

$$\begin{aligned} dV(t, W_t) &= V'_x[rW_t - C_t + \Pi_t W_t(\mu - r)]dt + V'_x(t, W_t)\sigma W_t \Pi_t dB_t \\ &\quad + V'_t(t, W_t)dt + \frac{1}{2}V''_{xx}(t, W_t)\sigma^2 \Pi_t^2 W_t^2 dt, \end{aligned}$$

gracias a que V satisface la ecuación HJB (2.9) tenemos:

$$(4.4) \quad V'_t(t, W_t) \geq -V'_x[rW_t - C_t + \Pi_t W_t(\mu - r)] - \frac{1}{2}V''_{xx}(t, W_t)\sigma^2 \Pi_t^2 W_t^2 - \log(C_t),$$

esta desigualdad es verdadera para todo control $(\Pi_t, C_t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}_+^*$, entonces:

$$(4.5) \quad dV(t, W_t) \leq -\log(C_t)dt + V'_x(t, W_t)\sigma W_t \Pi_t dB_t.$$

Puesto que $|\Pi_t| \leq 1$, el proceso

$$\varphi(s) = V'_x(s, W_s)\sigma W_s \Pi_s = \sigma(T - s)\Pi_s$$

es adaptado y cumple $\int_0^T \varphi^2(s)ds < +\infty$, deducimos que $\varphi \in \mathbb{H}^2$ y gracias al Teorema C.3. es una martingala cuya esperanza es nula.

Tomamos la esperanza de la integral de esta expresión entre $[0, T - \epsilon[$ y calculamos el límite cuando ϵ tiende a 0:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^{T-\epsilon} dV(t, W_t) \right] \leq - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^{T-\epsilon} \log(C_t) dt \right].$$

Entonces con (3.1) aplicamos el teorema de Lebesgue, cambiamos límite y esperanza y utilizamos $V(T, W_T) = 0$. La desigualdad obtenida es válida para cualquier control admisible (Π_θ) et (C_θ) , deducimos:

$$V(0, W_0) \geq \sup_{(\Pi_\theta), (C_\theta)} \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(C_\theta) d\theta \right].$$

Vamos a definir entonces el proceso (W_t^*) correspondiente a los controles definidos en (3.4) $C_t := c^*(t, W_t^*)$ y $\Pi_t := \pi^*(t, W_t^*)$:

$$(4.6) \quad \begin{cases} dW_t^* = \left[rW_t^* - \frac{W_t^*}{T-t} + W_t^* \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right] dt + \frac{\mu-r}{\sigma} W_t^* dB_t, \\ W_0^* = W_0. \end{cases}$$

Buscamos la solución a esta ecuación diferencial estocástica que puede ser escrita bajo la forma:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{dW_t^*}{W_t^*} = \left(a - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t, \\ W_0^* = W_0. \end{cases}$$

donde $a = r + \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2$ et $b = \frac{\mu-r}{\sigma}$. Aplicamos la fórmula de Itô (C.5) a $f(t, W_t)$ con $f(t, x) = \log(x)$, suponiendo que W_t^* es positivo, obtenemos:

$$d(\log W_t^*) = \frac{dW_t^*}{W_t^*} - \frac{1}{2} b^2 dt$$

y reemplazamos $\frac{dW_t^*}{W_t^*}$ por su valor:

$$d(\log W_t^*) = \left(a - \frac{b^2}{2} - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t.$$

Integramos sobre $[0, t]$: y reemplazamos las expresiones de a y b lo que nos permite dar la expresión de W_t^* que se escribe de la siguiente manera:

$$(4.8) \quad W_t^* = W_0 \frac{(T-t)}{T} \exp \left(\left[r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r}{\sigma} \right)^2 \right] t + \frac{\mu-r}{\sigma} B_t \right).$$

Ahora bien, siguiendo los mismos pasos que para la demostración de (4.3), en este caso aplicamos la fórmula de Itô a la función $V(t, W_t^*)$, las desigualdades (4.4) et (4.5) se vuelven igualdades y verificamos:

$$(4.9) \quad V(0, W_0) = \mathbb{E} \left[\int_0^T \log(c^*(\theta, W_\theta)) d\theta \right].$$

Unicidad.- Supongamos que existe otra solución X_t (con $X_0 = W_0^*$) de (4.6). Definimos $Z_t = W_0/W_t^*$, aplicando la fórmula de Itô a $f(t, x) = W_0/x$ encontramos la dinámica de Z_t :

$$(4.10) \quad \begin{cases} dZ_t = -Z_t \left(a - b^2 - \frac{1}{T-t} \right) dt - b Z_t dB_t, \\ Z_0 = 1. \end{cases}$$

donde a y b son definidos en (4.7). Ahora aplicamos la fórmula de integración por partes a $(X_t Z_t)$ (ver Proposición C.2. del apéndice):

$$\begin{aligned} d(X_t Z_t) &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle X, Z \rangle_t \\ &= -X_t Z_t \left[\left(a - b^2 - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t \right] \\ &\quad + Z_t X_t \left[\left(a - \frac{1}{T-t} \right) dt + b dB_t \right] + (bX_t)(-bZ_t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Integramos esta expresión entre 0 y $t \leq T$, lo que nos da

$$X_t = Z_t^{-1} X_0 Z_0 = \frac{W_t}{W_0} W_0 = W_t \text{ c.s.}$$

Lo que termina la demostración del teorema. ■

Podemos observar que la ecuación diferencial (HJB) aparece de una forma natural a partir de la fórmula de Itô. Gracias a la expresión explícita de la riqueza del inversionista W_t^* deducimos que $W_t^* \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow T$, es decir $W_T^* = 0$ c.s. Esto se interpreta del modo siguiente, consideramos $[0, T]$ el período de vida del inversionista, entonces éste busca consumir el máximo posible en el curso de su vida sin dejar nada en herencia en T .

4.3. Demostración de la Proposición 3.1. La condición de admisibilidad Proposición 3.1.-I) para Π_t^* definido en (3.4) es satisfecha gracias a la hipótesis (2.5).

Para verificar la admisibilidad de $C_t^* = \frac{W_t^*}{T-t}$ (el cual estrictamente positivo c.s. puesto que W_t^* lo es por construcción), utilizamos (4.8) y explicitamos el proceso:

$$\log(C_t^*) = \log(T-t) + \log(W_0) + \left(r + \frac{1}{2} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} \right) t + \frac{\mu-r}{\sigma} B_t,$$

y podemos ver que C_t^* satisface (3.1).

Tenemos también que W_t^* satisface la condición de admisibilidad (3.2), en efecto:

$$\begin{aligned} (T-t)|\log(W_t^*)| &\leq (T-t)|\log(T-t)| + T|\log(W_0)| + \left(r + \frac{1}{2} \frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2} \right) T^2 \\ &\quad + \frac{\mu-r}{\sigma} T \max_{0 \leq \theta \leq T} |B_\theta| \end{aligned}$$

y gracias a la relación siguiente:

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq \theta \leq T} |B_\theta|^2 \right] \leq 4T,$$

deducimos (3.2). ■

5. SEGUNDO PROBLEMA - RAZONAMIENTO HEURÍSTICO

Del mismo modo podemos aplicar estas ideas con σ constante (en horizonte infinito de tiempo) al operador siguiente:

$$(5.1) \quad J(W, \pi_t, c_t) = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{\gamma} e^{-\alpha t} (c_t W_t)^\gamma dt \right], \quad \alpha > 0.$$

donde c_t es una fracción de la riqueza consumida. El objetivo de esta sección es poner en evidencia la fórmula de Itô y mostrar como interviene en la construcción de la ecuación (HJB) de modo muy importante, esta ecuación será explicitada al final de la sección. Una demostración formal en el caso general se puede encontrar en [5].

Sea $V(x)$ una función suficientemente derivable (que depende solamente de x), aplicamos la fórmula de Itô y obtenemos:

$$dV(W_s) = V'(x)dW_s + \frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2 ds,$$

reemplazando la dinámica de la riqueza, esta ecuación se convierte en:

$$dV(X_s) = \underbrace{V'(x)[X_s(r + (\mu - r)\pi - c)]ds + \pi\sigma dB_s}_{\text{martingala}} + \underbrace{\frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2 ds}_{\text{drift}}$$

Las expresiones sobre las llaves deben desaparecer dejándonos una función $\Phi(x, c)$ y una martingala, debemos entonces pedir a la función V que satisfaga la siguiente relación (la base de la ecuación):

$$(5.2) \quad rxV'(x) + \underset{\pi, c}{opt} \left\{ V'(x)(\mu - r)\pi - cV'(x) + \frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2 x^2 - \Phi(x, c) \right\} = 0,$$

donde $opt = \text{máx o mín}$ según el caso. Recordemos la forma de la función valor, vemos el término $e^{-\alpha t}$ dentro de la integral (5.1). Aplicamos entonces la fórmula de Itô sobre la función $e^{-\alpha t}V(x)$ (técnica semejante a la de la variación de la constante para la resolución de ecuaciones diferenciales):

$$d(e^{-\alpha s}V(x)) = e^{-\alpha s}dV_s - \alpha e^{-\alpha s}V(x)ds$$

Escribimos la dinámica de $V(x)$: $dV(x) = \Phi(x, c)ds + V'(x)\sigma\pi dB_s$. Esta relación será verdadera solamente si $V(x)$ es la solución de (HJB) i.e., si satisface la igualdad (5.2). Suponemos la última igualdad y la reemplazamos, lo que nos da:

$$d(e^{-\alpha s}V(x)) = e^{-\alpha s} (\Phi(x, c)ds + V'(x)\sigma\pi dB_s) - \alpha e^{-\alpha s}V(x)ds$$

De donde deducimos la elección de $\Phi(x, c) = \alpha V(x) - \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma$.

Para que la integral estocástica esté bien definida, las condiciones $V'(X_s)$ es \mathcal{F} -adaptada y $\int_0^{+\infty} (\sigma\pi V'(X_s))^2 ds < +\infty$ deben ser verificadas, y tendremos una martingala de esperanza nula.

Para determinar finalmente la forma de (HJB) en este caso, estudiamos el operador:

$$(L^{\pi, c}V)(x) = V'(x)(\mu - r)\pi - cV'(x) + \frac{1}{2}V''(x)\pi^2\sigma^2 x^2 - \alpha V(x) + \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma = 0.$$

cuya matriz hesiana es:

$$H_{(L^{\pi,c}V)}(\pi, c) = \begin{bmatrix} V''(x)x^2\sigma^2 & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)c^{\gamma-2}x^\gamma \end{bmatrix}$$

Que será definida positiva si $\gamma > 1$, entonces la escritura de la ecuación (HJB) siguiente es justificada:

$$\begin{cases} rxV'(x) + \min_{\pi,c} \{ xV'(x)[(\mu - r)\pi - c] + \frac{1}{2}V''(x)x^2\pi^2\sigma^2 - \alpha V(x) + \frac{1}{\gamma}c^\gamma x^\gamma \} = 0 \\ \text{condición sobre } V : e^{-\alpha t}V(x) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tendremos:

$$V(x) = (c^*)^{\gamma-1} \frac{x^\gamma}{\gamma}$$

con los controles optimales:

$$\begin{aligned} \pi^* &= \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} \\ c^* &= \frac{\alpha - \gamma \left(\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r \right)}{1-\gamma}. \end{aligned}$$

6. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

A continuación presentamos los resultados de la simulación numérica. Vamos a representar tres trayectorias. En el caso optimal hemos simulado el curso del activo y el consumo (notemos que gracias a la expresión de la riqueza (4.8) y del consumo (3.4), el consumo es un movimiento browniano geométrico ver (2.1) con la ayuda del modelo de Black y Scholes, y finalmente la riqueza.

Hemos escogido 4 estrategias diferentes para compararlas con la estrategia optimal. Las primeras tres consisten en modificar la cantidad de riqueza invertida en el activo manteniendo la misma manera de consumo que la estrategia optimal: 1) inversión 100 % activo, 2) 100 % banco, esta estrategia representa el comportamiento de un agente con un gusto nulo por el riesgo y es la mejor estrategia sin riesgo; y 3) (AB) estrategia de alza-baja, empezamos con una inversión de 50 % de la riqueza inicial la cual es modificada de +10 % si el activo sube de precio y de -10 % si el activo baja de precio.

Finalmente, hemos incorporado una última estrategia que modifica la forma de consumo manteniendo las proporciones de inversión optimales: 4) (Const.) Consumo constante, la tasa de consumo instantáneo es constante en tiempo e igual a 80 %, evidentemente este tipo de consumo tiene el defecto de no agotar toda la riqueza en T .

Estas estrategias han sido simuladas mediante el esquema de discretización siguiente:

$$\begin{aligned} C_{i-1} &= W_{i-1} \frac{n}{T(n-i+1)}, \\ W_i &= \frac{W_{i-1} - C_{i-1}}{n} \left(\pi S_i + (1-\pi)e^{r\frac{T}{n}} \right), \end{aligned}$$

con $C_0 = W_0$.

Parámetros de la simulación: Horizonte de tiempo $T = 1$, riqueza inicial $W_0 = 1$, valores iniciales del activo y de la capitalización sin riesgo $S_0 = S_0^0 = 1$. Parámetros del activo: $\mu = 0,06$ y volatilidad $\sigma = 0,12$, tasa de interés $r = 0,04$. El número de puntos de una trayectoria simulados es fijado a $n = 1000$ y el número de trayectorias para cada estrategia $M = 1000000$.

Estos valores de los parámetros han sido escogidos por las siguientes razones:

- El logaritmo de la riqueza inicial al anularse convierte la función valor más sensible a r , μ y σ , que son los parámetros que dan significado e importancia a este tipo de estrategias.
- Una tasa de interés de 4% es una elección realista.
- El valor de $\Pi = 0,5$ respeta las condiciones de admisibilidad. Además, al evitar aproximarnos de los límites 0 y 1 amplificamos la diferenciación entre las estrategias simuladas. Por otro lado, observemos que esta elección de Π significa que la estrategia optimal mantiene una composición de fracciones constantes de inversión en activo 50% y dinero en el banco 50%.
- La elección $n = 1000$ y $M = 10000$ toma varios minutos de cálculo de ordenador y es relativamente satisfactorio. Para $n = 100$ se encuentran problemas de coherencia entre las estrategias ligados a la simulación y son debidos a la mala aproximación de la integral del consumo instantáneo.

Presentamos el comportamiento del agente bajo dos configuraciones opuestas del mercado (activo de precio creciente - o bullish y decreciente - o bearish).

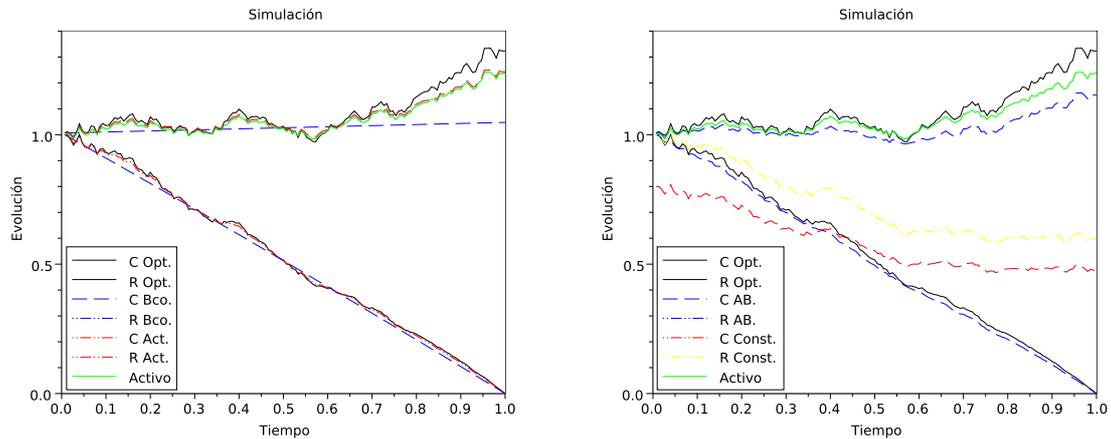


FIGURA 1. Comportamiento de un agente bajo un mercado “bullish”. Las gráficas representan la evolución en tiempo del consumo instantáneo C y de la riqueza R .

En la Figura 1. vemos a la izquierda la estrategia optimal comparada con dos estrategias “extremas”, en la misma escala están representados los rendimientos del activo. Podemos apreciar como la riqueza parte de $W_0 = 1$ y termina en $W_1 = 0$. Por otro lado, la curva de consumo instantáneo optimal se encuentra por encima de las otras curvas, lo que demuestra su optimalidad.

De igual manera, en el gráfico de la derecha vemos como la estrategia a consumo constante es ineficiente comparada con cualquier otra estrategia y que la estrategia 3) (compra si sube, venta si baja) es menos buena que la estrategia de 100 % activo (basta comparar con el gráfico de la izquierda).

En una segunda configuración del mercado tenemos los resultados siguientes (ver Figura 2):

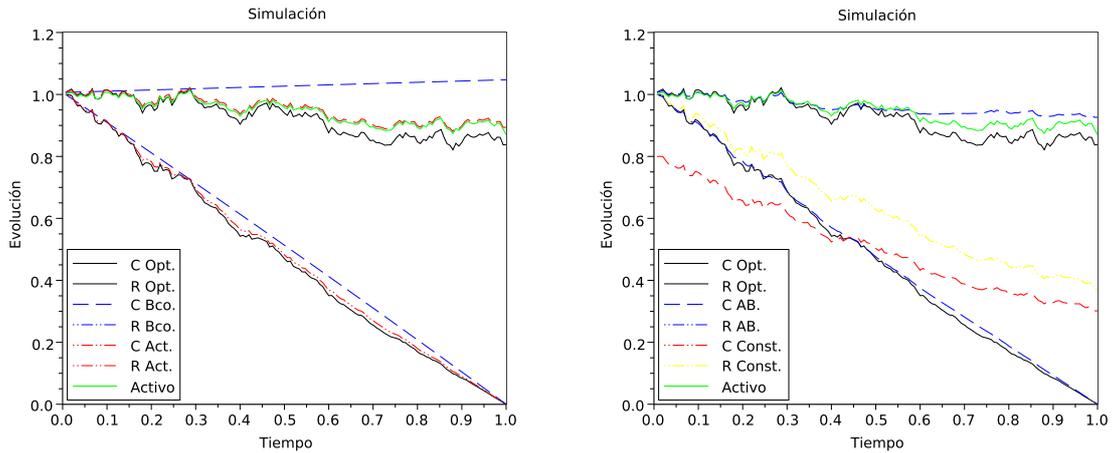


FIGURA 2. Comportamiento de un agente bajo un mercado “bearish”. Las gráficas representan la evolución en tiempo del consumo instantáneo C y de la riqueza R .

Podemos ver que la mejor estrategia es la de riesgo nulo (es decir, ponemos el dinero en el banco y consumimos nuestra riqueza siguiendo la forma optimal de consumo). Este resultado es coherente con las observaciones realizadas anteriormente (ver Observación 2.1) y la hipótesis sobre Π_t : una trayectoria de este tipo con $\mu > r$ tiene una probabilidad baja y la integral del consumo para este tipo de trayectorias, i.e., $F = \int_0^T \log(C_t) dt$ tiene menor relevancia para la esperanza $J(W) = \mathbb{E}[F]$.

Para confirmar el valor teórico de $\vartheta(W) = V(0,1)$ hemos realizado una estimación usando el método de Monte-Carlo. Para los parámetros escogidos tenemos el valor de $V(0, W_0) = 0,0225$. La simulaciones dan como resultado la estimación de $J(W) = \mathbb{E}[F]$:

A continuación presentamos ciertos temas necesarios para la mejor comprensión del artículo, como definiciones, teoremas útiles y discusiones sobre algunos temas tratados.

APÉNDICE A. NOCIONES DE ECONOMÍA

A.1. Optimización. Criterio de esperanza de utilidad.- Este criterio reposa sobre una teoría de elección en un universo de incertidumbre, un individuo compara sus ingresos aleatorios de los cuales conoce las leyes de probabilidad. Bajo ciertas condiciones sobre sus preferencias, Von Neuman y Morgenstern muestran que éstas se pueden representar mediante la esperanza de una función, dicha de utilidad y notada U .

De esta manera, un ingreso aleatorio X sera preferido a un ingreso aleatorio X' si $\mathbb{E}[U(X)] \geq \mathbb{E}[U(X')]$. Esta función de utilidad es creciente lo que expresa el gusto por la riqueza del individuo (mirar la siguiente sección).

En el caso estudiado, este criterio consiste a maximizar la esperanza de utilidad de la riqueza terminal a un horizonte $T < +\infty$:

$$(A.1) \quad \sup_{\alpha} \mathbb{E}[U(X_T)].$$

Criterio media - varianza Este criterio reposa sobre la hipótesis que las preferencias del individuo dependen solamente de la media y de la varianza de sus ingresos aleatorios. Para expresar la aversión al riesgo el criterio se interesa en los portafolios Media-Varianza eficaces, es decir, minimizando la varianza para una esperanza dada:

$$\inf_{\alpha} \{Var[X_t] : \mathbb{E}[X_T] = m\},$$

Se puede demostrar que este problema es equivalente al problema (A.1) para la función de utilidad:

$$U(x) = \lambda - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A.2. Aversión al riesgo y función valor. La aversión al riesgo es la actitud de un agente hacia la tenencia de activos con riesgo en su portafolio. Un agente con mayor aversión al riesgo demandará una prima (retorno o beneficio) mayor cuando considere que un instrumento posee alto riesgo. La aversión al riesgo es generalmente integrada por un agente mediante la concavidad de su función de utilidad.

En economía, es de uso común utilizar una función del tipo (mirar [7, página 152])

$$(A.2) \quad U(c) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} c^{\gamma}, & x \geq 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

conocida como **función isoelástica de utilidad** y sirve para expresar la utilidad en función del consumo de un agente.

La función escogida $u(c) = \log(c)$ es el límite de la función U presentada en (A.2). En efecto, una constante aditiva no afecta las condiciones de optimalidad, podemos restar la constante $\frac{1}{\gamma}$ a la función U , tomando el límite cuando γ tiende a cero tenemos:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{c^\gamma - 1}{\gamma} = u(c).$$

La función isoelástica es también conocida como CRRA (Constant Relative Risk Aversion) puesto que es la única que posee un índice de *aversión al riesgo* constante e igual a $-x \frac{U''(x)}{U'(x)} = 1 - \gamma$.

A.2.1. Sobre la función valor. La interpretación de la función valor ϑ en (2.8) es muy simple. Tomemos los instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ tales que $t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$, $n > 1$, tenemos para la media geométrica:

$$\begin{aligned} T \log \left((C_{t_1} \times \dots \times C_{t_n})^{\frac{1}{n}} \right) &= \frac{T}{n} \sum_{i=1}^n \log(C_{t_i}) = \sum_{i=1}^n \log(C_{t_i})(t_i - t_{i-1}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \log(C_t) dt. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que, en cierto sentido, la función ϑ escogida es equivalente a la maximización de la media geométrica del consumo. Todas las condiciones necesarias para dar un sentido a esta integral son dadas y verificadas en la Sección 4.3.

APÉNDICE B. PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y CÁLCULO ESTOCÁSTICO

En esta sección presentamos varios puntos de la teoría de procesos estocásticos necesarios para la comprensión del artículo. Ver [11, 6].

B.1. Proceso Estocástico.- Un proceso estocástico es un modelo matemático de un fenómeno que evoluciona en el tiempo de manera aleatoria. La aleatoriedad es expresada mediante la introducción de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , en el cual una medida de probabilidad \mathbb{P} puede ser definida. Las posibles realizaciones o resultados del fenómeno toman sus valores en segundo espacio medible (S, \mathcal{S}) llamado *espacio de estado*. Para los propósitos de este artículo el espacio de estados será el espacio euclidiano \mathbb{R} dotado de su σ -álgebra boreliana, i.e., $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Así, damos la definición formal de proceso estocástico.

Definición B.1. Sean T un conjunto de índices (usualmente tenemos $T = \mathbb{R}^+$ o \mathbb{N}), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico X es un conjunto de **funciones medibles** $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donde $t \in T$.

Para un punto fijo $\omega \in \Omega$ la función $t \mapsto X_t(\omega)$; $t \geq 0$ es la *trayectoria* del proceso X asociado a ω . Este es el modelo matemático para un experimento aleatorio cuyos resultados pueden ser observados continuamente en el tiempo.

Por razones técnicas de la teoría de integración de Lebesgue, las medidas de probabilidad son definidas sobre σ -álgebras y las variables aleatorias son definidas como medibles

respecto a estas σ -álgebras. La definición dada más arriba nos asegura que para un $\omega \in \Omega$ fijo, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria para todo $t \geq 0$.

Sin embargo, X es en realidad una función de una pareja de variables (t, ω) y, por razones técnicas, es conveniente tener una propiedad de medibilidad conjunta, i.e., la aplicación:

$$(t, \omega) \mapsto X(t, \omega) : ([0, +\infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, +\infty)) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

es medible. Los procesos estocásticos que cumplen con esta propiedad son llamados **procesos estocásticos medibles**.

B.2. Filtraciones.- La característica temporal de un proceso estocástico sugiere un paso del tiempo, respecto al cual, en cada momento $t \geq 0$ podemos hablar de *pasado*, *presente* y *futuro*. Así, un observador del proceso estocástico podría preguntarse en un instante dado t cuánto conoce del proceso comparado a otro instante del pasado $s \leq t$ o conocerá en un instante del futuro $r \geq t$.

Definición B.2. Sea \mathcal{F} una σ -álgebra, una **filtración** es una familia no-decreciente $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para $s < t < +\infty$. Y definimos $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Además, dado un proceso estocástico X , la elección más simple de una filtración es la generada por el proceso mismo, i.e.,

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_s : s \leq t\}),$$

la más pequeña σ -álgebra respecto a la cual X_s es medible para todo $s \in [0, t]$. \mathcal{F}_t^X es llamada **filtración natural de X** .

De esta manera, $A \in \mathcal{F}_t^X$ significa que para un instante $t \geq 0$ un observador de X sabe si A ha ocurrido o no.

Definición B.3 (Proceso estocástico adaptado). El proceso estocástico X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si, para todo $t \geq 0$, X_t es una variable aleatoria \mathcal{F}_t -medible.

Evidentemente, el proceso estocástico X es adaptado a su filtración natural \mathcal{F}^X .

B.3. Martingalas y Movimiento Browniano.

Definición B.4. Un proceso estocástico X \mathcal{F} -adaptado es una martingala respecto a \mathcal{F} si:

- (I) $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ para todo $t \geq 0$;
- (II) $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ c.s. para toda pareja s y t tal que $s \leq t$.

Un ejemplo de proceso estocástico que es una martingala es el movimiento browniano.

Definición B.5 (Movimiento Browniano Estándar). Un movimiento browniano estándar unidimensional sobre $[0, +\infty)$ es un proceso estocástico continuo a valores en \mathbb{R} , $(B_t)_{t \geq 0}$ tal que:

- (I) $B_0 = 0$;
- (II) para todos $0 \leq s < t$, el incremento $B_t - B_s$ es independiente de $\sigma(B_u, u \leq s)$ y sigue una ley normal $\mathcal{N}(0, \sqrt{t - s})$.

En la definición de movimiento browniano estándar; la independencia de los incrementos de B es respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_u, u \leq s)$ de B . La filtración natural de B es llamada “filtración browniana”.

APÉNDICE C. FÓRMULA DE ITÔ E INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

Esta sección ha sido inspirada por [9, 1] y presenta una introducción minimal a la integración estocástica, sin embargo, adaptada y suficiente para los temas tratados en este artículo. Para profundizar los conocimientos sobre el tema el lector puede dirigirse, por ejemplo, a [4, 10].

En finanzas, una estrategia de inversión sobre un activo S en tiempo discreto es un conjunto de decisiones $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tomadas cada cierto intervalo de tiempo en función del valor del activo. Así el valor del portafolio determinado por el activo y la estrategia sobre él tiene el valor siguiente en t_n :

$$V_{t_n} = V_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})$$

En tiempo continuo el curso del activo S es modelado como una función del movimiento browniano y el objetivo es generalizar la última fórmula con la ayuda de una integral del tipo $\int_0^t \alpha_s dS_s$. Ahora bien, una de las propiedades del movimiento browniano es que casi seguramente sus trayectorias no son derivables en todo punto. Dicho de otra manera, si B_t es un movimiento browniano, no existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{dB_t}{dt}$ tenga sentido, lo que no permite, por ejemplo, de definir la integral como

$$\int f(t) dB_t = \int f(t) \frac{dB_t}{dt} dt$$

evidentemente, tenemos el mismo problema con $dS_t = df(B_t)$. Sin embargo, es posible de dar un sentido a éstas integrales respecto al movimiento browniano, y se las llamará “integrales estocásticas”.

C.1. Construcción de la integral estocástica. Sea $(B_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{F} -movimiento browniano sobre un espacio probabilizado (dotado de una medida de probabilidad) y \mathcal{F} -filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, .)$. El objetivo es dar un sentido a $\int_0^t f(s, \omega) dB_s$ para una clase de procesos $f(s, \omega)$ adaptados a \mathcal{F} . La construcción comienza con la definición de la integral sobre el conjunto de procesos “en escalera” o “elementales” para después extenderlo a una clase más rica de procesos.

Sea φ un proceso en escalera integrable e igual a $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$, definimos la integral estocástica $I(\varphi)$ de φ de la siguiente manera

$$(C.1) \quad \int \varphi(t) dB_t := \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}].$$

La variable aleatoria $I(\varphi)$ definida de esta manera es una combinación lineal a coeficientes aleatorios de variables aleatorias gaussianas independientes. $I(\varphi)$ no es necesariamente una

v.a. gaussiana, sin embargo, sus momentos de orden 1 y 2 satisfacen propiedades remarquables.

Lema C.1. *Sea φ un proceso en escalera integrable y de cuadrado integrable. Tenemos*

$$(C.2) \quad \mathbb{E} \left[\int \varphi(t) dB_t \right] = 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int \varphi(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int \varphi^2(t) dt \right].$$

Gracias al teorema siguiente podremos extender la definición de integral estocástica a cualquier proceso en el espacio

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ (\varphi(t))_{t \geq 0} \text{ procesos adaptados a } \mathcal{F} : \mathbb{E} \left[\int \varphi^2(t) dt \right] < +\infty \right\}.$$

Teorema C.1. *Sea B un movimiento browniano estándar respecto a una filtración \mathcal{F} . A todo proceso estocástico $\varphi \in \mathbb{H}^2$, se asocia de manera única una variable aleatoria de cuadrado integrable, $\int \varphi(t) dB_t$ tal que*

$$\mathbb{E} \left[\int \varphi(t) dB_t \right] = 0; \quad \mathbb{E} \left[\left(\int \varphi(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int \varphi^2(t) dt \right],$$

que coincide para los procesos estocásticos en escalera con $\sum_{i=0}^{n-1} X_i [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$.

C.1.1. *La integral estocástica como proceso.* Como para la integración determinista, es posible asociar un proceso a una integral estocástica de un proceso φ que vive en \mathbb{H}^2 .

Vamos a notar:

$$I_t(\varphi) := I(\mathbb{1}_{]0,t[}(\varphi)) := \int_0^t \varphi(s) dB_s.$$

El objetivo de esta sección es de presentar las propiedades del proceso estocástico $(I_t(\varphi))_{t \geq 0}$.

Teorema C.2. *Sea $\varphi \in \mathbb{H}^2$, $(I_t(\varphi))_{t \in [0,T]}$ es un proceso estocástico de trayectorias continuas, adaptado y tal que para toda función aleatoria (i.e., un proceso estocástico visto como una función del tiempo) $h_A(s) = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]u,v]}(s)$, $A \in \mathcal{F}_u$ se tiene*

$$\int_0^t \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]u,v]}(s) \varphi(s) dB_s = \mathbb{1}_A \int_{\min\{t,u\}}^{\min\{t,v\}} \varphi(s) dB_s.$$

Todas las propiedades se obtienen gracias a la aproximación mediante procesos en escalera, a excepción de la continuidad de las trayectorias que es mostrada mediante la *desigualdad maximal*, esta propiedad es fundamental para la integración estocástica puesto que permite demostrar no solamente la continuidad sino también varios resultados de convergencia.

Proposición C.1 (Desigualdad maximal). *Para todo proceso estocástico $(I_t(\varphi))_{t \in [0,T]}$ con $\varphi \in \mathbb{H}^2$ tenemos*

$$\mathbb{E} \left[\left(\sup_{u \in [0,t]} \int_0^u \varphi(s) dB_s \right)^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \varphi(s) dB_s \right)^2 \right] = 4 \mathbb{E} \left[\int_0^T \varphi^2(s) ds \right].$$

Gracias al principio de simetría del movimiento browniano: $\forall y \geq 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} B_t \geq y) = \mathbb{P}(|B_T| \geq y)$ (i.e., para cada $T \geq 0$, $\sup_{t \geq T} B_t$ y $|B_T|$ tienen la misma ley), podemos deducir una estimación exacta:

$$(C.3) \quad \mathbb{E} \left[\left(\sup_{u \leq T} B_u \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[(B_T)^2 \right] = T.$$

Teorema C.3 (Propiedad de Martingalas). *Sea $\varphi \in \mathbb{H}^2$, el proceso estocástico continuo, adaptado e integrable $(I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ es una martingala.*

C.2. Cálculo de Itô. Ahora introducimos un “cálculo diferencial” sobre estas integrales que acabamos de definir, llamado “Cálculo de Itô” y cuya herramienta principal es la “fórmula de Itô”.

Comenzamos dando la definición de la clase de procesos sobre los cuales estamos autorizados a utilizar la fórmula de Itô. Daremos las condiciones mínimas necesarias para su buena definición.

Definición C.1 (Procesos de Difusión o de Itô). *Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espacio probabilizado dotado de una filtración y $(B_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{F} -movimiento browniano. Llamaremos **Proceso de Itô o de difusión**, un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ a valores en \mathbb{R} tal que*

$$(C.4) \quad \mathbb{P} \text{ c.s. } \forall t \geq 0, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

donde:

- X_0 es \mathcal{F}_0 -medible.
- $(K_t)_{t \geq 0}$ y $(H_t)_{t \geq 0}$ son procesos \mathcal{F} -adaptados.
- $\int_0^t |K_s| ds < +\infty \forall t \geq 0$ \mathbb{P} -c.s.
- $\mathbb{E} \left[\int_0^t |H_s|^2 ds \right] < +\infty \forall t \geq 0$, i.e., $K \in \mathbb{H}^2$.

Teorema C.4 (Fórmula de Itô). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Itô (definido mediante la fórmula (C.4)) y $(t, x) \mapsto f(t, x)$ una función $C^{1,2}$, es decir, dos veces diferenciable en x y una en t y de derivadas continuas. Tenemos*

$$(C.5) \quad \begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s, \end{aligned}$$

donde, por definición

$$\langle X, X \rangle_s = \int_0^s H_u^2 du,$$

y

$$\int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s = \int_0^t f'_x(s, X_s) K_s ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) H_s dB_s.$$

Proposición C.2 (Fórmula de integración por partes). Sean X_t e Y_t dos procesos de Itô:

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s. \end{aligned}$$

Entonces:

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

con la convención:

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

APÉNDICE D. MODELO DE BLACK Y SCHOLES

En 1900, Louis Bachelier introduce el movimiento browniano para modelizar la dinámica de los precios de las acciones en la Bolsa. Su “Teoría de la especulación” (su tesis doctoral defendida en la Sorbonne) es el primer ladrillo de las finanzas modernas. En 1905 Albert Einstein construye un modelo probabilístico para una partícula en difusión, encontrando la ley de probabilidad para la posición de tal partícula.

En los años 60 el trabajo de Bachelier es retomado, y en los últimos 40 años los mercados financieros experimentan una revolución de gran amplitud. La actividad financiera se desarrolla a través de un cierto número de instrumentos que tienen como objetivo la repartición del riesgo de un mercado determinado, riesgo que nace de las variaciones de las tasas de cambio de divisas, de las tasas de interés, o de factores económicos que se escapan del control de los participantes de este mercado.

La gran variabilidad de los precios de estos instrumentos o parámetros condujeron de manera natural a esta necesidad de transferir el riesgo. Los bancos juegan un papel importante en esta transformación proponiendo productos financieros que serán llamados *productos derivados*. Actualmente, es importante observar la importancia de las herramientas del cálculo estocástico sin las cuales el business de los seguros y riesgos financieros no podría haberse desarrollado como lo ha hecho y los mercados financieros no habrían podido ganar la importancia se poseen ahora.

Un ejemplo de producto derivado son las opciones, una opción es un contrato que da el derecho (y no la obligación) de comprar (tal opción se llama “CALL”) a una fecha futura predeterminada (“madurez” del contrato), cantidad fija de un activo (una acción) a un precio dado (“precio de ejercicio” o “*strike*”) a cambio de una prima inicial pagada en el presente.

Podemos realizar las siguientes observaciones sobre este tipo de productos.

- El riesgo del comprador es limitado a la prima: en el peor de los casos, este pierde el importe pagado para entrar al contrato.

- El riesgo que afronta el vendedor del CALL aumenta si el mercado esta en alza. La madurez puede jugar en contra de él y, además, un gran movimiento de alza justo antes de la ejecución siempre es de temerse.

Por otro lado, la incertidumbre que afecta la acción subyacente de la opción a madurez es el resultado de pequeños movimientos cotidianos que pueden ser observados, lo que provee información que puede ser utilizada para

- definir un modelo para la dinámica del curso de la acción;
- y por otra parte, para reducir el riesgo final mediante un actitud dinámica y racional puesto que el vendedor puede en todo momento comprar o vender acciones que financia con la ayuda de la prima.

Esto es precisamente es lo que hacen en 1973 F. Black and M. Scholes cuando publican un artículo (mirar [2]) en el cual, retomando las ideas de Bachelier, consiguen dar una respuesta al problema de precio y cobertura de un producto derivado. Ellos definen el precio de un producto derivado como el “precio de su cobertura”.

Por otro lado, es evidente que los precios de los diferentes productos derivados no son cualquiera, existe una fuerte coherencia entre los precio de productos derivados sobre un mismo subyacente (por ejemplo, CALLs con diferentes strikes).

D.1. Ausencia de oportunidad de arbitrage. Ley fundamental de las Finanzas de mercado.- En un mercado muy liquido², donde no existen precios de transacción ni limitaciones sobre la compra-venta de acciones, no hay oportunidad de arbitrage, es decir que no es posible ganar dinero de manera seguro a partir de una inversión nula.

Esta propiedad de ausencia de oportunidad de arbitrage es, sobre todo, una regla que conduce a la **unicidad de precios de productos derivados** dela siguiente manera:

Dos estrategias que dan como resultado un mismo valor en el horizonte final de gestión (fecha de madurez) en todos los estados del mundo tienen el mismo valor en toda fecha intermedia.

Analicemos ahora el comportamiento de un vendedor de un CALL que asegura un flujo $h(S_T)$ a una madurez T , recibiendo en el presente la *prima* o precio de la acción. El vendedor no puede repartir el riesgo sobre un gran número de clientes como lo hacen las aseguradoras, lo que hará es invertir la prima en un portafolio autofinanciado (ver definición D.1 más adelante). El vendedor tiene varias opciones, si éste es pasivo, pondrá el dinero en el banco. En T la cantidad de dinero que posee depende de los intereses recibidos y de la prima inicial y no del valor del activo. Esta no es una estrategia adaptada al producto vendido.

Por otro lado, puede comprar un cierto número de acciones, de manera que su portafolio posea las mismas acciones subyacentes cuyo movimiento de su precio va en el mismo sentido que el flujo que él podría pagar.

²la propiedad de liquidez de un mercado se traduce por la facilidad de comprar y vender libremente y sin restricciones de cantidad los activos que se intercambian en él.

La gestión de un producto derivado se muestra entonces como una conjunto de varias operaciones:

- 1) seguir regularmente el precio C_t del producto en el mercado,
- 2) administrar un portafolio autofinanciado, de valor V_t en t cuyo valor inicial es la prima $V_0 = x$,
- 3) vigilar el “P& L” (las ganancias y pérdidas) del portafolio.

El objetivo de la gestión de una opción no es la maximización son “P& L” final, sino al contrario reducirlo con el fin de conseguir la varianza más débil posible. El mejor “portafolio” (que supone además una elección optimal de la prima x) es llamado el *portafolio de cobertura*.

Bajo la hipótesis de ausencia de oportunidad de arbitrage podemos establecer la siguiente relación entre evaluación y cobertura:

Si es posible encontrar un P& L final de riesgo nulo, entonces el principio de AOA implica que la diferencia entre el precio y el valor del portafolio son nulos casi seguramente en toda fecha t .

D.2. Modelación matemática. La incertidumbre es modelada a través de trayectorias futuras del activo con riesgo, vistas como posibles escenarios de evolución. De manera general, se supone que las trayectorias son funciones continuas definidas sobre \mathbb{R}^+ . Bachelier modeló el curso de una acción como un movimiento browniano con tendencia (o “drift”). El problema de este modelo es que permite a la acción adquirir valores negativos. Samuelson en 1960 propone mantener esta modelación para los rendimientos en lugar del curso mismo.

Suponiendo que el rendimiento entre dos periodos es medido mediante la diferencia de los logaritmos del curso de la acción, deducimos el modelo presentado en la Sección 2.1. Puesto que la función exponencial ecuación no es acotada, para justificar la escritura diferencial y la utilización de la fórmula de Itô en (2.1), necesitamos ciertas propiedades de integrabilidad que son fácilmente verificadas gracias a las propiedades de la transformada de Laplace de una variable aleatoria gaussiana presentadas en el siguiente teorema.

Teorema D.1. *Sea S un movimiento browniano geométrico de valor inicial x . El curso S_t , de condición inicial $S_0 = x$ sigue una ley log-normal cuyos primeros momentos son dados por*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t] &= xe^{\mu t}, & \mathbb{E}[S_t^2] &= x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}, \\ \text{Var}[S_t] &= x^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).\end{aligned}$$

En particular, el Sharpe ratio que reporta la ganancia promedio respecto a la variabilidad del activo,

$$(D.6) \quad \text{Sharpe ratio} = \frac{\mathbb{E}[S_t] - x}{\sqrt{\text{Var}[S_t]}}$$

en independiente del valor inicial $S_0 = x$.

D.3. Interpretación de los parámetros.

- Si no existe ruido, i.e., $\sigma = 0$ y el activo no posee ningún riesgo, μ representa su rendimiento anualizado. Un simple argumento de arbitraje muestra que en ausencia de aleatoriedad sobre el activo, su rendimiento debe ser el mismo que aquel de un depósito en el banco cuyo tasa de interés es notada r : si $r < \mu$ bastaría hacer un crédito en el banco y comprar el activo, inversamente si $r > \mu$ bastaría vender el activo al descubierto y depositar el dinero en el banco.

Designaremos mediante S_t^0 el valor en t de la capitalización de un dolar en el banco.

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt.$$

- Si el activo tiene riesgo, μ representa el rendimiento anualizado esperado del activo por unidad de tiempo. Es de uso común comparar el rendimiento de un activo con el de la capitalización del dinero en el banco. El parámetro $\mu - r$ es en general un parámetro de referencia.
- El *Ratio de Sharpe* por unidad de tiempo de los excesos de rendimientos respecto al dinero toma en cuenta la volatilidad del activo, y es considerado como la **prima de riesgo** λ que el mercado asigna a la fuente de riesgo B puesto que

$$(D.7) \quad \text{prima de riesgo} = \lambda = \frac{\frac{d}{dt} \mathbb{E} \left[\frac{dS_t}{S_t} \right] - r}{\sqrt{\frac{d}{dt} \text{Var} \left[\frac{dS_t}{S_t} \right]}} = \frac{\mu - r}{\sigma} \frac{dS_t}{S_t}.$$

- Escribiendo el curso de un activo de la siguiente manera

$$dS_t = S_t [r dt + \sigma (dB_t + \lambda dt)],$$

ponemos en evidencia la importancia del parámetro clave de la caracterización de los activos financieros: la **volatilidad** σ . El orden del tamaño de este parámetro depende de la naturaleza del activo subyacente: en los mercados de acciones varía entre 30 y 70 %, en los mercados de tasas de cambio entre 10 y 30 %, en los mercados de tasas de interés entre 8 y 30 %.

D.4. Portafolio dinámico. Nosotros supondremos que podemos solamente invertir en *un activo* con riesgo, usualmente llamado acción; y en dinero, es decir, depositando en el banco o realizando préstamos. Nosotros designaremos mediante S_t el precio de la acción en la fecha t , r la tasa de interés para un depósito en el banco entre $[t, t + dt]$.

Definición D.1. Una estrategia **autofinanciada** es una estrategia dinámica de compra y venta de acciones y de préstamos y depósitos de dinero en el banco, cuyo valor no es modificado por el aumento o retiro de dinero.

Sea V_t el *valor de mercado* (llamado también *valor liquidativo* o *Market to Market*) del portafolio en la fecha t . Después de ejecutar una decisión sobre el portafolio (compra-venta de acciones o depósito-retiro-préstamo de dinero al banco), el número de acciones δ_t (positivo si es comprador - posición dicha “long”, negativo si es vendedor - posición dicha “short”), es contante hasta la próxima fecha de gestión. Supondremos que el trader toma su

decisión en función del valor del curso de la acción en el momento en el que va a renegociar (comprar-vender / depositar-retirar).

En un tiempo dt , la variación del valor del portafolio es explicada solamente por la variación del valor de la acción y por la tasa de interés vertida por el banco sobre el dinero. Es decir, puesto que el dinero invertido en el banco es $V_t - \delta_t S_t$ (todo el dinero que no se utiliza para comprar acciones es depositado en el banco), el valor del portafolio autofinanciado viene dado por

$$(D.8) \quad dV_t = \delta dS_t + (V_t - \delta_t S_t) r dt = r V_t dt + \delta_t (dS_t - r S_t dt).$$

REFERENCIAS

- [1] Lamberton D. and Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, second edition, 1997.
- [2] Black F. and Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 3:637–654, 1973.
- [3] H.W. Fleming and D. Hernandez-Hernandez. An optimal consumption model with stochastic volatility. *Finance Stoch.*, 7:245–262, 2003.
- [4] Kuo H. *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext. Springer, first edition, 2006.
- [5] Pham H. *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, volume 61 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, 2007.
- [6] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, second edition, 1998.
- [7] L. Ljungqvist and Th. Sargent. *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press, second edition, 2004.
- [8] R. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case. *Rev. Econ. Stat.*, 51:239–265, 1969.
- [9] El Karoui N. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, volume 2 of *Cours de mathématiques appliquées M1*. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2004.
- [10] Protter P. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, second edition, 2005.
- [11] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, volume 293 of *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer, third edition, 2005.

LABORATOIRE D’ANALYSE ET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, UMR 8050. UNIVERSITÉ PARIS-EST. 61, AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE, 94010 CRÉTEIL CÉDEX
E-mail address: `eduardo.cepeda@math.cnrs.fr`